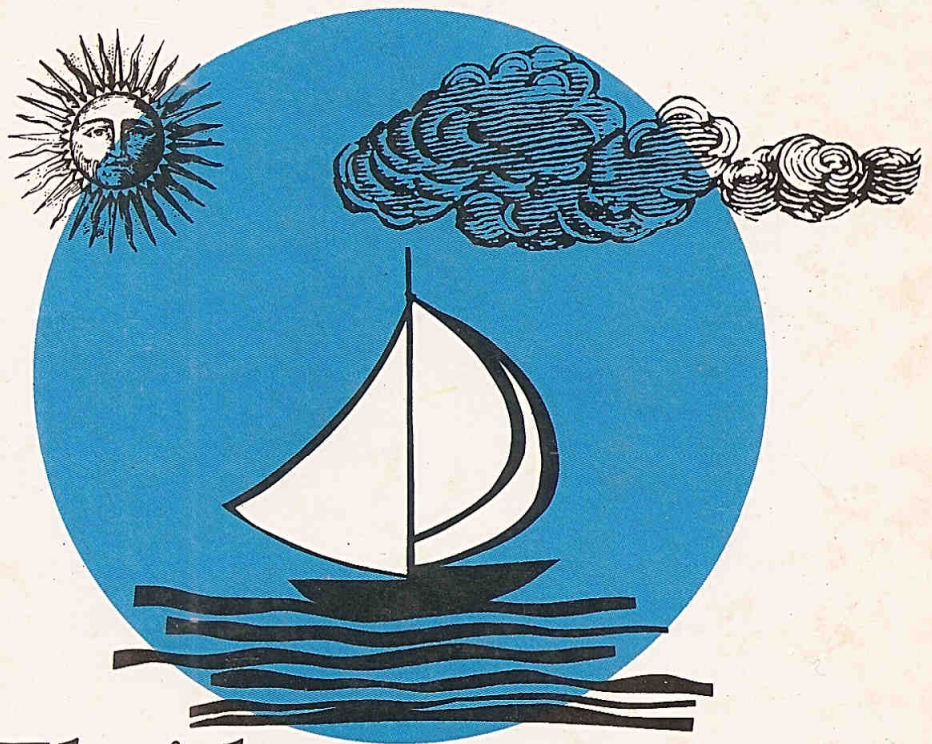


H. Moysés
Nussenzveig



Fluidos
2 *Oscilações e Ondas*
Calor

CURSO DE
FÍSICA
BÁSICA



A Lei de Direito Autoral
(Lei nº 9.610 de 19/2/98)
no Título VII, Capítulo II diz

— Das Sanções Cíveis:

Art. 102 O titular cuja obra seja fraudulentamente reproduzida, divulgada ou de qualquer forma utilizada, poderá requerer a apreensão dos exemplares reproduzidos ou a suspensão da divulgação, sem prejuízo da indenização cabível.

Art. 103 Quem editar obra literária, artística ou científica, sem autorização do titular, perderá para este os exemplares que se apreenderem e pagar-lhe-á o preço dos que tiver vendido.

Parágrafo único. Não se conhecendo o número de exemplares que constituem a edição fraudulenta, pagará o transgressor o valor de três mil exemplares, além dos apreendidos.

Art. 104 Quem vender, expuser à venda, ocultar, adquirir, distribuir, tiver em depósito ou utilizar obra ou fonograma reproduzidos com fraude, com a finalidade de vender, obter ganho, vantagem, proveito, lucro direto ou indireto, para si ou para outrem, será solidariamente responsável com o contrafator, nos termos dos artigos precedentes, respondendo como contrafatores o importador e o distribuidor em caso de reprodução no exterior.

H. MOYSÉS NUSSENZVEIG

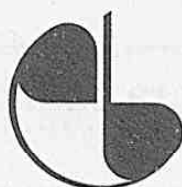
Professor Emérito do Instituto de Física da
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Curso de

FÍSICA BÁSICA 2

FLUIDOS OSCILAÇÕES E ONDAS CALOR

4ª edição, revista



EDITORA BUCHER
www.blucher.com.br

Conteúdo

CAPÍTULO 1 — ESTÁTICA DOS FLUIDOS

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Propriedades dos fluidos | 1 |
| 1.2. | Pressão num fluido | 2 |
| 1.3. | Equilíbrio num campo de forças | 5 |
| 1.4. | Fluido incompressível no campo gravitacional | 6 |
| 1.5. | Aplicações | 8 |
| | (a) Princípio de Pascal | 8 |
| | (b) Vasos comunicantes | 8 |
| | (c) Pressão atmosférica. Manômetros | 9 |
| 1.6. | Princípio de Arquimedes | 10 |
| | Equilíbrio dos corpos flutuantes | 11 |
| 1.7. | Variação da pressão atmosférica com a altitude | 12 |
| | Problemas do Capítulo 1 | 13 |

CAPÍTULO 2 — NOÇÕES DE HIDRODINÂMICA

| | | |
|------|--|----|
| 2.1. | Métodos de descrição e regimes de escoamento | 17 |
| 2.2. | Conservação da massa. Equação de continuidade | 18 |
| 2.3. | Forças num fluido em movimento | 20 |
| 2.4. | Equação de Bernoulli | 22 |
| 2.5. | Aplicações | 24 |
| | (a) Fórmula de Torricelli | 24 |
| | (b) Tubo de Pitot | 24 |
| | (c) Fenômeno de Venturi | 25 |
| 2.6. | Circulação. Aplicações | 26 |
| | (a) Circulação | 26 |
| | (b) Escoamentos rotacionais e irrotacionais | 28 |
| | (c) Efeito Magnus | 29 |
| | (d) Conservação da circulação. Vórtices | 31 |
| | (e) Crítica da hidrodinâmica clássica | 31 |
| 2.7. | Viscosidade | 32 |
| | (a) Definição da viscosidade | 32 |
| | (b) Lei de Hagen-Poiseuille | 33 |
| | (c) Discussão qualitativa dos efeitos da viscosidade | 34 |
| | Problemas do Capítulo 2 | 36 |

CAPÍTULO 3 — O OSCILADOR HARMÔNICO

| | | |
|------|---|----|
| 3.1. | Introdução | 39 |
| 3.2. | Oscilações harmônicas | 40 |
| | (a) Soluções | 40 |
| | (b) Linearidade e princípio de superposição | 43 |
| | (c) Interpretação física dos parâmetros | 44 |
| | (d) Ajuste das condições iniciais | 44 |
| | (e) Energia do oscilador | 45 |
| 3.3. | Exemplos e aplicações | 47 |
| | (a) O pêndulo de torção | 47 |
| | (b) O pêndulo simples | 47 |
| | (c) O pêndulo físico | 51 |
| | (d) Oscilações de um líquido num tubo em U | 52 |
| | (e) Oscilações de duas partículas | 53 |
| 3.4. | Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme | 56 |
| | Notação complexa | 56 |
| | Números complexos | 57 |
| | A fórmula de Euler | 58 |
| | Aplicação ao oscilador harmônico | 60 |
| 3.5. | Superposição de movimentos harmônicos simples | 62 |
| | (a) Mesma direção e frequência | 62 |
| | (b) Mesma direção e frequências diferentes. Batimentos | 63 |
| | (c) Mesma frequência e direções perpendiculares | 64 |
| | (d) Frequências diferentes e direções perpendiculares | 66 |
| | Problemas do Capítulo 3 | 67 |

CAPÍTULO 4 — OSCILAÇÕES AMORTECIDAS E FORÇADAS

| | | |
|------|--|----|
| 4.1. | Oscilações amortecidas | 71 |
| 4.2. | Discussão dos resultados | 73 |
| | (a) Amortecimento subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$) | 73 |
| | (b) Amortecimento supercrítico ($\gamma/2 > \omega_0$) | 75 |
| | (c) Amortecimento crítico ($\gamma/2 = \omega_0$) | 76 |
| 4.3. | Oscilações forçadas. Ressonância | 77 |
| | (a) Solução estacionária | 77 |
| | (b) Interpretação física | 79 |
| | (c) Efeito das condições iniciais | 80 |
| 4.4. | Oscilações forçadas amortecidas | 81 |
| | (a) Solução estacionária | 82 |
| | (b) Efeitos de ressonância | 82 |
| 4.5. | O balanço de energia | 85 |
| | Regime estacionário | 86 |
| 4.6. | Oscilações acopladas | 88 |
| | Interpretação física | 90 |
| | Ajuste das condições iniciais | 90 |
| | Outros exemplos de osciladores acoplados | 92 |
| | Oscilações transversais | 92 |
| | Problemas do Capítulo 4 | 94 |

CAPÍTULO 5 — ONDAS

| | |
|--|-----|
| 5.1. O conceito de onda | 98 |
| 5.2. Ondas em uma dimensão | 99 |
| (a) Ondas progressivas | 99 |
| (b) Ondas harmônicas | 100 |
| (c) A equação de ondas unidimensional | 102 |
| 5.3. A equação das cordas vibrantes | 103 |
| (a) Equação de movimento | 103 |
| (b) Solução geral | 105 |
| (c) O princípio de superposição | 106 |
| 5.4. Intensidade de uma onda | 107 |
| 5.5. Interferência de ondas | 109 |
| (a) Ondas no mesmo sentido | 109 |
| (b) Sentidos opostos; ondas estacionárias | 110 |
| (c) Batimentos; velocidade de grupo | 111 |
| 5.6. Reflexão de ondas | 112 |
| 5.7. Modos normais de vibração | 114 |
| 5.8. Movimento geral da corda e análise de Fourier | 117 |
| Problemas do Capítulo 5 | 120 |

CAPÍTULO 6 — SOM

| | |
|---|-----|
| 6.1. Natureza do som | 122 |
| 6.2. Ondas sonoras | 123 |
| (a) Relação densidade — pressão | 123 |
| (b) Relação deslocamento — densidade | 125 |
| (c) Relação pressão — deslocamento | 126 |
| (d) A velocidade do som | 127 |
| Velocidade do som em gases | 128 |
| Velocidade do som na água | 129 |
| 6.3. Ondas sonoras harmônicas. Intensidade | 129 |
| Intensidade | 130 |
| 6.4. Sons musicais. Altura e timbre. Fontes sonoras | 132 |
| Altura | 132 |
| Notas e escalas musicais | 132 |
| Timbre | 134 |
| Fontes sonoras | 135 |
| Colunas de ar | 135 |
| Membranas e placas vibrantes | 137 |
| Ultrassons | 137 |
| 6.5. Ondas em mais dimensões | 138 |
| Ondas esféricas | 139 |
| Ondas bidimensionais | 140 |
| 6.6. O princípio de Huygens | 140 |
| 6.7. Reflexão e refração | 143 |

| | |
|--|-----|
| 6.8. Interferência em mais dimensões | 145 |
| 6.9. Efeito Doppler. Cone de Mach | 147 |
| (a) Efeito Doppler | 147 |
| Fonte em repouso | 148 |
| Fonte em movimento | 148 |
| Fonte e observador em movimento | 149 |
| Movimento numa direção qualquer | 149 |
| (b) Cone de Mach | 150 |
| Problemas do Capítulo 6 | 151 |

CAPÍTULO 7 — TEMPERATURA

| | |
|---|-----|
| 7.1. Introdução | 156 |
| 7.2. Equilíbrio térmico e a lei zero da termodinâmica | 157 |
| 7.3. Temperatura | 159 |
| Termômetros | 159 |
| 7.4. O termômetro de gás a volume constante | 160 |
| 7.5. Dilatação térmica | 163 |
| Problemas do Capítulo 7 | 164 |

CAPÍTULO 8 — CALOR, PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

| | |
|--|-----|
| 8.1. A natureza do calor | 167 |
| 8.2. Quantidade de calor | 169 |
| Capacidade térmica | 170 |
| Capacidade térmica molar | 170 |
| Reservatório térmico | 171 |
| 8.3. Condução de calor | 171 |
| 8.4. O equivalente mecânico da caloria | 173 |
| 8.5. A primeira lei da termodinâmica | 174 |
| Calor | 176 |
| 8.6. Processos reversíveis | 178 |
| Representação gráfica | 179 |
| Calor num processo reversível | 181 |
| 8.7. Exemplos de processos | 182 |
| (a) Ciclo | 182 |
| (b) Processo isobárico | 182 |
| (c) Processo adiabático | 183 |
| Problemas do Capítulo 8 | 184 |

CAPÍTULO 9 — PROPRIEDADES DOS GASES

| | |
|---|-----|
| 9.1. Equação de estado dos gases ideais | 188 |
| (a) A lei de Boyle | 188 |
| (b) A lei de Charles | 189 |
| (c) A lei dos gases perfeitos | 190 |
| (d) Trabalho na expansão isotérmica de um gás ideal | 191 |

| | |
|---|-----|
| 9.2. Energia interna de um gás ideal | 192 |
| (a) A experiência de Joule | 192 |
| (b) A experiência de Joule-Thomson | 194 |
| (c) Entalpia | 195 |
| 9.3. Capacidades térmicas molares de um gás ideal | 196 |
| Energia interna de um gás ideal | 197 |
| 9.4. Processos adiabáticos num gás ideal | 198 |
| Trabalho numa expansão adiabática | 200 |
| Aplicação à velocidade do som | 201 |
| Problemas do Capítulo 9 | 202 |

CAPÍTULO 10 — A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

| | |
|---|-----|
| 10.1. Introdução | 205 |
| 10.2. Enunciados de Clausius e Kelvin da segunda lei | 206 |
| Conseqüências imediatas do enunciado de Kelvin | 207 |
| 10.3. Motor térmico. Refrigerador. Equivalência dos dois enunciados | 208 |
| (a) Motor térmico | 208 |
| (b) Refrigerador | 209 |
| (c) Equivalência entre os enunciados (K) e (C) | 210 |
| 10.4. O ciclo de Carnot | 211 |
| Teorema de Carnot | 213 |
| 10.5. A escala termodinâmica de temperatura | 214 |
| Zero absoluto | 218 |
| 10.6. O teorema de Clausius | 218 |
| 10.7. Entropia. Processos reversíveis | 221 |
| Casos particulares | 223 |
| 10.8. Variação de entropia em processos irreversíveis | 226 |
| 10.9. O princípio do aumento da entropia | 229 |
| Problemas do Capítulo 10 | 232 |

CAPÍTULO 11 — TEORIA CINÉTICA DOS GASES

| | |
|---|-----|
| 11.1. A teoria atômica da matéria | 237 |
| (a) A hipótese atômica na antiguidade | 237 |
| (b) O conceito de elementos | 238 |
| (c) A lei das proporções definidas e a lei das proporções múltiplas | 238 |
| (d) A lei das combinações volumétricas | 239 |
| (e) A hipótese de Avogadro | 239 |
| (f) Massa atômica e molecular; mol | 240 |
| 11.2. A teoria cinética dos gases | 241 |
| Hipóteses básicas | 241 |
| 11.3. Teoria cinética da pressão | 242 |
| Lei de Dalton | 244 |
| Velocidade quadrática média | 245 |
| 11.4. A lei dos gases perfeitos | 246 |

| | |
|---|-----|
| (a) A equipartição da energia de translação | 246 |
| (b) Conseqüências | 247 |
| (c) Temperatura e energia cinética média | 248 |
| 11.5. Calores específicos e equipartição da energia | 251 |
| 11.6. Livre percurso médio | 256 |
| 11.7. Gases reais. A equação de Van der Waals | 259 |
| (a) Efeito do tamanho finito das moléculas | 260 |
| (b) Efeito da interação atrativa | 261 |
| (c) Isotermas de Van der Waals | 262 |
| (d) Discussão | 263 |
| Problemas do Capítulo 11 | 266 |

CAPÍTULO 12 — NOÇÕES DE MECÂNICA ESTATÍSTICA

| | |
|---|-----|
| 12.1. Introdução | 268 |
| 12.2. A distribuição de Maxwell | 269 |
| (a) O método de Boltzmann | 269 |
| (b) A distribuição da componente v_z | 270 |
| (c) Discussão | 273 |
| (d) A distribuição de Maxwell | 274 |
| (e) Velocidades características | 275 |
| (f) Distribuição de Boltzmann | 277 |
| 12.3. Verificação experimental da distribuição de Maxwell | 278 |
| 12.4. Movimento browniano | 279 |
| Passeio ao acaso unidimensional | 280 |
| A relação de Einstein | 282 |
| 12.5. Interpretação estatística da entropia | 285 |
| (a) Macroestados e microestados | 285 |
| (b) Entropia e probabilidade | 289 |
| 12.6. A seta do tempo | 290 |
| (a) A seta do tempo termodinâmica | 290 |
| (b) A seta do tempo cosmológica | 292 |
| Problemas do Capítulo 12 | 294 |

| | |
|---|-----|
| RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS | 295 |
|---|-----|

| | |
|--------------------|-----|
| BIBLIOGRAFIA | 306 |
|--------------------|-----|

| | |
|-------------------------|-----|
| ÍNDICE ALFABÉTICO | 308 |
|-------------------------|-----|

Capítulo 1

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

1.1 — Propriedades dos fluidos

Na parte anterior deste curso, discutimos propriedades dos *corpos rígidos*, que representam uma idealização de corpos sólidos. Neste capítulo e no próximo, vamos discutir a mecânica dos *fluidos*, que compreendem tanto líquidos como gases.

Um corpo sólido tem geralmente volume e forma bem definidos, que só se alteram (usualmente pouco) em resposta a forças externas. Um líquido tem volume bem definido, mas não a forma: mantendo seu volume, amolda-se ao recipiente que o contém. Um gás não tem nem forma nem volume bem definidos, expandindo-se até ocupar todo o volume do recipiente que o contém. Líquidos e gases têm em comum, graças à facilidade de deformação, a propriedade de poderem se escoar ou *fluir* facilmente, donde o nome de fluidos.

Para uma definição mais precisa, é necessário classificar os diferentes tipos de forças que atuam num meio material. Se considerarmos um elemento de superfície situado no meio (externo ou interno), as forças que atuam sobre esse elemento são geralmente proporcionais a sua área. A força por unidade de área chama-se *tensão*, e é preciso distinguir entre tensões normais e tangenciais às superfícies sobre as quais atuam.

Os diferentes tipos de tensões normais e tangenciais estão ilustrados na Fig. 1.1. Em (a), o bloco B, suspenso por um fio do teto, exerce sobre um elemento de superfície do teto uma tensão T *normal* de *tração*. Em (b), o bloco, apoiado no chão, exerce sobre um elemento de superfície do mesmo uma tensão T' também *normal*, de *compressão*, ou, simplesmente, uma *pressão*. Em (c) o bloco está colado entre duas paredes. Em elementos da superfície de contato do bloco com a cola, ele exerce sobre a mesma tensões *tangenciais* T_1 , T_2 , também chamadas de tensões de *cisalhamento*. Estas tensões tenderiam a produzir um deslizamento de camadas adjacentes da cola umas sobre outras. As reações iguais e contrárias a esse deslizamento, opostas pela cola solidificada, equilibram o peso do bloco, sustentando-o entre as paredes.

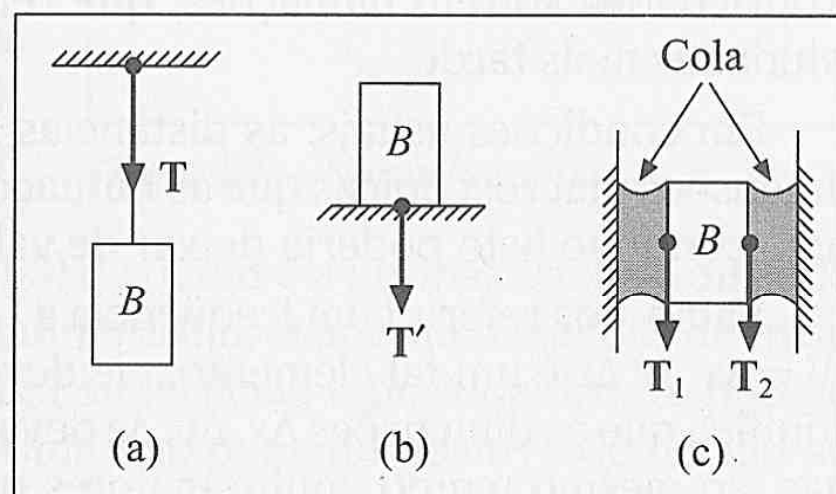


Figura 1.1 — Tensões normais e tangenciais

A diferença fundamental entre sólidos e fluidos está na forma de responder às tensões tangenciais. Um sólido submetido a uma força externa tangencial a sua superfície *deforma-se* até que sejam produzidas tensões tangenciais internas que equilibrem a força externa; depois, *permanece em equilíbrio*, ou seja, em repouso. Se a força externa não for excessivamente

grande, a deformação é *elástica*, ou seja, o sólido volta à situação inicial quando é retirada a força externa. As deformações elásticas, tipicamente, são muito pequenas em confronto com as dimensões do corpo sólido.

Um fluido, ao contrário de um sólido, não pode equilibrar uma força tangencial, por menor que ela seja. Quando submetido a uma força tangencial, o fluido se escoa, e *permanece em movimento enquanto a força estiver sendo aplicada*. No exemplo (c) da Fig. 1.1, enquanto a cola ainda está fluida, ela escorre ao longo das paredes sob a ação do peso; é só quando se solidifica que pode equilibrar as forças tangenciais exercidas pelo bloco.

Uma força arbitrariamente pequena pode produzir num fluido uma deformação arbitrariamente grande, desde que atue durante um tempo suficiente. Um fluido real opõe resistência ao deslizamento relativo de camadas adjacentes: esta resistência mede a *viscosidade* do fluido, e depende da taxa de variação espacial da velocidade relativa de deslizamento. Assim, enquanto num sólido a resistência a esforços tangenciais depende da deformação, num fluido ela depende da *velocidade* de deformação, e é por isto que forças pequenas atuando durante tempos grandes podem produzir grandes deformações.

Por conseguinte, *num fluido em equilíbrio* (velocidade nula), *não pode haver tensões tangenciais*.

Existe toda uma gama de substâncias com propriedades intermediárias entre sólidos e fluidos, dependendo da natureza e da magnitude das forças, bem como da escala de tempo em que o escoamento sob a ação de esforços tangenciais se torna visível: massa de pão, gelatina, piche, etc. O piche se fratura como um sólido sob a ação de um impacto brusco, mas também se escoa como um fluido, embora com extrema lentidão.

No presente capítulo vamos tratar de propriedades dos fluidos em equilíbrio, ou seja, da *estática* dos fluidos.

1.2 — Pressão num fluido

Na escala macroscópica, um fluido se comporta como um *meio contínuo*, ou seja, suas propriedades variam com continuidade num entorno de cada ponto do fluido. Isto deixaria de valer na escala microscópica: em dimensões correspondentes às distâncias interatômicas, as propriedades sofrem *flutuações*, que refletem a estrutura atômica da matéria e que serão estudadas mais tarde.

Em condições usuais, as distâncias interatômicas são tão pequenas em confronto com dimensões macroscópicas que as flutuações se tornam imperceptíveis, levando ao modelo do meio contínuo (isto poderia deixar de valer para um gás extremamente rarefeito).

Vamo-nos referir com frequência a "elementos de volume infinitésimos" de um fluido. Se $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ é um tal elemento, ele deve ser entendido como um "infinitésimo físico". Isto significa que as dimensões $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ devem ser muito menores que distâncias macroscópicas, mas, ao mesmo tempo, muito maiores que distâncias interatômicas, para que ΔV contenha um grande número de átomos e as flutuações sejam desprezíveis. Como as distâncias interatômicas típicas são da ordem de 10^{-8} cm, é fácil satisfazer simultaneamente a ambas as condições. Assim, por exemplo, para o ar, em condições normais de temperatura e pressão, um cubo de 10^{-3} cm de aresta contém ainda da ordem de 3×10^{10} moléculas, e o número é ainda maior para um líquido, como a água. Considerações análogas se aplicam a um "elemento de superfície infinitésimo" $\Delta S = \Delta x \Delta y$.

Assim, podemos definir a *densidade* ρ num ponto P do fluido por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right) = \frac{dm}{dV} \quad (1.2.1)$$

onde Δm é a massa de um volume ΔV do fluido em torno do ponto P. O limite " $\Delta V \rightarrow 0$ " nesta expressão deve ser interpretado como significando que ΔV é um infinitésimo físico. A densidade assim definida terá então variação contínua na escala macroscópica. A unidade SI de densidade é o kg/m^3 .

Um fluido está em equilíbrio quando cada porção do fluido está em equilíbrio. Para isto, é necessário que a *resultante das forças que atuam sobre cada porção do fluido se anule*.

Podemos classificar as forças atuantes sobre uma porção de um meio contínuo em *forças volumétricas* e *forças superficiais*. As forças volumétricas são forças de longo alcance, como a gravidade, que atuam em todos os pontos do meio, de tal forma que a força resultante sobre um elemento de volume é proporcional ao volume. Assim, no caso da gravidade, a força sobre um elemento de volume ΔV em torno de um ponto do meio onde a densidade é ρ é

$$\Delta F = \Delta m g = \rho g \Delta V \quad (1.2.2)$$

onde g é a aceleração da gravidade. Outros exemplos de forças volumétricas seriam forças elétricas sobre um fluido carregado ou forças centrífugas sobre um fluido em rotação, num referencial não inercial, que acompanha a rotação do fluido (Seção 1.4).

As *forças superficiais* são forças de interação entre uma dada porção do meio, limitada por uma superfície S , e porções adjacentes; são forças interatômicas, de curto alcance, transmitidas através da superfície S . A reação de contato entre dois corpos sólidos, estudada no curso anterior, é um exemplo de força superficial. Num recipiente contendo um líquido, a força com que a porção do líquido situada acima de uma dada secção horizontal atua sobre a porção situada abaixo (Fig. 1.2) é uma força superficial, aplicada na superfície de separação.

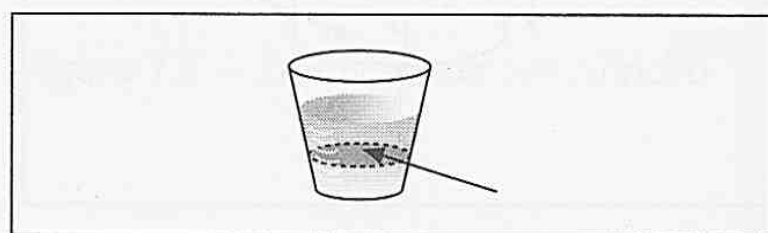


Figura 1.2 — Forças superficiais atuam na interface (seta) entre porções adjacentes

A força superficial sobre um elemento de superfície ΔS é *proporcional* à área ΔS , e a força por unidade de área corresponde à *tensão* (Seção 1.1). Em geral ela pode depender da inclinação do elemento de superfície: no exemplo acima, poderíamos tomar uma secção vertical ou oblíqua, em lugar de horizontal. Podemos especificar a inclinação dando o vetor unitário \hat{n} da normal a ΔS , convencionando uma orientação para \hat{n} . Vamos adotar a convenção (Fig. 1.3) de que \hat{n} é a *normal externa*, dirigida para fora da porção do meio que estamos considerando. Assim, \hat{n} aponta para fora do meio sobre a superfície do qual está sendo exercida a força superficial, e para dentro da porção contígua do meio, que está exercendo essa força. Uma componente positiva de tensão ao longo de \hat{n} representa um esforço de *tração*, uma componente negativa, uma *pressão* (Seção 1.1).

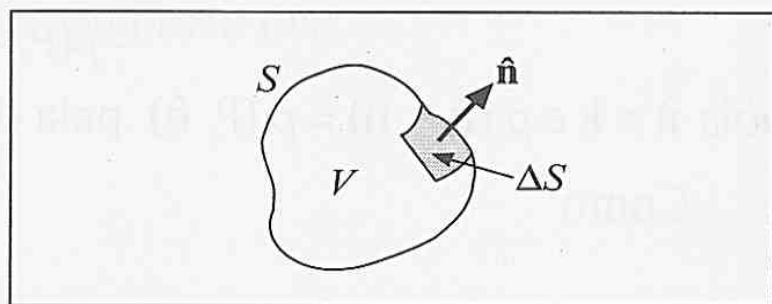


Figura 1.3 — Normal externa

Consideremos agora o caso de um fluido em equilíbrio. Neste caso, como vimos na Seção 1.1, não pode haver tensões tangenciais: a *força superficial sobre um elemento de superfície dS corresponde a uma pressão p* :

$$dF = -p \hat{n} dS \quad (1.2.3)$$

onde

$$p = \left| \frac{dF}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta F}{\Delta S} \right| \quad (1.2.4)$$

é sempre positiva, e o sinal (-) na (1.2.3) indica tratar-se de uma pressão. Note que a pressão é uma grandeza escalar.

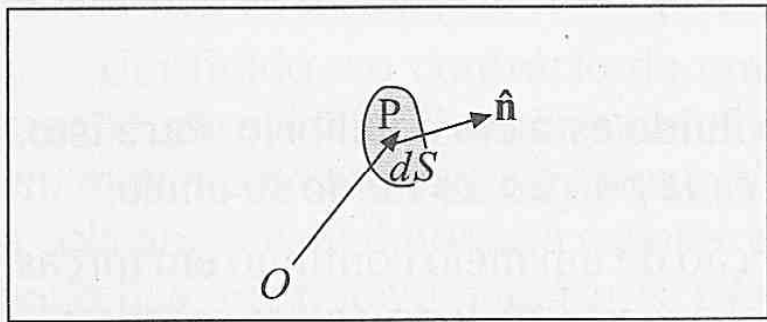


Figura 1.4 — Elemento dS e normal \hat{n}

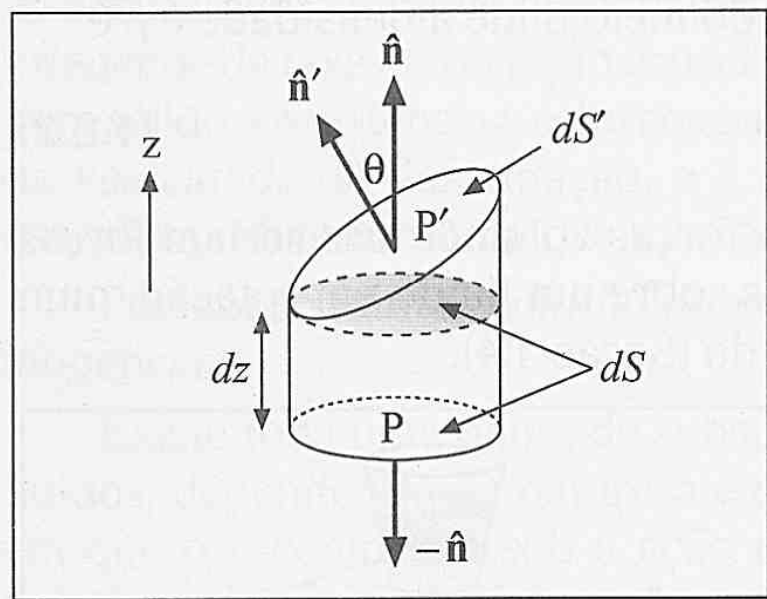


Figura 1.5 — Equilíbrio de um cilindro de fluido

A pressão p num ponto P do fluido sobre um elemento de superfície dS poderia depender, como vimos, não só de P mas também da orientação (Fig. 1.4) da normal \hat{n} ao elemento dS : $p = p(P, \hat{n})$. Vamos ver agora que, num ponto qualquer de um fluido em equilíbrio, p não depende de \hat{n} : a pressão num ponto de um fluido em equilíbrio é a mesma em todas as direções.

Para demonstrar este resultado, consideremos o equilíbrio de um cilindro infinitesimal do fluido de bases dS e dS' com normais \hat{n} e \hat{n}' respectivamente, e geratriz dz , onde tomamos o eixo z paralelo a \hat{n} (Fig. 1.5).

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças (volumétricas e superficiais) sobre o cilindro se anule. Vamos escrever as contribuições para a componente z da resultante.

As pressões sobre a superfície lateral do cilindro são normais ao eixo z , de modo que não contribuem. Pela (1.2.3), a força na base superior contribui com (\mathbf{k} = versor de Oz)

$$-p(P', \hat{n}')dS'\hat{n}' \cdot \mathbf{k} = -p(P', \hat{n}')dS' \cos \theta$$

onde P' é o centro da base superior (Fig. 1.5). A força na base inferior contribui com

$$-p(P, -\hat{n})dS(-\hat{n} \cdot \mathbf{k}) = p(P, \hat{n})dS$$

pois $\hat{n} \equiv \mathbf{k}$ e $p(P, -\hat{n}) = p(P, \hat{n})$ pela definição de p e pelo princípio de ação e reação.

Como

$$dS' \cos \theta = dS \quad (1.2.5)$$

a contribuição total das forças superficiais é

$$[-p(P', \hat{n}') + p(P, \hat{n})]dS \quad (1.2.6)$$

A contribuição das forças volumétricas pode ser desprezada, porque é proporcional a $dS dz$, que é infinitésimo de ordem superior. Analogamente, podemos tomar, na (1.2.6),

$$p(P', \hat{n}') \approx p(P, \hat{n}') \quad (1.2.7)$$

porque a diferença entre as pressões em P e P' é infinitésima. Logo, a condição de equilíbrio dá

$$[-p(P, \hat{n}') + p(P, \hat{n})]dS = 0$$

ou seja

$$p(P, \hat{n}') = p(P, \hat{n}) \quad (1.2.8)$$

quaisquer que sejam \hat{n}' e \hat{n} , como queríamos demonstrar: a pressão no interior do fluido só depende da posição P : $p = p(P)$.

A unidade SI de pressão é $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa}$. Também são utilizados o bar = $10^5 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 = 10^3$ milibars, a atmosfera = $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, e o milímetro de mercúrio = $1 \text{ mm - Hg} = 1,316 \times 10^{-3} \text{ atm}$.

1.3 — Equilíbrio num campo de forças

Consideremos um fluido em equilíbrio num campo de forças. Seja

$$\Delta F = f \Delta V \quad (1.3.1)$$

a força volumétrica que atua sobre um volume ΔV do fluido. A densidade de força f (força por unidade de volume), pela (1.2.2), seria

$$f = \rho g \quad (1.3.2)$$

no caso do campo gravitacional.

Para obter o efeito das forças volumétricas sobre o equilíbrio de um elemento de volume cilíndrico do tipo ilustrado na Fig. 1.6, é preciso, conforme vimos na Seção anterior, incluir no cálculo infinitésimos da ordem de $dS \, dz$. Com efeito, a força volumétrica na direção z que atua sobre o cilindro é, pelas (1.3.1) e (1.3.2),

$$f_z dS \, dz \quad (1.3.3)$$

As coordenadas dos pontos P e P' na Fig. 1.6 são, respectivamente, (x, y, z) e $(x, y, z + dz)$. Logo, pela (1.2.6), a contribuição das forças superficiais é

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (1.3.4)$$

e não podemos mais empregar a aproximação (1.2.7). Temos agora, a menos de infinitésimos de ordem superior,

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z)dz$$

de modo que, somando as (1.3.3) e (1.3.4), a condição de equilíbrio fica

$$\left(f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) dS \, dz = 0$$

o que dá

$$f_z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.3.5)$$

ou seja, a componente z da densidade de força volumétrica é igual à taxa de variação da pressão com z .

Da mesma forma que tomamos \hat{n} paralelo ao eixo z , poderíamos ter escolhido um cilindro com \hat{n} paralelo aos eixos x ou y , levando a resultados análogos para as componentes f_x e f_y . Portanto,

$$\boxed{f_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial p}{\partial z}} \quad (1.3.6)$$

que são as equações básicas da estática dos fluidos. Lembrando a definição do gradiente de uma função escalar (1*, Sec. 7.4), podemos escrever as (1.3.6) como

$$\boxed{f = \text{grad } p} \quad (1.3.7)$$

ou seja, a densidade de força volumétrica é igual ao gradiente da pressão.

* A referência a 1 indica sempre o vol. 1 deste Curso.

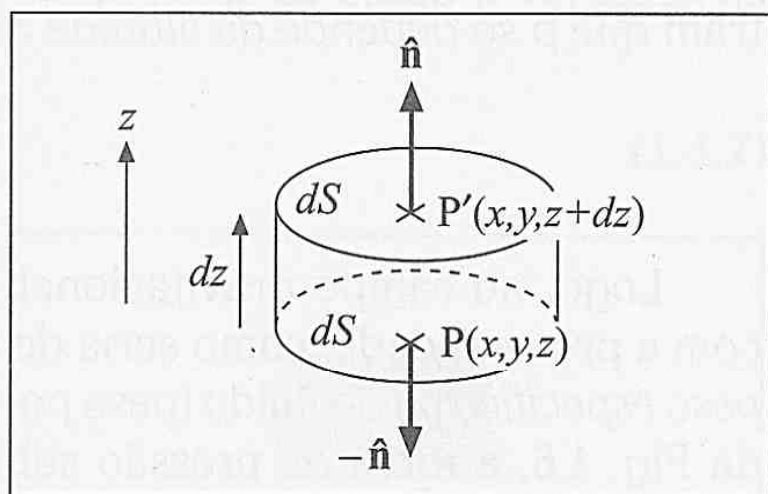


Figura 1.6 — Equilíbrio de um cilindro

Pelas propriedades gerais do gradiente, o vetor $\text{grad } p$ é normal às *superfícies isobáricas*, definidas como superfícies sobre as quais a pressão é constante, e aponta no sentido em que p cresce mais rapidamente. Pela (1.3.7), estes são o sentido e a direção da força volumétrica no ponto correspondente do fluido.

Uma força volumétrica que sempre atua sobre o fluido é a força gravitacional, cuja densidade, pela (1.3.2), é

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{k} \quad (1.3.8)$$

tomando o eixo z orientado verticalmente para cima. Neste caso, $f_x = f_y = 0$, e as (1.3.6) mostram que p só depende da altitude z , $p = p(z)$, e

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \quad (1.3.9)$$

Logo, no campo gravitacional, a pressão num fluido decresce com a altitude e cresce com a profundidade, como seria de esperar. A sua taxa de variação com a altitude é igual ao peso específico ρg do fluido (peso por unidade de volume). Para o elemento de volume cilíndrico da Fig. 1.6, a força de pressão sobre a base inferior excede aquela exercida sobre a base superior pelo peso do fluido contido no cilindro, o que leva à (1.3.9).

1.4 — Fluido incompressível no campo gravitacional

A densidade de um líquido varia geralmente muito pouco, mesmo quando submetido a pressões consideráveis. Por exemplo: a densidade da água só aumenta de $\sim 0,5\%$ quando a pressão varia de 1 atm a 100 atm, à temperatura ambiente. Podemos portanto, com muito boa aproximação, tratar um líquido, na estática dos fluidos, como um *fluido incompressível*, definido por: $\rho = \text{constante}$.

Em muitos casos, a força volumétrica \mathbf{F} é *conservativa*. Conforme foi visto em 1, Seção 7.4, isto implica que

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (1.4.1)$$

onde U é a energia potencial no campo de forças \mathbf{F} . Se u é a *densidade de energia potencial correspondente* (energia potencial por unidade de volume), temos então, pelas (1.3.1) e (1.3.7),

$$\mathbf{f} = -\text{grad } u = \text{grad } p \quad (1.4.2)$$

Como as derivadas parciais de $(-u)$ e p em relação a x , y e z (componentes do gradiente) têm de ser iguais, essas duas funções da posição só podem diferir por uma constante:

$$p = -u + \text{constante} \quad (1.4.3)$$

Em particular, as *superfícies isobáricas* são também *superfícies equipotenciais*.

A superfície livre de um líquido, em contato com a atmosfera, é uma superfície isobárica, pois todos os seus pontos estão submetidos à pressão atmosférica. Logo, a *superfície livre de um líquido em equilíbrio no campo gravitacional é uma superfície equipotencial desse campo*. Assim, a superfície livre dos oceanos é uma superfície esférica, com centro no centro da Terra. Se nos limitarmos à escala de laboratório, na vizinhança da superfície da Terra, a energia potencial de uma massa m é $m g z$ (z = altitude), de forma que a densidade de energia potencial de um fluido de densidade ρ é

$$u = \rho g z \quad (1.4.4)$$

e a superfície livre de um líquido em equilíbrio é uma superfície *horizontal* ($z = \text{constante}$). A (1.4.3) fica, neste caso,

$$p(z) = -\rho g z + \text{constante} \quad (1.4.5)$$

o que também decorre diretamente da (1.3.9), integrando-a em relação a z . A variação de pressão entre as altitudes z_1 e z_2 é

$$p(z_2) - p(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (1.4.6)$$

Se z_1 corresponde à superfície livre do líquido, em contato com a atmosfera,

$$p(z_1) = p_0 = \text{pressão atmosférica}$$

e $z_1 - z_2 = h$ é a *profundidade* abaixo da superfície livre. A (1.4.6) dá então a variação da pressão com a profundidade:

$$p = p_0 + \rho g h \quad (1.4.7)$$

que é a *lei de Stevin*: a pressão no interior do fluido aumenta linearmente com a profundidade (Fig. 1.7).

Líquido em rotação: Consideremos um recipiente contendo líquido, em rotação uniforme com velocidade angular ω em relação ao eixo vertical z (Fig. 1.8). Como foi mencionado quando discutimos a "experiência do balde girante" de Newton (1, Seção 13.7), após algum tempo, o líquido gira rigidamente junto com o recipiente. Nestas condições, num referencial não inercial S' que gira com o recipiente, o líquido está em equilíbrio.

Em S' , além da força da gravidade, de densidade de energia potencial (1.4.4), atuam sobre o fluido as forças centrífugas, dadas por (1, Seção 13.3)

$$\Delta F_c = \Delta m \cdot \omega^2 r \hat{r} \quad (1.4.8)$$

para uma massa $\Delta m = \rho \Delta V$ do fluido situada à distância r do eixo (Fig. 1.8); o vetor \hat{r} aponta radialmente para ΔV a partir do eixo. Temos portanto para a densidade de força centrífuga

$$\mathbf{f}_c = \rho \omega^2 r \hat{r} = -\text{grad } u_c = -\frac{du_c}{dr} \hat{r} \quad (1.4.9)$$

onde a densidade de "energia potencial centrífuga" $u_c(r)$ é dada por

$$u_c(r) = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad (1.4.10)$$

que devemos somar à (1.4.4) para obter a densidade total.

Substituindo na (1.4.3), obtemos

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + \text{constante}$$

Tomando a origem O no ponto da superfície livre situado no eixo, vemos, fazendo $r = z = 0$, que a constante é $p = p_0$ (pressão atmosférica). Logo, a distribuição de pressão no líquido é dada por

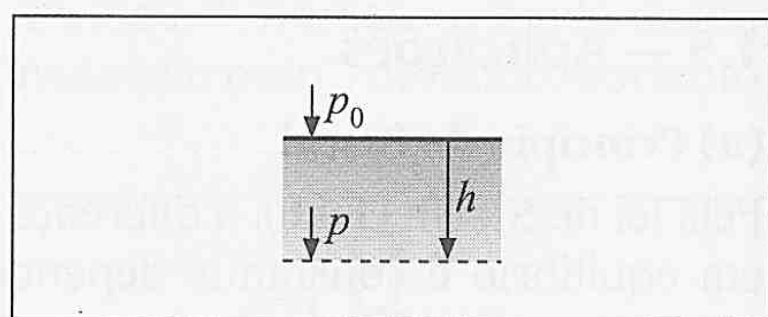


Figura 1.7 — Lei de Stevin

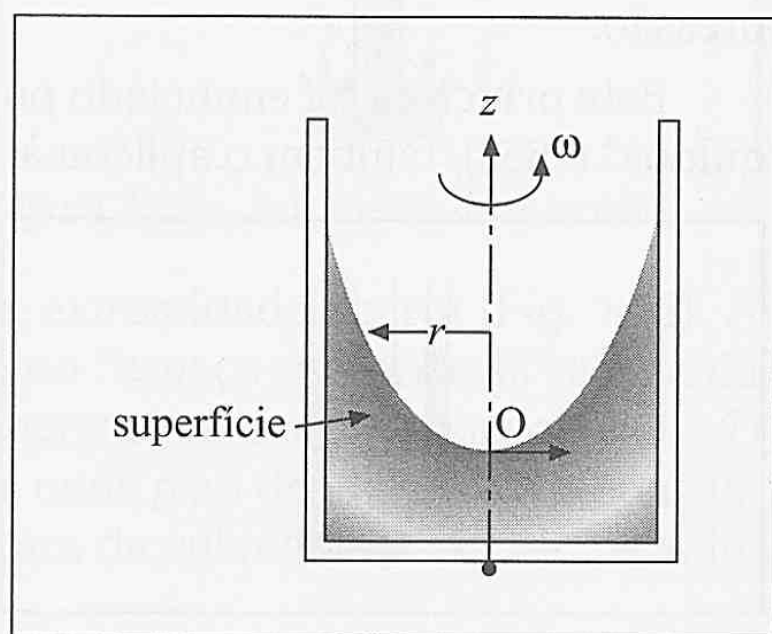


Figura 1.8 — Perfil parabólico

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (1.4.11)$$

A equação da superfície livre ($p = p_0$) é

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (1.4.12)$$

que é um parabolóide de revolução (Fig. 1.8). Esta propriedade já foi utilizada para construir um espelho parabólico de eixo vertical, pela rotação de um recipiente com mercúrio.

A rotação da Terra também modifica a forma da superfície livre dos oceanos: em lugar de uma esfera, tem-se um esferóide oblato.

1.5 — Aplicações

(a) Princípio de Pascal

Pela lei de Stevin (1.4.6), a diferença de pressão entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio é constante, dependendo apenas do desnível entre esses pontos. Logo, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido, ou seja, todos os pontos do líquido sofrem a mesma variação de pressão.

Este princípio foi enunciado por Pascal, que, em seu "Tratado sobre o Equilíbrio dos Líquidos" (1663), também o aplicou à *prensa hidráulica*, dizendo:

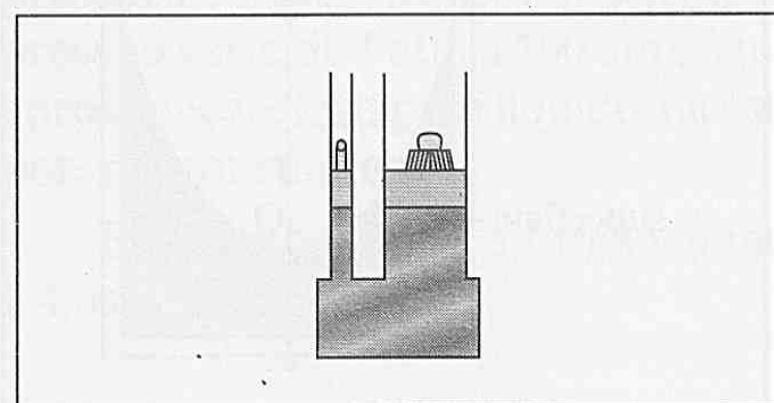


Figura 1.9 — Prensa hidráulica

"Se um recipiente cheio de água (Fig. 1.9), fechado, tem duas aberturas, uma cem vezes maior que a outra: colocando um pistão bem justo em cada uma, um homem empurrando o pistão pequeno igualará a força de cem homens empurrando o pistão com vezes maior... E qualquer que seja a proporção das aberturas, estarão em equilíbrio". Ou seja, se F_1 e F_2 são as magnitudes das forças sobre os pistões de áreas A_1 e A_2 , respectivamente, temos $F_1/A_1 = F_2/A_2$.

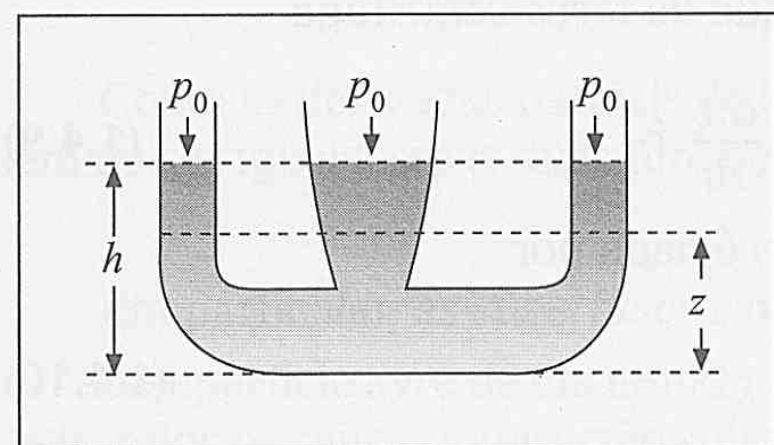


Figura 1.10 — Vasos comunicantes

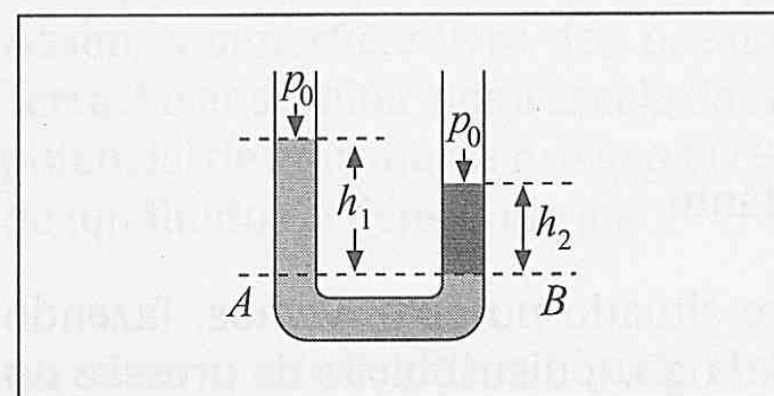


Figura 1.11 — Tubo em U

(b) Vasos comunicantes

Se um recipiente é formado de diversos ramos que se comunicam entre si (Fig. 1.10), continua valendo que a superfície livre de um líquido que ocupa as diferentes partes do recipiente é horizontal, ou seja, o líquido sobe à mesma altura h em todos os ramos (princípio dos vasos comunicantes). Isto também resulta imediatamente da lei de Stevin (1.4.7) e da igualdade da pressão p em qualquer ponto do fundo do recipiente. Note que a pressão no fluido também tem o mesmo valor em quaisquer pontos dos diferentes ramos que estejam à mesma altura z .

Se, em dois ramos de um tubo em U, temos dois líquidos de densidades diferentes, $\rho_1 \neq \rho_2$, que não se misturam, eles subirão a alturas diferentes em relação a um plano AB (Fig. 1.11) que passa todo pelo mesmo

fluido. Se p é a pressão sobre AB , a (1.4.7) dá: $p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$, de modo que $h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1$.

(c) Pressão atmosférica. Manômetros

O princípio da bomba aspirante, o mesmo que produz a sucção de um líquido por uma seringa cujo êmbolo é levantado, era conhecido desde a Antiguidade. Para explicar este e outros efeitos análogos, dizia-se que "a Natureza tem horror ao vácuo": o líquido sobe na bomba quando o pistão sobe para não permitir a formação de um espaço vazio, onde existiria o vácuo.

Na época de Galileu, um construtor projetou, para os jardins do duque de Toscana, uma bomba aspirante muito elevada, mas verificou-se que a água não podia ser aspirada a uma altura superior a 10 m. A explicação foi dada por um estudante de Galileu, Evangelista Torricelli, que foi seu sucessor na Academia de Florença. Torricelli afirmou: "Vivemos no fundo de um oceano de ar, que, conforme mostra a experiência, sem dúvida tem peso", devendo, portanto exercer sobre um corpo uma *pressão atmosférica*.

Se esta pressão era justamente suficiente para elevar uma coluna de água a uma altura de ~ 10 m, Torricelli previu que elevaria uma coluna de mercúrio (13,6 vezes mais denso de que a água) a uma altura de $\sim 10 \text{ m}/13,6 \approx 76 \text{ cm}$. A experiência conhecida hoje como "experiência de Torricelli" foi realizada em 1643 por seu colega Vincenzo Viviani: um tubo de vidro de aproximadamente 1 m de comprimento, fechado numa extremidade e cheio de mercúrio, foi invertido

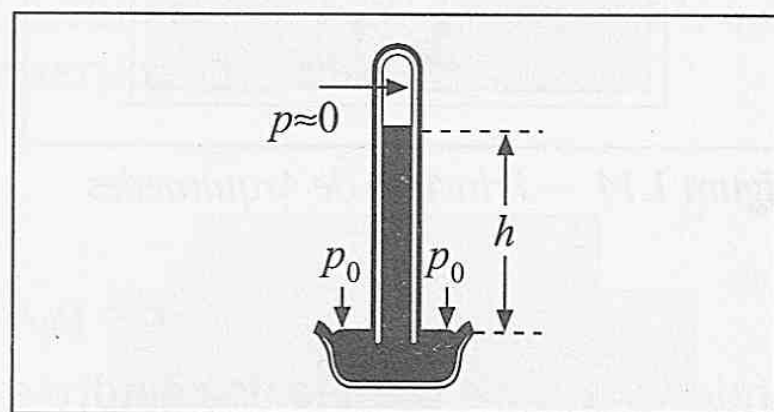


Figura 1.12 — Barômetro de mercúrio

numa cuba de mercúrio, tampando antes com o dedo a extremidade aberta (Fig. 1.12). A coluna de mercúrio baixa até uma altura $\sim 76 \text{ cm}$. Como no "espaço de Torricelli" acima da coluna forma-se um bom vácuo (a pressão de vapor do mercúrio é muito pequena), a (1.4.7) mostra que a pressão atmosférica p_0 é dada por $p_0 = \rho g h$, onde ρ é a densidade do mercúrio. O instrumento constitui um *barômetro de mercúrio*: a altura da coluna de mercúrio permite obter diretamente a pressão atmosférica.

Tomando conhecimento desta experiência, Pascal concluiu que a altura da coluna barométrica devia diminuir no topo de uma montanha, onde a pressão atmosférica deveria ser menor. Pediu a seu cunhado Périer que fizesse a experiência no topo de uma montanha chamada Puy de Dome, e o resultado foi que, para uma diferença de altitude da ordem de 1.000 m, a coluna de mercúrio baixava aproximadamente 8 cm (1648). Em 1654, Otto von Guericke, burgomestre de Magdeburgo, realizou uma demonstração espetacular da pressão atmosférica. Conseguiu produzir um bom vácuo numa esfera de cobre formada juntando dois hemisférios, e duas parejas, de oito cavalos cada, não conseguiram separá-los. Estas experiências tiveram um papel importante, eliminando o preconceito do "horror ao vácuo".

O *manômetro de tubo aberto* (Fig. 1.13) é um tubo em U contendo um líquido, com uma extremidade aberta para a atmosfera e a outra ligada ao recipiente onde se quer medir a pressão p . Pela (1.4.7), a pressão num ponto C do fundo do tubo se escreve, sendo ρ a densidade do líquido,

$$p_C = p + \rho g z = p_0 + \rho g(h + z)$$

o que dá

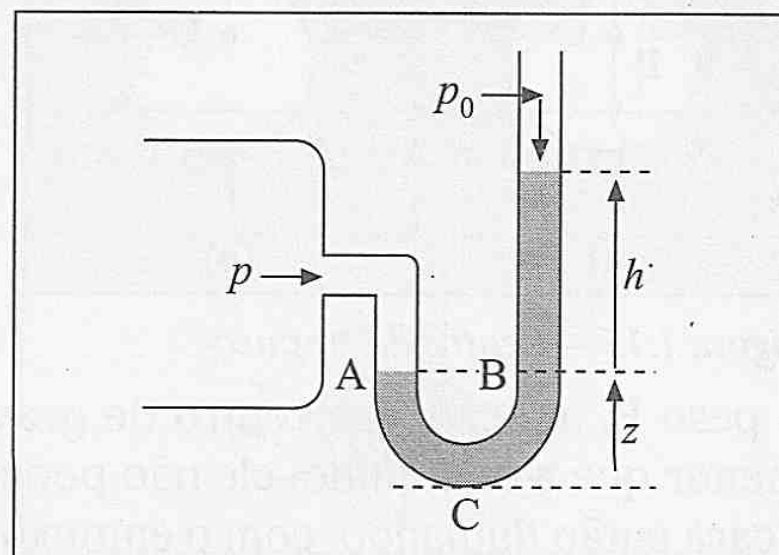


Figura 1.13 — Manômetro de tubo aberto

$$p - p_0 = \rho gh \tag{1.5.1}$$

Este resultado também exprime a igualdade das pressões em pontos A e B do líquido situados à mesma altura z (Fig. 1.13). O instrumento mede a pressão *manométrica* $p - p_0$; conhecendo a pressão atmosférica p_0 , obtém-se a pressão absoluta p .

1.6 — Princípio de Arquimedes

Consideremos um corpo sólido cilíndrico circular de área da base A e altura h totalmente imerso num fluido em equilíbrio, cuja densidade é ρ (Fig. 1.14). Por simetria, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas [pressões (p, p) ou (p', p') na figura]. Entretanto, a pressão p_2 exercida pelo fluido sobre a base inferior é maior do que a pressão p_1 sobre a base superior. Pela (1.4.7),

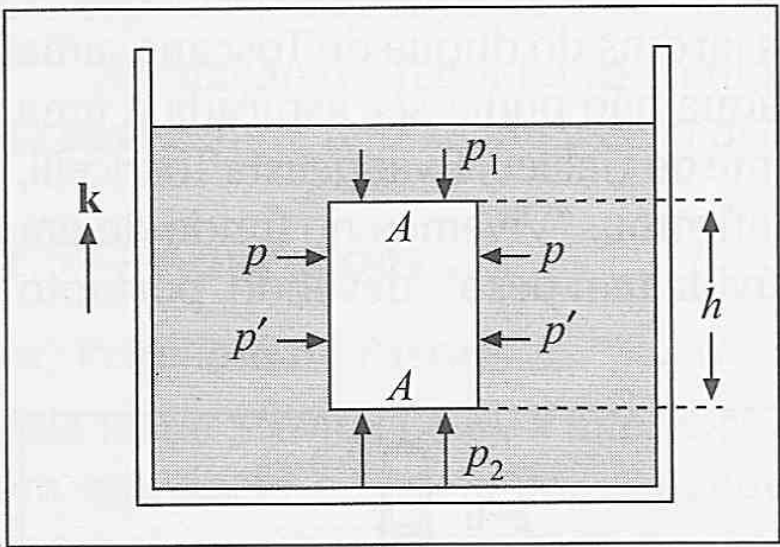


Figura 1.14 — Princípio de Arquimedes

$p_2 - p_1 = \rho g h$

Logo, a resultante das forças superficiais exercidas pelo fluido sobre o cilindro será uma força vertical $E = Ek$ dirigida para cima, com

$$E = p_2A - p_1A = \rho ghA = \rho Vg = mg \tag{1.6.1}$$

onde $V = hA$ é o volume do cilindro e $m = \rho V$ é a massa de fluido deslocada pelo cilindro. Por conseguinte, a força E , que se chama *empuxo*, é dada por

$$E = mgk = -P_f \tag{1.6.2}$$

onde P_f é o peso da porção de fluido deslocada.

Chega-se ao mesmo resultado aplicando o *princípio de solidificação*, enunciado por Stevin em 1586. Suponhamos que o corpo sólido imerso fosse totalmente substituído pelo fluido. O volume de fluido que ele deslocou estaria em equilíbrio com o resto do fluido. Logo, a resultante das forças superficiais que atuam sobre a superfície S desse volume tem de ser igual e contrária à resultante das forças volumétricas que atuam sobre ele, ou seja, ao peso da porção de fluido deslocada. As pressões superficiais não se alteram se imaginarmos a superfície S “solidificada”. Logo, a resultante das forças superficiais sobre o sólido é igual e contrária ao peso da porção de fluido deslocada.

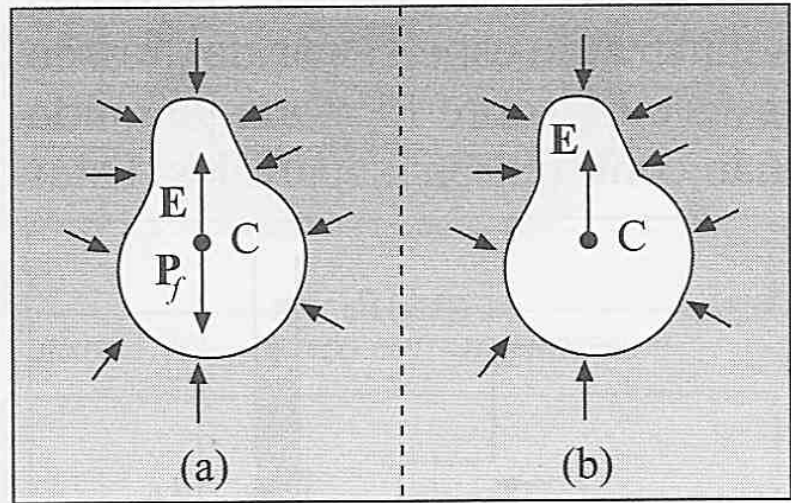


Figura 1.15 — Centro de empuxo

Este raciocínio mostra que o resultado não depende da forma do sólido imerso, que havíamos tomado como sendo um cilindro. Como, para o fluido substituído, E e P_f , que se equilibram, estão aplicados no *centro de gravidade* C da *porção de fluido substituída* (Fig. 1.15, (a)), concluímos que o empuxo E sobre o sólido está aplicado no ponto C (Fig. 1.15 (b)), que se chama *centro de empuxo*.

Além do empuxo (resultante das forças superficiais), atua sobre o sólido, como força volumétrica, o peso P , aplicado no centro de gravidade G do sólido. Se a densidade média do sólido é menor que a do líquido, ele não pode ficar totalmente imerso, porque isto daria $|E| > |P|$; ele ficará então *flutuando*, com o empuxo devido à porção imersa equilibrando o peso do sólido. Obtivemos assim o enunciado geral do Princípio de Arquimedes: Um corpo total ou parcial-

mente imerso num fluido recebe do fluido um empuxo igual e contrário ao peso da porção de fluido deslocada e aplicado no centro de gravidade da mesma.

Arquimedes enunciou este princípio no século III a.C. Segundo a lenda contada pelo historiador Vitrúvio, Herão, rei de Siracusa, desconfiava ter sido enganado por um ourives, que teria misturado prata na confecção de uma coroa de ouro, e pediu a Arquimedes que o verificasse: “Enquanto Arquimedes pensava sobre o problema, chegou por acaso ao banho público, e lá, sentado na banheira, notou que a quantidade de água que transbordava era igual à porção imersa de seu corpo. Isto lhe sugeriu um método de resolver o problema, e sem demora saltou alegremente da banheira e, correndo nu para casa, gritava bem alto que tinha achado o que procurava. Pois, enquanto corria, gritava repetidamente em grego ‘eu-reka, eureka’ (‘achei, achei’).” Segundo o historiador, medindo os volumes de água deslocados por ouro e prata e pela coroa, Arquimedes teria comprovado a falsificação.

Equilíbrio dos corpos flutuantes:

Na posição de equilíbrio, não só a resultante de E (empuxo) e P (peso do corpo) tem de ser nula, mas também o torque resultante, o que exige (Fig. 1.15) que o centro de empuxo C e o centro de gravidade G do corpo estejam sobre a mesma vertical (1, Seção 12. 8).

Entretanto, isto não garante a *estabilidade* do equilíbrio. Quando o corpo gira, a porção de fluido deslocada muda de forma, e o novo centro de empuxo é C' (Fig. 1.17).

A vertical por C' corta o eixo CG num ponto M que, para pequenas inclinações, resulta ser praticamente independente do ângulo de inclinação; M chama-se *metacentro*.

Se M está acima de G , o torque gerado por E' e P (Fig. 1.17) tende a restabelecer a posição de equilíbrio, e este é *estável*; se M estiver abaixo de G , o torque tende a aumentar ainda mais o desvio, e o equilíbrio é *instável*. Quando uma ou mais pessoas se erguem num barco, isto eleva G , e se G subir acima de M o barco tende a virar!

Paradoxo hidrostático: Conforme já havia sido observado por Stevin e por Pascal, se tivermos recipientes de formas muito diferentes, como os da Fig. 1.18, mas de mesma área da base A , e se a altura h do líquido é a mesma em todos, a força exercida sobre a base também é, embora o peso do líquido seja muito diferente (paradoxo hidrostático). Isto resulta da igualdade das pressões exercidas sobre o fundo, que só dependem da altura h .

Entretanto, se equilibrarmos uma balança com um frasco vazio sobre o prato, e depois despejarmos líquido, a diferença de peso necessária para reequilibrá-la é igual ao peso do líquido. Para compatibilizar estes resultados, notemos que a força exercida pelo líquido sobre o prato da balança é a resultante de todas as forças exercidas pelo líquido sobre as paredes do frasco (Fig. 1.19).

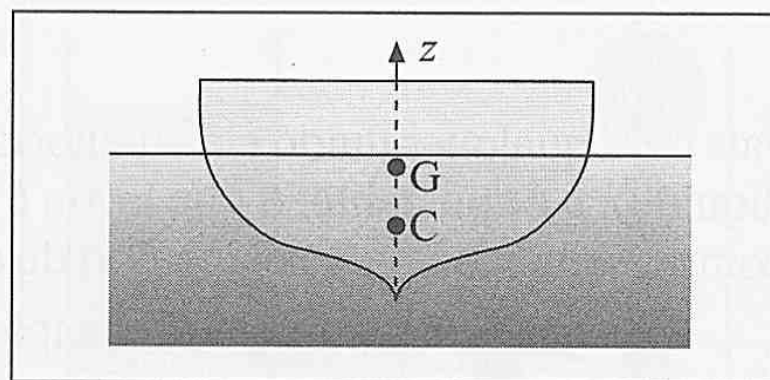


Figura 1.16 — Posição de equilíbrio

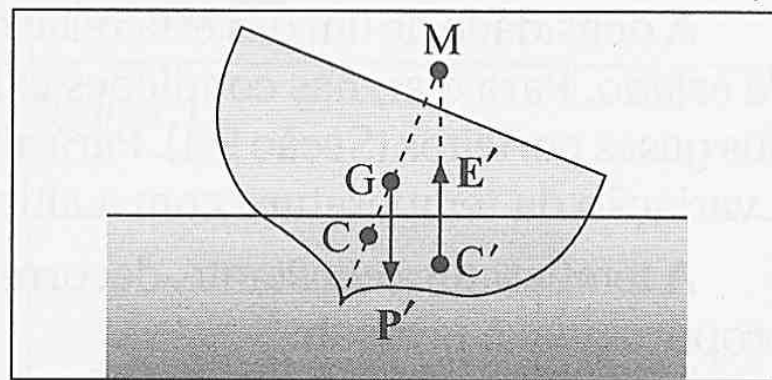


Figura 1.17 — Metacentro

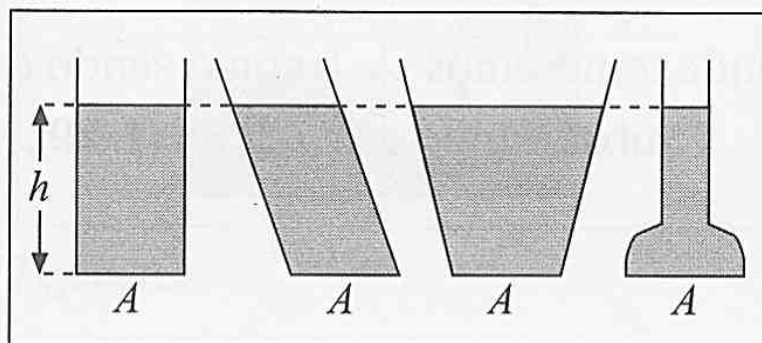


Figura 1.18 — Paradoxo hidrostático

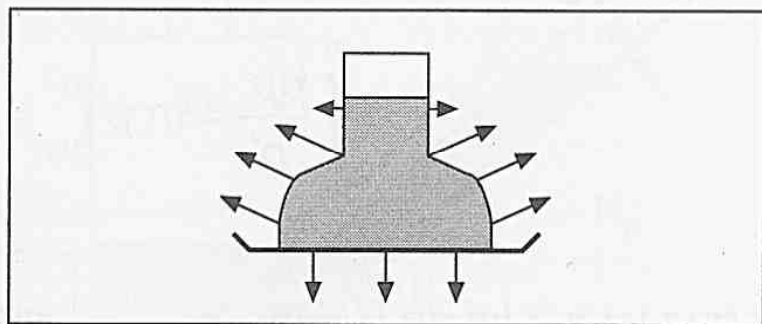


Figura 1.19 — Pesagem de líquido

Estas forças, normais às paredes em cada ponto, são iguais e contrárias às forças exercidas pelas paredes sobre o líquido. Mas a resultante das forças superficiais sobre o líquido, como vimos na demonstração do princípio de Arquimedes, é igual e contrária ao peso do líquido. Logo, a resultante das pressões exercidas pelo líquido sobre as paredes, aplicadas ao prato da balança, é efetivamente igual ao peso do líquido.

A explicação do paradoxo hidrostático resulta imediatamente dessas considerações.

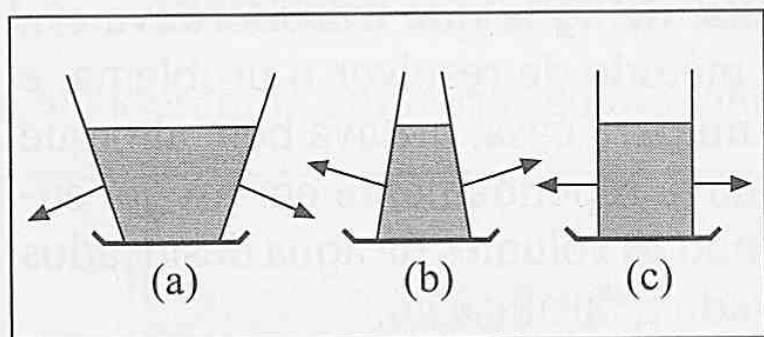


Figura 1.20 — Explicação do paradoxo hidrostático

Assim, no caso da Fig. 1.20 (a), a resultante das pressões sobre as superfícies laterais tem uma componente para baixo que é responsável pela diferença entre o peso do líquido e a força sobre a base; no caso da Fig. 1.20 (b), essa componente é para cima e é somente no caso da Fig. 1.20 (c) que a força sobre a base é igual ao peso do líquido.

1.7 — Variação da pressão atmosférica com a altitude

A expressão (1.3.9),

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

vale para qualquer fluido em equilíbrio no campo gravitacional. Para um fluido incompressível (líquido), ρ é constante, o que levou à (1.4.6). Para um gás, porém, é preciso levar em conta a compressibilidade, ou seja, o fato de que ρ varia com a pressão.

Se o gás está contido num recipiente de dimensões comparáveis à escala de laboratório, a variação de pressão entre o fundo e o topo é desprezível, porque ρ é muito pequeno. Entretanto, isto não vale para a atmosfera na escala de vários km.

A densidade de um gás está relacionada com a pressão e a temperatura através da equação de estado. Para o ar, nas condições existentes na atmosfera, vale, com boa aproximação, a lei dos gases perfeitos (Seção 9.1). Para altitudes não muito elevadas (≤ 1 km), podemos desprezar a variação da temperatura com a altitude, supondo a atmosfera isotérmica.

A temperatura constante, decorre da lei dos gases perfeitos que a densidade é diretamente proporcional à pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{p(z)}{p(0)} = \frac{p}{p_0} \quad (1.7.1)$$

onde tomaremos $z = 0$ como sendo o nível do mar.

Substituindo a (1.7.1) na (1.3.9), vem

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz = -\lambda dz \quad (1.7.2)$$

onde $\lambda = \rho_0 g/p_0$ é uma constante. A (1.7.2) é análoga à equação que encontramos para a variação da velocidade no movimento de um foguete (1, Seção 8.6) e se integra de forma análoga:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = \ln p' \Big|_{p_0}^p = \ln p - \ln p_0 = \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\lambda \int_0^z dz' = -\lambda z \quad (1.7.3)$$

o que leva à lei de Halley

$$p(z) = p_0 e^{-\lambda z}, \quad \lambda = \frac{\rho_0 g}{p_0} \quad (1.7.4)$$

Esta fórmula barométrica mostra que a pressão, numa atmosfera isotérmica, decresce exponencialmente com a altitude (Fig. 1.21), caindo a $1/e \approx 0.37$ de seu valor inicial p_0 para uma altitude $z = 1/\lambda = p_0/\rho_0 g$. Para o ar à temperatura de 15°C , a densidade ao nível do mar e à pressão de $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ é $\rho_0 \approx 1.226 \text{ kg/m}^3$, o que daria $1/\lambda \approx 8,4 \text{ km}$. Esta é a ordem de grandeza da altitude da troposfera, a camada mais baixa da atmosfera.

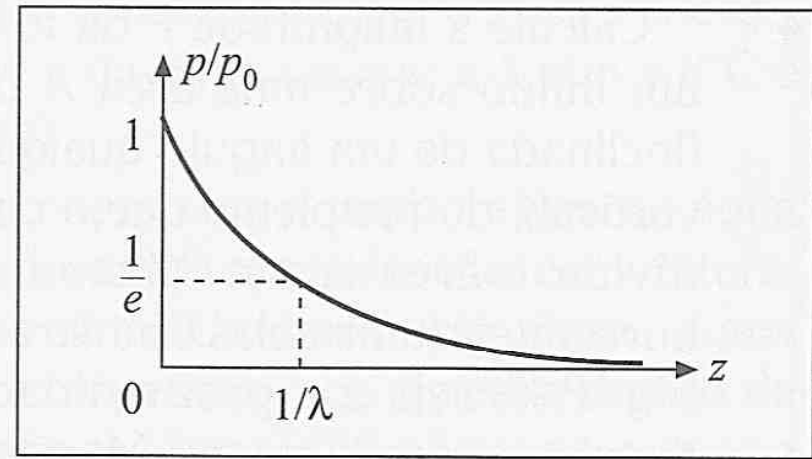


Figura 1.22 — Lei de Halley

A temperatura na troposfera, em lugar de permanecer constante, tende a decrescer para altitudes mais elevadas. A (1.7.4) pode ser empregada se subdividimos a troposfera em camadas de temperatura aproximadamente constante, usando os valores de λ adequados à temperatura média de cada camada. Na estratosfera, situada logo acima da troposfera, a aproximação isotérmica é bastante melhor.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 1

1. No sistema da Fig. P.1, a porção AC contém mercúrio, BC contém óleo e o tanque aberto contém água. As alturas indicadas são: $h_0 = 10 \text{ cm}$, $h_1 = 5 \text{ cm}$, $h_2 = 20 \text{ cm}$ e as densidades relativas à da água são: 13,6 (mercúrio) e 0,8 (óleo). Determine a pressão p_A no ponto A (em atm).

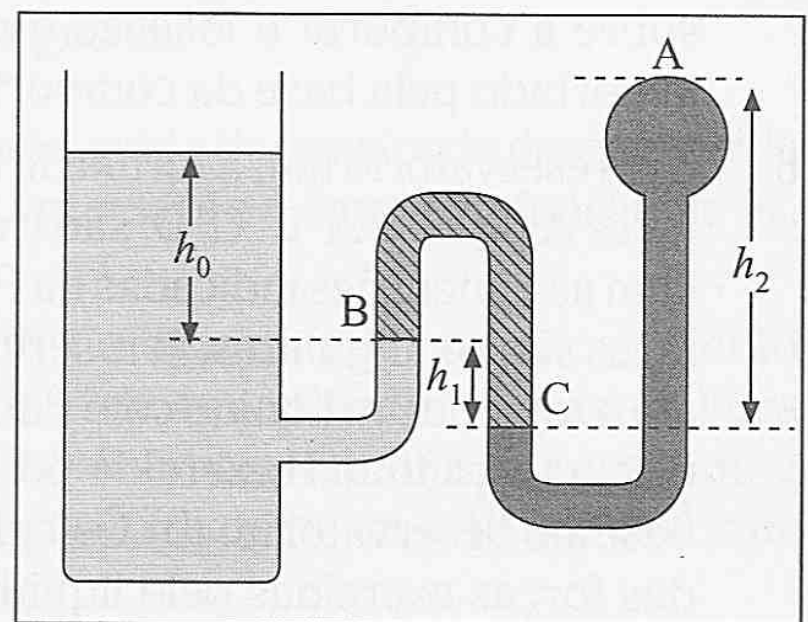


Figura P.1

2. No manômetro de reservatório (Fig. P.2), calcule a diferença de pressão $p_1 - p_2$ entre os dois ramos em função da densidade ρ do fluido, dos diâmetros d e D , e da altura h de elevação do fluido no tubo, relativamente ao nível de equilíbrio N_0 que o fluido ocupa quando $p_1 = p_2$.

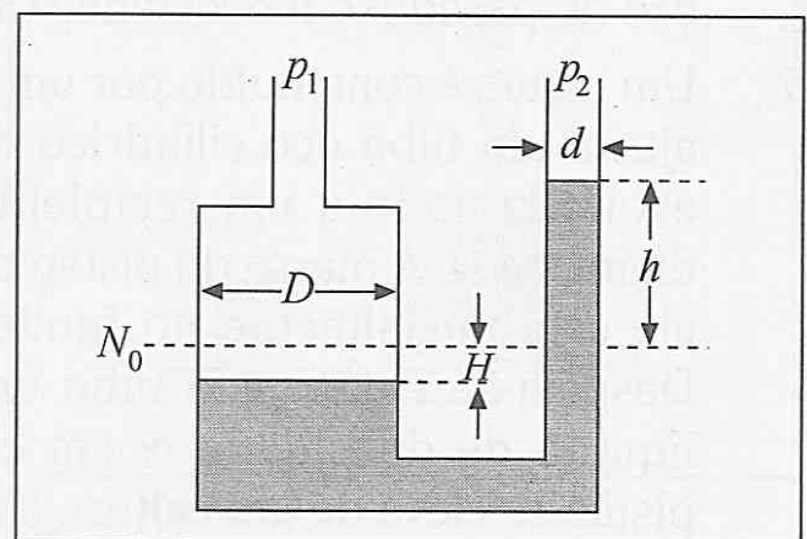


Figura P.2

3. O manômetro de tubo inclinado (Fig. P.3), utilizado para medir pequenas diferenças de pressão, $p_1 - p_2$, difere do descrito no problema 2 pela inclinação θ do tubo de diâmetro d . Se o fluido empregado é óleo de densidade $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$, com $d = 0,5 \text{ cm}$, $D = 2,5 \text{ cm}$, escolha θ para que o deslocamento l seja de 5 cm quando $p_1 - p_2 = 0,001 \text{ atm}$.

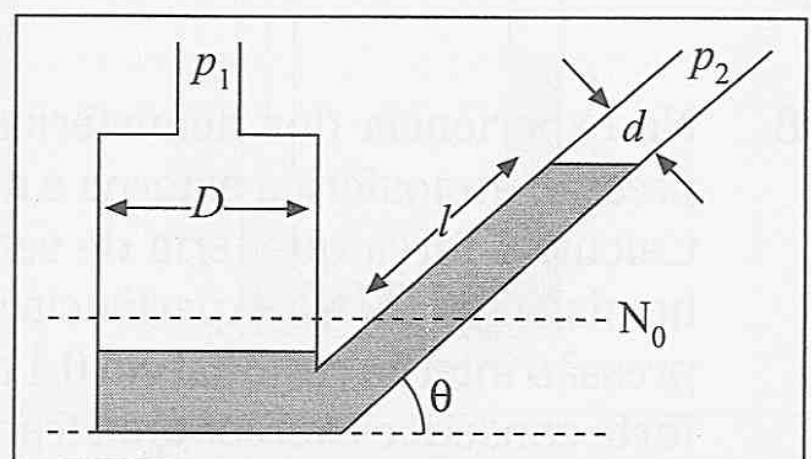


Figura P.3

4. Calcule a magnitude F da força exercida por um fluido sobre uma área A de parede plana (inclinada de um ângulo qualquer em relação à vertical), do recipiente que o contém. Para isto, divida a área A em faixas infinitésimas dA horizontais (uma delas é mostrada hachurada na Fig. P.4); seja z a profundidade de dA , e ρ a densidade do fluido. (a) Mostre que $F = \rho g \bar{z}A$, onde \bar{z} é a profundidade do *centróide* de A , definido como o centro de massa de A , considerada como uma placa plana homogênea.

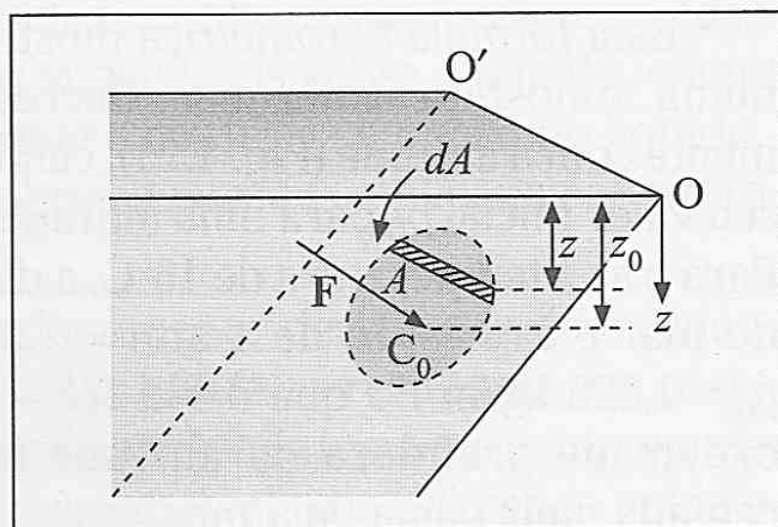


Figura P.4

(b) O torque resultante sobre A , em relação a um eixo horizontal OO' , é o mesmo que se a força F estivesse aplicada num ponto C_0 da área A (veja Fig. P.4), que se chama *centro das pressões*. Mostre que a profundidade z_0 do centro das pressões é dada por $z_0 = I_0/(\bar{z}A)$, onde $I_0 = \int z^2 dA$ é análogo a um “momento de inércia” de A em relação a OO' .

5. Uma comporta vertical de forma retangular tem largura l ; a altura da água represada é h . (a) Aplicando os resultados do Problema 4, calcule a força total F exercida pela água sobre a comporta e localize o centro das pressões. (b) Se $l = 3$ m e o torque máximo suportado pela base da comporta é de 150 kNm, qual é o valor máximo de h admissível?

6. Um reservatório tem a forma de um prisma, cujas faces $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são trapézios isósceles com as dimensões indicadas na Fig. P.5; as demais faces são retangulares. O reservatório está cheio até o topo de um líquido com densidade ρ . (a) Calcule a força total F exercida pelo líquido sobre a base do reservatório. (b) Calcule a resultante R das forças exercidas pelo líquido sobre *todas* as paredes do reservatório e compare-a com o peso total do líquido. Analise o resultado como ilustração do paradoxo hidrostático (Seç.1.6).

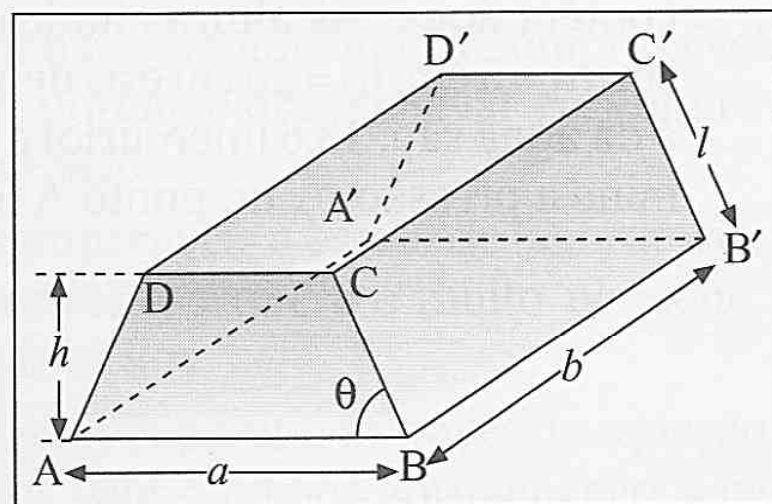


Figura P.5

7. Um pistão é constituído por um disco ao qual se ajusta um tubo oco cilíndrico de diâmetro d , e está adaptado a um recipiente cilíndrico de diâmetro D . A massa do pistão com o tubo é M e ele está inicialmente no fundo do recipiente. Despeja-se então pelo tubo uma massa m de líquido de densidade ρ ; em consequência, o pistão se eleva de uma altura H . Calcule H .

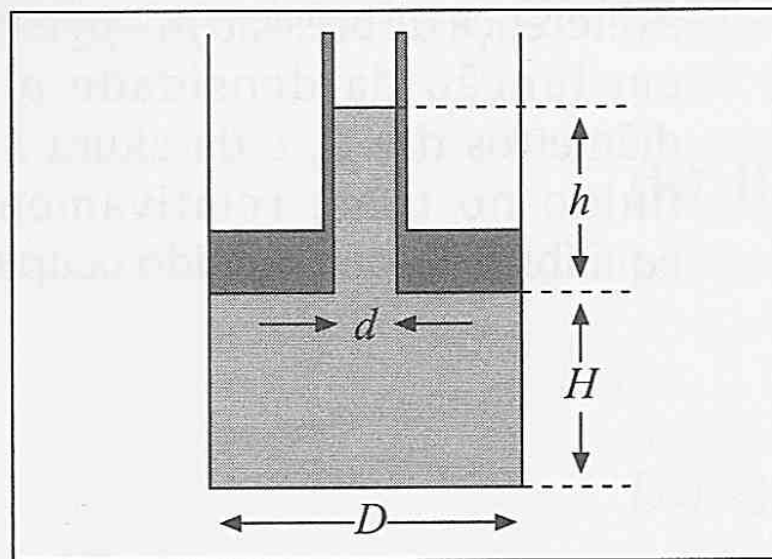


Figura P.6

8. Na experiência dos hemisférios de Magdeburgo (Seç.1.5) seja Δp a diferença entre a pressão atmosférica externa e a pressão interna, e seja d o diâmetro dos hemisférios. (a) Calcule a força que teria de ser exercida por cada par de cavalos para separar os hemisférios. (b) Na experiência realizada em 1654, tinha-se $d \approx 37$ cm e pode-se estimar a pressão interna residual em 0,1 atm. Qual era a força necessária neste caso? Se um cavalo forte consegue exercer uma tração de 80 kgf, qual teria sido o número mínimo de cavalos em cada par de cavalos necessário para a separação?

9. É comum dizer que alguma coisa representa apenas “a porção visível de um iceberg”. Sabendo-se que a densidade do gelo é $0,92 \text{ g/cm}^3$ e a da água do mar a 1 atm e 0°C é $1,025 \text{ g/cm}^3$, que fração de um iceberg fica submersa?
10. (a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água próxima de 0°C . Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera? (b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água na piscina sobe, desce ou não se altera? (Três físicos famosos a quem este problema foi proposto erraram a resposta. Veja se você acerta!)
11. Um densímetro tem a forma indicada na Fig. P.7, com uma haste cilíndrica graduada, cuja secção transversal tem área A , ligada a um corpo que geralmente contém algum lastro. O densímetro é calibrado mergulhando-o na água, marcando com a graduação “1” a altura na haste até a qual a água sobe e determinando o volume V_0 do densímetro situado abaixo da marca “1” (ou seja, o volume total que fica mergulhado na água). Seja h a altura da haste entre a graduação “1” e o nível até onde o densímetro mergulha quando colocado num líquido de densidade desconhecida (Fig. P.7). Calcule a densidade relativa desse líquido em relação à água, em função de V_0 , A e h .

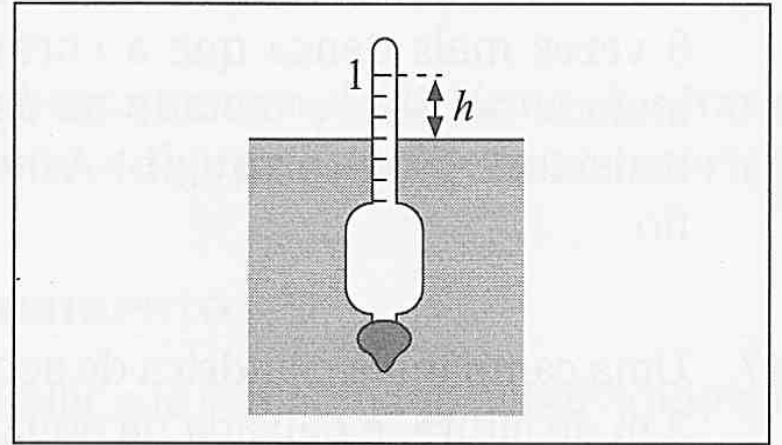


Figura P.7

12. Suponha que Arquimedes tivesse verificado que: (i) Colocando a coroa do rei Herão dentro de uma banheira cheia de água até a borda, $0,3 \text{ l}$ de água transbordavam; (ii) Era preciso aplicar uma força de $2,85 \text{ kgf}$ para suspender a coroa mergulhada, retirando-a da água. Sabendo que a densidade do ouro é $18,9 \text{ g/cm}^3$ e a da prata é $10,5 \text{ g/cm}^3$, que conclusão Arquimedes poderia ter tirado?
13. Um bloco cúbico de aço, de 5 cm de aresta e densidade $7,8 \text{ g/cm}^3$, está mergulhando num recipiente com água, suspenso de uma balança de molas graduada em kgf . A massa total do recipiente e da água é de 1 kg , e ele está sobre um prato de uma balança, equilibrado por um peso de massa m no outro prato (Fig. P.8). (a) Qual é a leitura da balança de molas? (b) Qual é o valor de m ?

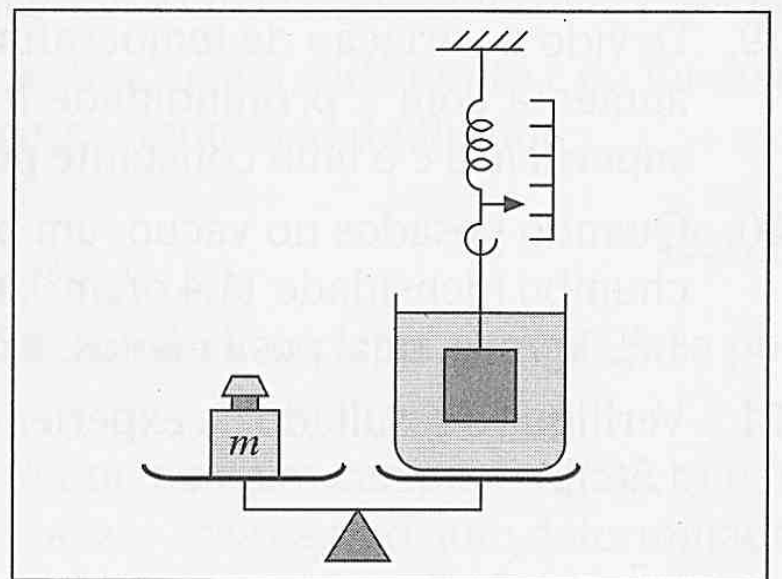


Figura P.8

14. Um tubo em U contendo um líquido gira em torno do eixo Oz (Fig. P.9), com velocidade angular de 10 rad/s . A distância d entre os dois ramos do tubo é de 30 cm , e ambos são abertos na parte superior. Calcule a diferença de altura h entre os níveis atingidos pelo líquido nos dois ramos do tubo.

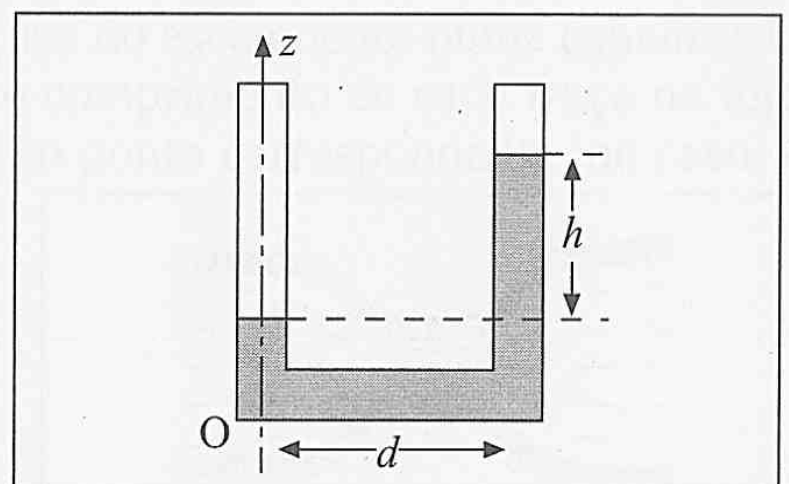


Figura P.9

15. Numa corrida de garçons, cada um deles tem de levar uma bandeja com um copo de chope de 10 cm de diâmetro, cheio até uma distância de 1 cm do topo, sem permitir que ele se derrame. Supondo que, ao dar a partida, um garçom acelere o passo uniformemente com aceleração a até atingir a velocidade final, mantendo a bandeja sempre horizontal, qual é o valor máximo de a admissível?
16. Duas bolas de mesmo raio, igual a 10 cm, estão presas uma à outra por um fio curto de massa desprezível. A de cima, de cortiça, flutua sobre uma camada de óleo, de densidade $0,92 \text{ g/cm}^3$, com a metade do volume submersa. A de baixo, 6 vezes mais densa que a cortiça, está imersa metade no óleo e metade na água. (a) Ache a densidade ρ da cortiça; (b) Ache a tensão T no fio.
17. Uma campânula cilíndrica de aço, sem fundo, de 3 m de altura, é baixada na água, a partir da superfície, até que seu teto fique a 5 m de profundidade. Que fração do volume da campânula será invadida pela água (Fig. P.11)?

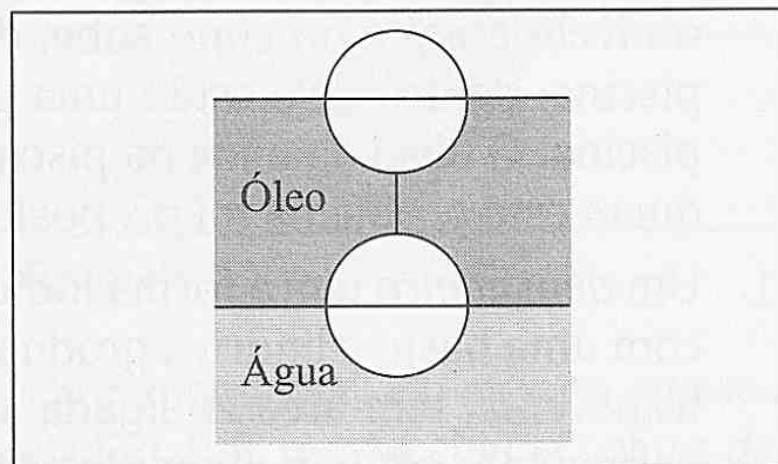


Figura P.10

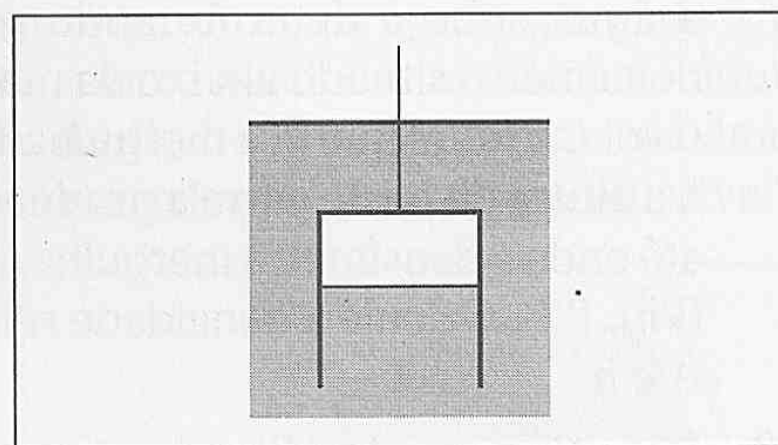


Figura P.11

18. Um balão esférico de 5 m de raio está cheio de hidrogênio. Nas condições normais, a densidade do hidrogênio é $0,0899 \text{ kg/m}^3$ e a do ar é $1,29 \text{ kg/m}^3$. Desprezando o peso das paredes, qual é a força ascensional do balão, em kgf?
19. Devido à variação de temperatura, pressão e salinidade, a densidade ρ da água do mar aumenta com a profundidade h segundo a lei $\rho = \rho_0 + c h$, onde ρ_0 é a densidade na superfície e c é uma constante positiva. Calcule a pressão a uma profundidade h .
20. Quando pesados no vácuo, um bloco cúbico de alumínio (densidade $2,7 \text{ g/cm}^3$) e um de chumbo (densidade $11,4 \text{ g/cm}^3$), têm peso equivalente a 10 kg cada um. No ar (densidade $1,29 \text{ kg/m}^3$), qual pesa menos, e qual é a diferença de massa correspondente?
21. Verifique o resultado da experiência do Puy de Dome, realizada por Périer em 1648 [Seção 1.5(c)].

Capítulo 2

NOÇÕES DE HIDRODINÂMICA

A dinâmica dos fluidos é um assunto bastante complexo. Vamos limitar o tratamento a algumas noções introdutórias.

2.1 — Métodos de descrição e regimes de escoamento

Como descrever o movimento de um fluido? Uma possibilidade é imaginá-lo subdividido em elementos de volume suficientemente pequenos para que possamos tratar cada um deles como uma partícula, e depois descrever o movimento de cada partícula do fluido.

Para identificar uma dada partícula, basta dar sua posição \mathbf{r}_0 no fluido num dado instante t_0 . Num instante posterior t , ela ocupará uma posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, t_0)$. Quando t varia, o vetor \mathbf{r} descreve a *trajetória* da partícula do fluido. Na prática, poderíamos individualizar a partícula colocando um pouco de corante no ponto \mathbf{r}_0 no instante t_0 , e a trajetória seria então materializada através de uma fotografia de longa exposição do fluido.

Se soubermos calcular \mathbf{r} em função de t para qualquer partícula, teremos uma descrição do movimento do fluido. Este método de descrição é devido a Lagrange. Entretanto, é difícil que se consiga obter uma solução tão completa, e raramente há interesse em conhecer em detalhe as trajetórias das partículas do fluido, de forma que não é um método muito empregado.

No método mais utilizado, devido a Euler, fixamos a atenção em cada ponto \mathbf{r} do fluido e descrevemos como varia com o tempo a velocidade \mathbf{v} nesse ponto *fixo* do fluido:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.1)$$

Em geral, a cada instante t , será uma partícula diferente do fluido que passará pela posição \mathbf{r} .

A associação de um vetor a cada ponto do fluido define nele um *campo vetorial*, que é, neste caso, o *campo de velocidades* no fluido. Para materializar esse campo num determinado instante, podemos introduzir partículas de corante em diferentes pontos do fluido e depois tirar uma fotografia com tempo de exposição curto.

A Fig. 2.1 dá uma idéia do que se obteria para o caso do escoamento numa canalização cujo diâmetro diminui na região central. A direção e o comprimento de cada traço na foto dão a direção e a magnitude da velocidade do fluido no ponto correspondente (no caso, a magnitude aumenta no centro). Se o fluido está se deslocando da esquerda para a direita, por exemplo, podemos também colocar uma seta na extremidade de cada traço para indicar o sentido do vetor velocidade.

Chama-se *linha de corrente* num dado instante uma linha *tangente* em cada ponto ao vetor \mathbf{v} nesse

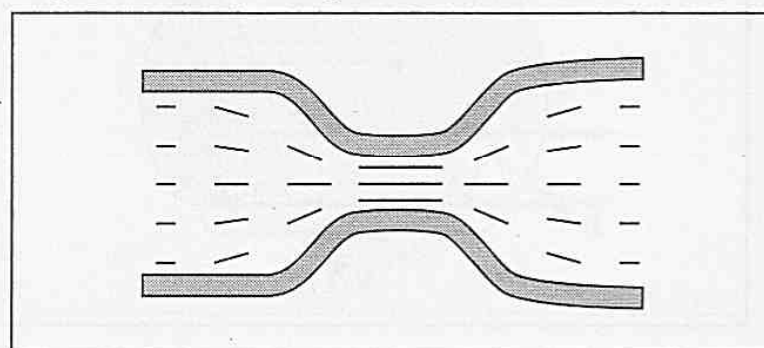


Figura 2.1 — Traços de corante

ponto. As linhas de corrente são as “linhas de força” do campo de velocidade; é bem conhecido que as linhas de força do campo magnético podem ser materializadas com o auxílio de limalha de ferro.

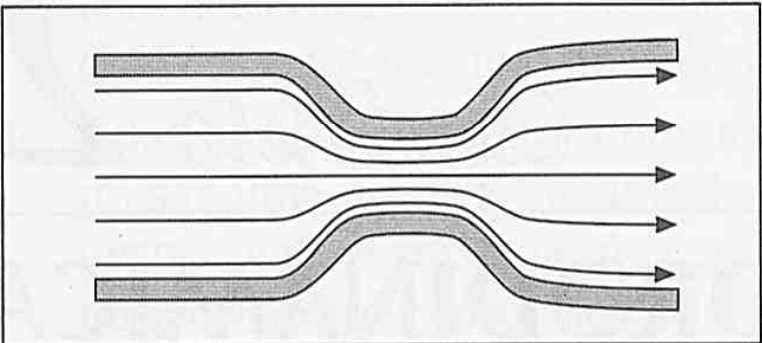


Figura 2.2 — Linhas de corrente

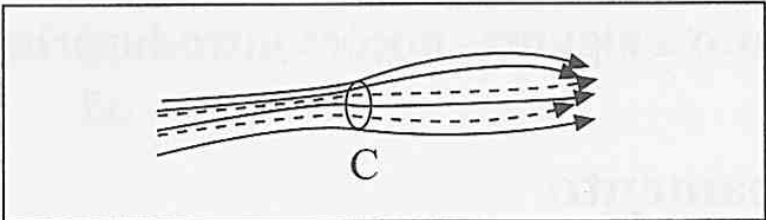


Figura 2.3 — Tubo de corrente

A Fig. 2.2 mostra o aspecto das linhas de corrente para o exemplo da página precedente de escoamento numa canalização. Chama-se *tubo de corrente* a superfície formada num dado instante por todas as linhas de corrente que passam pelos pontos de uma dada curva C fechada no fluido (Fig. 2.3). Em geral, as linhas e tubos de corrente variam de instante para instante.

Escoamento estacionário: O escoamento de um fluido chama-se *estacionário* ou em *regime permanente* quando o campo de velocidade do fluido não varia com o tempo, ou seja, quando a (2. 1. 1) se reduz a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

(2.1.2)

Isto quer dizer que diferentes partículas do fluido sempre passam pelo mesmo ponto com a mesma velocidade, embora \mathbf{v} possa variar de ponto a ponto. O escoamento de água a baixas velocidades numa canalização ligada a um grande reservatório é, com boa aproximação, estacionário.

Num escoamento estacionário, as linhas de corrente coincidem com as trajetórias das partículas do fluido. Duas linhas de corrente nunca podem se cruzar, porque, num ponto de cruzamento, haveria uma ambigüidade na direção da velocidade, com duas direções diferentes no mesmo ponto. Logo, num escoamento estacionário, as partículas de fluido que estão dentro de um dado tubo de corrente num dado instante nunca podem atravessar as paredes desse tubo: permanecem sempre dentro dele, e o fluido se escoar dentro do tubo como se suas paredes fossem sólidas, constituindo uma canalização.

Num escoamento *não estacionário*, as linhas de corrente variam a cada instante e não coincidem mais com as trajetórias. Um caso extremo é o escoamento *turbulento*, como o de água numa cachoeira, em que \mathbf{v} varia de forma extremamente rápida e irregular tanto com t como com \mathbf{r} .

2.2 — Conservação da massa — Equação de continuidade

Os resultados básicos da dinâmica dos fluidos que vamos estudar decorrem de leis de conservação. Uma delas é a *lei de conservação da massa* aplicada ao movimento do fluido.

Para ver quais são as conseqüências dessa lei, consideremos um tubo de corrente cuja secção transversal no entorno de um dado ponto do fluido num dado instante tem área A (Fig. 2.4). Qual é a massa Δm do fluido que atravessa essa secção num intervalo de tempo

infinitésimo Δt ? Se \mathbf{v} é a velocidade do fluido no ponto e no instante considerado, será a massa contida num cilindro de base A e altura $v\Delta t$, onde $v = |\mathbf{v}|$. O volume desse cilindro é $Av\Delta t$; logo, se ρ é a densidade do fluido no entorno do ponto considerado, a massa Δm será dada por

$$\Delta m = \rho Av\Delta t$$

(2.2.1)

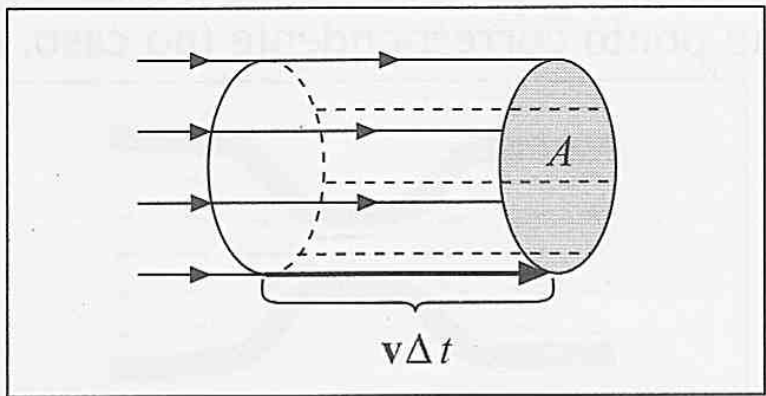


Figura 2.4 — Massa que atravessa A

Consideremos agora um escoamento *estacionário* e uma porção de tubo de corrente situada entre duas secções transversais de áreas A_1 e A_2 (Fig. 2.5), onde as velocidades e densidades são, respectivamente, (v_1, ρ_1) e (v_2, ρ_2) . Como o escoamento é estacionário, a massa do fluido contida entre as secções A_1 e A_2 não pode variar com o tempo, ou seja, a massa Δm_1 que entra por A_1 num intervalo de tempo Δt tem de ser igual à massa Δm_2 que sai do tubo por A_2 nesse mesmo intervalo:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \quad (2.2.2)$$

o que dá

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2} \quad (2.2.3)$$

ou seja, o produto ρAv permanece constante ao longo do tubo de corrente, representando o *fluxo de massa por unidade de tempo através da secção transversal do tubo*.

Em particular, se o fluido é incompressível, temos $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (constante), e a (2.2.3) fica

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \quad (\text{fluido incompressível}) \quad (2.2.4)$$

O produto $Av = \text{constante}$ neste caso mede o *volume de fluido que atravessa a secção transversal do tubo por unidade de tempo*, e chama-se *vazão do tubo*. A vazão mede-se em m^3/s .

A (2.2.4) mostra que, para um fluido incompressível, a velocidade é inversamente proporcional à área da secção transversal do tubo de corrente considerado. Assim, nas regiões onde o tubo sofre um estrangulamento, o fluido tem de se escoar mais rapidamente, para que a vazão permaneça a mesma. Na Fig. 2.5, vemos que isto corresponde a uma maior densidade das linhas de corrente representadas. Esta convenção é usualmente adotada no traçado das linhas de corrente: *a velocidade é maior onde elas estão mais próximas entre si*.

Os resultados acima também se aplicam ao escoamento estacionário de um fluido numa canalização: o tubo de corrente, neste caso, é definido pelas paredes da canalização, pois o fluido se escoar tangencialmente a elas.

Para um fluido *compressível*, a (2.2.3) mostra que, se a área A do tubo de corrente permanece a mesma, a densidade varia na razão inversa da velocidade. Este resultado pode ser aplicado ao escoamento estacionário de carros numa estrada: em regiões onde a velocidade diminui (por exemplo, em frente a postos de fiscalização!), a densidade de carros tende a aumentar.

Se quisermos formular o princípio de conservação da massa no caso geral do escoamento não-estacionário de um fluido compressível, não adianta considerar um tubo de corrente, porque as linhas de corrente mudam a cada instante.

Consideremos então um volume V fixo do fluido, limitado por uma superfície fechada S , e seja \hat{n} o *vetor unitário da normal externa* (ou seja, dirigida para fora de V) em cada ponto de S (Fig. 2.6).

A massa Δm de fluido que atravessa ΔS num intervalo de tempo infinitésimo Δt está contida num cilindro de base ΔS e geratriz $v\Delta t$ (Fig. 2.7), onde v é a velocidade do fluido no entorno de ΔS no instante

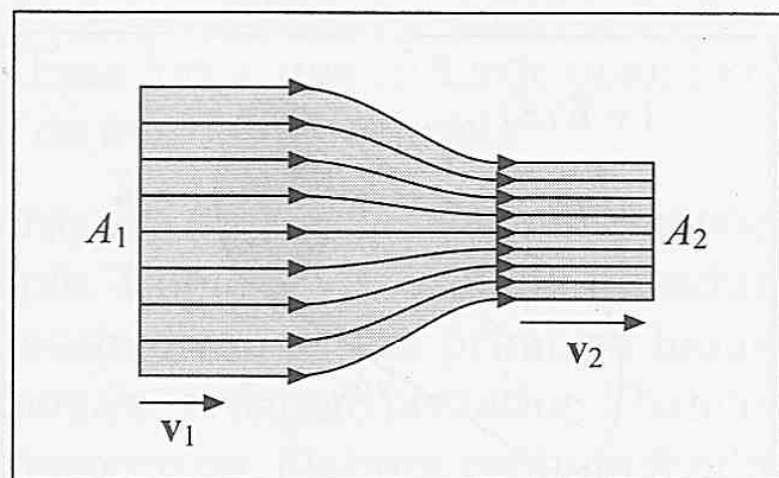


Figura 2.5 — Fluxo de massa

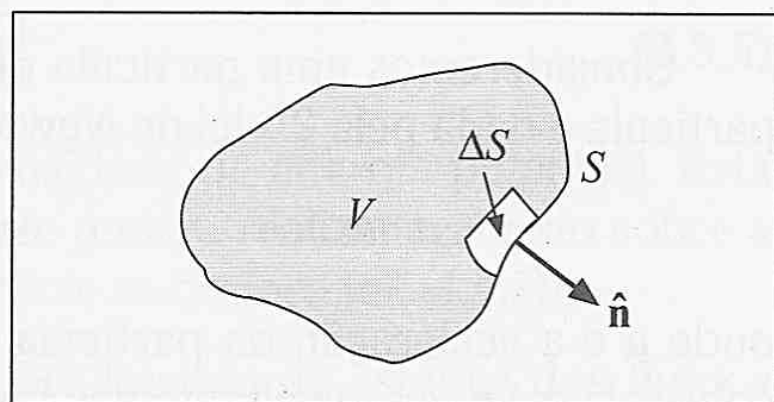


Figura 2.6 — Normal externa

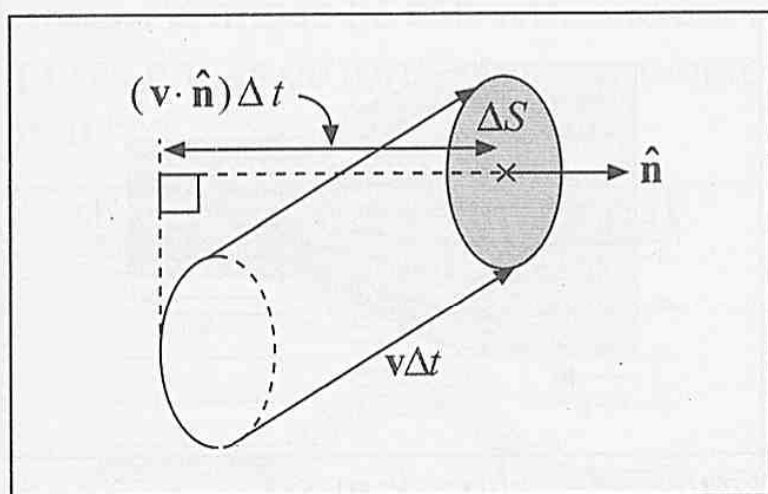


Figura 2.7 — Massa que atravessa ΔS

considerado, que em geral é oblíqua a ΔS . No caso ilustrado na figura, em que $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$, a altura do cilindro é $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} t$, de modo que

$$\Delta m = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta S \quad (2.2.5)$$

Vemos que $\rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S$ representa o *fluxo de massa para fora do volume V por unidade de tempo* através de ΔS no instante considerado. Isto continua valendo se for $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ (por exemplo, se invertermos o sentido de \mathbf{v} na Fig. 2.7): o sinal negativo significa simplesmente que o fluxo neste caso está dirigido *para dentro* de V .

Por exemplo, na Fig. 2.5, o fluxo através de A_1 é negativo e através de A_2 é positivo.

A massa total de fluido contida dentro do volume V num dado instante é

$$m = \int_V \rho dV \quad (2.2.6)$$

onde dV é o elemento de volume, ρ é a densidade em cada ponto de V no instante considerado, e a integral é estendida ao volume V .

A massa m pode variar com o tempo. Entretanto, como massa não pode ser criada nem destruída, tal variação só pode ser devida ao fluxo resultante através da superfície S : m aumenta se entra mais fluido do que sai, e diminui em caso contrário. Pela (2.2.5), o fluxo resultante por unidade de tempo é

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.2.7)$$

onde dS é o elemento de superfície e \oint_S significa a integral estendida à superfície fechada S . Este fluxo dá o *decréscimo* por unidade de tempo da massa de fluido contida em V , ou seja,

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (2.2.8)$$

onde o sinal é negativo porque $dm/dt < 0$ quando o fluxo total para fora é positivo.

A (2.2.8), que é a expressão geral da lei de conservação da massa num fluido, chama-se *equação de continuidade*. Num escoamento estacionário, ρ em cada ponto é independente do tempo e o 2.º membro da (2.2.8) se anula. Se tomarmos como volume V a porção de tubo de corrente ilustrada na Fig. 2.5, o 1.º membro se reduz a $\rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1$, de modo que a (2.2.8) se reduz à (2.2.3), neste caso particular. Note que o fluxo através da superfície lateral de um tubo de corrente é nulo, porque $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ nas paredes do tubo.

2.3 — Forças num fluido em movimento

Consideremos uma partícula do fluido de volume ΔV . A equação de movimento dessa partícula é dada pela 2.ª lei de Newton,

$$\Delta m a = \rho a \Delta V = \Delta F_v + \Delta F_s \quad (2.3.1)$$

onde a é a aceleração da partícula, ΔF_v é a resultante das forças volumétricas que atuam sobre ela e ΔF_s é a resultante das forças superficiais.

Além das forças volumétricas externas que atuam sobre o fluido, como a gravidade, há

uma força volumétrica *interna* que corresponde ao atrito no deslizamento de camadas fluidas umas sobre as outras, a força de *viscosidade* (Seção 1.1). Essa força, que só surge quando o fluido está em movimento, corresponde ao aparecimento de *tensões tangenciais*.

Um fluido real sempre tem alguma viscosidade, embora para a água ela seja muito menor do que para um fluido espesso como o mel, por exemplo. Como a viscosidade introduz complicações consideráveis, a dinâmica dos fluidos desenvolveu-se em primeiro lugar ignorando os seus efeitos, levando-os em conta somente numa abordagem posterior. Chama-se *fluido perfeito* ou *fluido ideal* um fluido de viscosidade desprezível. Embora nenhum fluido real seja perfeito, os resultados obtidos na dinâmica dos fluidos ideais podem ser aplicados em muitos casos (com algumas precauções) a fluidos reais, o que justifica o seu estudo.

Num fluido perfeito, não existem tensões tangenciais, mesmo quando ele está em movimento, de modo que as forças superficiais continuam correspondendo a *pressões*, normais às superfícies sobre as quais atuam. Continua também valendo a (1.2.8), ou seja, *a pressão num ponto do fluido não depende da orientação do elemento de superfície sobre o qual atua*. Com efeito, na demonstração dada para um fluido em equilíbrio, a contribuição das forças volumétricas foi desprezada por ser proporcional a ΔV , infinitésimo de ordem superior (pg. 4). Para um fluido em movimento, porém, o 1.º membro da (2.3.1), que representa o efeito do movimento, também é proporcional a ΔV , de forma que a demonstração dada na Seção 1.2 continua válida: *a pressão num fluido perfeito em movimento só pode depender da posição*. No caso de equilíbrio, este resultado vale tanto para um fluido perfeito como real.

A resultante das forças volumétricas e das forças superficiais de pressão sobre um elemento de volume ΔV , calculada na Seção 1.3 para um fluido em equilíbrio, permanece válida portanto para um fluido perfeito em movimento (cf. linha acima da (1.3.5)):

$$\Delta F_v + \Delta F_s = (f - \text{grad } p)\Delta V \quad (2.3.2)$$

onde f é a densidade de força volumétrica externa [veja (1.3.1)].

Substituindo a (2.3.2) na (2.3.1), obtemos a equação de movimento de um fluido perfeito:

$$\boxed{\rho a = f - \text{grad } p} \quad (2.3.3)$$

A relação entre a aceleração a e a velocidade v num ponto fixo do fluido [cf. (2.1.1)] não é simples, porque a é a aceleração de uma partícula do fluido, acompanhada em seu movimento, enquanto v se refere a um ponto fixo.

O caso mais importante na prática é aquele em que f se reduz à densidade de força gravitacional, dada por (cf. (1.4.2) e (1.4.4))

$$f = - \text{grad } (\rho g z) \quad (2.3.4)$$

A (2.3.3) fica

$$\boxed{\rho a = - \text{grad } (p + \rho g z)} \quad (2.3.5)$$

mostrando que a pressão p se comporta como uma densidade de energia potencial. Esta energia está associada às forças superficiais internas, que podem realizar trabalho sobre a superfície de um elemento de volume quando esta superfície se desloca [cf. (1.4.3)].

Para $a = 0$, as (2.3.3) e (2.3.5) se reduzem às equações básicas da estática dos fluidos (1.3.7) e (1.4.5), respectivamente.

2.4 — Equação de Bernoulli

Vamos aplicar ao movimento de um fluido perfeito, descrito pelas (2.3.5), a lei de conservação da energia (note que não há atrito). Vamos nos limitar para isto ao escoamento *estacionário* de um fluido perfeito *incompressível*.

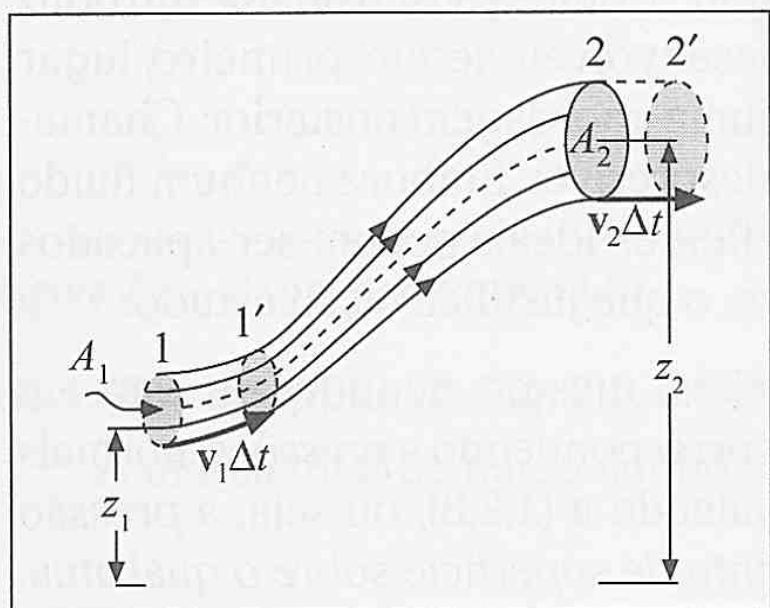


Figura 2.8 — Filete de corrente

Consideremos um tubo de corrente limitado por duas secções transversais de áreas A_1 e A_2 , situadas no entorno dos pontos 1 e 2 do fluido (Fig. 2.8), respectivamente, onde as pressões são p_1 e p_2 , as magnitudes das velocidades v_1 e v_2 e as alturas em relação a um plano horizontal de referência z_1 e z_2 . O tubo deve ser suficientemente delgado para que se possa desprezar a variação de todas essas grandezas sobre sua secção transversal; um tal tubo estreito chama-se um *filete de corrente*.

Durante o intervalo de tempo infinitésimo Δt , a porção considerada do filete, compreendida entre as secções 1 e 2, se desloca para uma nova posição, compreendida entre 1' e 2' (Fig. 2.8). Como o escoamento é estacionário, a porção do filete compreendida entre 1' e 2 não precisa ser levada em conta no balanço de energia, pois as condições nessa porção permanecem as mesmas. Para este balanço, tudo se passa como se a porção entre 1 e 1' fosse transportada para a região compreendida entre 2 e 2'. Já vimos pela (2.2.4) que as massas dessas duas porções são iguais:

$$\Delta m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t = \Delta m_2 \quad (2.4.1)$$

A variação de energia cinética correspondente a esse transporte é

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 \quad (2.4.2)$$

Esta variação é igual (1, Seção 7.2) ao trabalho realizado pelas forças que atuam sobre o sistema, ou seja, pelas forças de pressão e pela gravidade.

O deslocamento $1 \rightarrow 1'$ é no mesmo sentido das forças de pressão, enquanto $2 \rightarrow 2'$ é em sentido contrário, de modo que o trabalho das forças de pressão é

$$(p_1 A_1)(v_1 \Delta t) - (p_2 A_2)(v_2 \Delta t) \quad (2.4.3)$$

O trabalho realizado pelas forças gravitacionais é contrário à variação da energia potencial gravitacional (1, Seção 7.3), ou seja, é dado por

$$-g(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1) \quad (2.4.4)$$

Somando as (2.4.3) e (2.4.4) e igualando o resultado à (2.4.2), obtemos

$$\frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 = p_1 \underbrace{(A_1 v_1 \Delta t)}_{=\Delta m_1 / \rho} - p_2 \underbrace{(A_2 v_2 \Delta t)}_{=\Delta m_2 / \rho} - g(\Delta m_2 z_2 - \Delta m_1 z_1)$$

Como $\Delta m_1 = \Delta m_2$, resulta

$$\frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \quad (2.4.5)$$

que exprime a conservação da *energia por unidade de massa* ao longo do filete. Foi suposto que o fluido é incompressível porque para um fluido compressível existe a possibilidade adicional de variação da *energia interna*, armazenada sob a forma de energia térmica, conforme veremos mais tarde. Para o caso considerado do fluido incompressível, essa possibilidade não existe, e a (2.4.5), multiplicada por ρ , dá a *equação de Bernoulli*

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = C} \quad (2.4.6)$$

onde C é *constante ao longo de um filete*. Este resultado foi publicado por Daniel Bernoulli em seu tratado "Hidrodinâmica" (1738). Note que, como na equação de movimento (2.3.5), a pressão se comporta como uma densidade de energia potencial.

A constante C pode tomar valores diferentes, em geral, sobre filetes de corrente diferentes (a rigor, um valor de C deve ser associado a cada linha de corrente). Entretanto, é comum na prática aplicar a equação de Bernoulli ao escoamento estacionário de um líquido que se origina num grande reservatório cuja superfície livre está em contato com a atmosfera. As linhas de corrente têm origem na superfície do reservatório, que é horizontal e se mantém quase inalterada, apesar do escoamento, se o reservatório é suficientemente grande. Logo, na superfície do reservatório, $p = p_0$ (pressão atmosférica), $z = z_0 = \text{constante}$ e v^2 é desprezível, dando

$$C = p_0 + \rho g z_0 \quad (2.4.7)$$

que tem nesse caso o mesmo valor para todas as linhas de corrente originárias da superfície do reservatório, ou seja, para todo o escoamento.

A hidrostática é um caso limite, obtido quando $v \rightarrow 0$. Neste caso, C é constante em todo o fluido e a (2.4.6) se reduz à (1.4.6).

Se dividirmos por ρg todos os termos da (2.4.6), obtemos outra forma equivalente da equação de Bernoulli:

$$\boxed{z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C'} \quad (2.4.8)$$

onde $C' = C/\rho g$ também é constante ao longo de um filete de corrente.

Todos os termos da (2.4.8) têm dimensões de comprimento e costumam ser interpretados em termos de *alturas*. O termo z é simplesmente a altura do filete em relação ao plano horizontal de referência no ponto considerado, ou *altura geométrica*.

O termo $v^2/2g$, pela bem conhecida "fórmula de Torricelli" (1, Seção 6.1), representa a altura da qual um corpo deve cair em queda livre a partir do repouso para adquirir a velocidade v , e chama-se *altura cinética* [cf. (2.5.1)].

Finalmente, $h = p/\rho g$ seria a altura da coluna do fluido considerado correspondente à pressão p num barômetro que empregasse esse fluido (Seção 1.5); este termo é chamado de *altura piezométrica* (ou seja, de medida da pressão).

A equação de Bernoulli (2.4.8) pode pois ser enunciada: *a soma das alturas geométrica, cinética e piezométrica permanece constante ao longo de cada linha de corrente, no escoamento estacionário de um fluido incompressível no campo gravitacional.*

2.5 — Aplicações

(a) Fórmula de Torricelli

Consideremos um reservatório contendo líquido, em cuja parede lateral há um *pequeno* orifício circular através do qual o líquido se esco. Conforme mostra a Fig. 2.9, observa-se que a veia líquida que escapa pelo orifício O afunila-se, sofrendo uma contração, até assumir forma cilíndrica num ponto bem próximo à parede, para depois encurvar-se, sob a ação da gravidade, num jato de forma parabólica. Como o orifício é pequeno, o nível do reservatório baixa muito lentamente e a velocidade v_0 na superfície é desprezível.

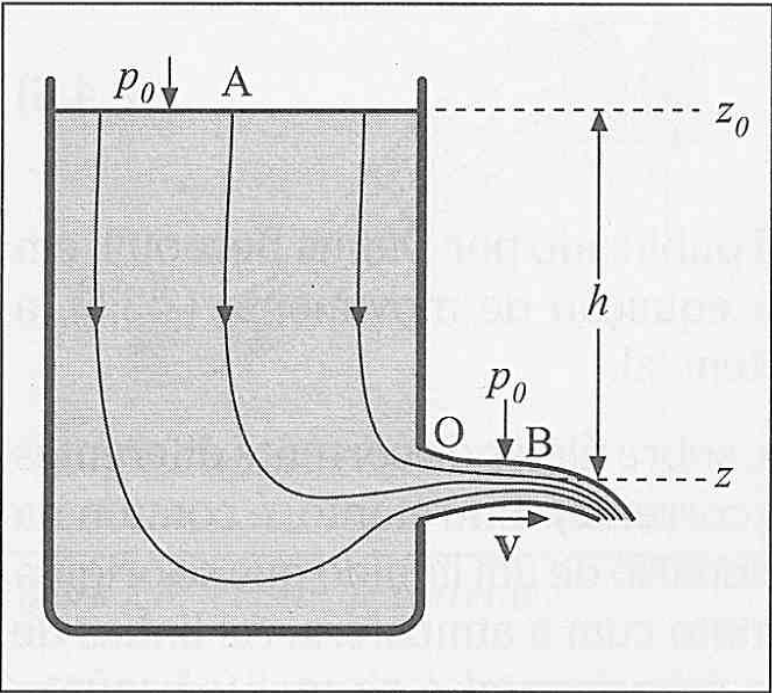


Figura 2.9 — Escoamento por um orifício

A Fig. 2.9 mostra a forma das linhas de corrente, que se iniciam na superfície livre, onde a pressão é a pressão atmosférica p_0 . Vamos aplicar a equação de Bernoulli (2.4.8) entre o ponto inicial A de uma linha de corrente na superfície e um ponto B na parte cilíndrica do jato, onde a pressão volta a ser p_0 (Fig. 2.9) e a velocidade é v :

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = z_0 + \underbrace{\frac{v_0^2}{2g}}_{\approx 0} + \frac{p_0}{\rho g}$$

Como $z_0 - z = h$ é a altura de que o líquido desce entre a superfície livre e o orifício (Fig. 2.9), obtemos, finalmente,

$v = \sqrt{2gh}$

(2.5.1)

ou seja, a velocidade é a mesma que seria atingida na queda livre de uma altura h . Este resultado foi obtido por Torricelli em 1636.

O *fator de contração* da veia líquida é de $\approx 0,6$, ou seja, a área da secção transversal do jato na porção cilíndrica B é cerca de 0,6 vezes a área A do orifício circular O. A vazão é portanto $\approx 0,6 Av$. A velocidade média sobre o orifício é correspondentemente menor, e a pressão na vizinhança de O é $> p_0$ (seria a pressão hidrostática $p_0 + \rho gh$ se o líquido estivesse em repouso). A contração da veia entre O e B está associada à queda de pressão até o valor p_0 . Para outras formas do orifício de saída, obtêm-se resultados diferentes.

(b) Tubo de Pitot

Para medir a pressão ou a velocidade num fluido em movimento, é necessário introduzir nele algum instrumento de medida, que geralmente perturba o escoamento. Para relacionar o resultado obtido com a grandeza a medir, é preciso compreender a natureza dessa perturbação. Assim,

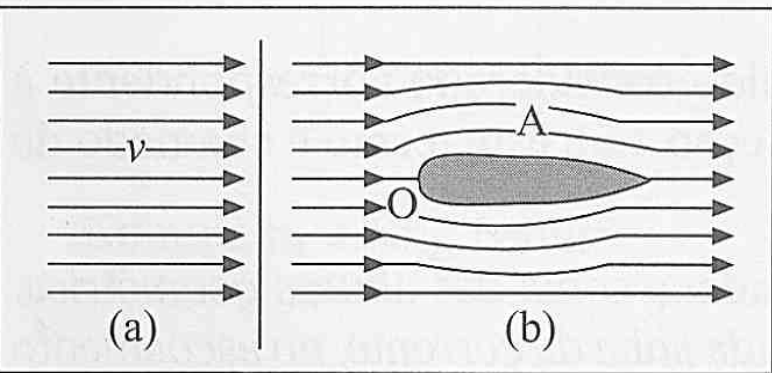


Figura 2.10 — Perturbação do escoamento

se introduzirmos num campo de escoamento inicialmente uniforme, de velocidade v (Fig. 2.10, (a)) um corpo afilado, de forma “aerodinâmica” (Fig. 2.10 (b)), ele perturba as linhas de corrente da forma indicada na figura. No ponto O (Fig. 2.10 (b)), o fluido é freiado, ou seja, a velocidade se reduz praticamente

a zero. Um tal ponto chama-se *ponto de estagnação*. Por outro lado, num ponto como A na Fig. 2.10 (b), a velocidade de escoamento quase não sofre perturbação, ou seja, continua igual a v .

Se p é a pressão em A e p_0 a pressão em O, como a diferença de altura entre esses pontos é desprezível, a equação de Bernoulli (2.4.6) dá, tomando $v_0 = 0$ em O,

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.5.2)$$

A pressão no ponto de estagnação se eleva para p_0 , que é chamada de *pressão dinâmica*, devido ao freamento do fluido.

Acoplando o corpo considerado a um manômetro diferencial para medir $p - p_0$, obtemos um *tubo de Pilot* (Fig. 2.11). Se ρ_0 é a densidade do fluido no tubo em U e h a diferença de nível entre os dois ramos, temos, analogamente à (1.5.1),

$$p_0 - p = \rho_0 g h = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad [\text{pela (2.5.2)}]$$

o que permite medir a velocidade v de escoamento do fluido:

$$v = \sqrt{2 \frac{\rho_0}{\rho} g h} \quad (2.5.3)$$

Este sistema é usado para medir a velocidade de aviões.

(c) Fenômeno de Venturi

Consideremos o escoamento estacionário de um fluido incompressível numa canalização horizontal de secção transversal variável (Fig. 2.12). Sejam A_1 e A_2 as áreas da secção nos pontos 1 e 2 e (p_1, v_1) e (p_2, v_2) as pressões e velocidades correspondentes; supomos as secções suficientemente pequenas para que essas grandezas possam ser tomadas como constantes sobre elas, e que as alturas geométricas z das secções possam ser consideradas idênticas. A equação de Bernoulli (2.4.6) dá então:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2.5.4)$$

e a equação de continuidade (2.2.4) dá

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad (2.5.5)$$

de modo que $v_2 > v_1$ e, conseqüentemente, $p_2 < p_1$: nos pontos de estrangulamento, onde a velocidade de escoamento é maior, a pressão é menor.

Este fenômeno foi primeiro observado por Venturi, que esperava obter o resultado

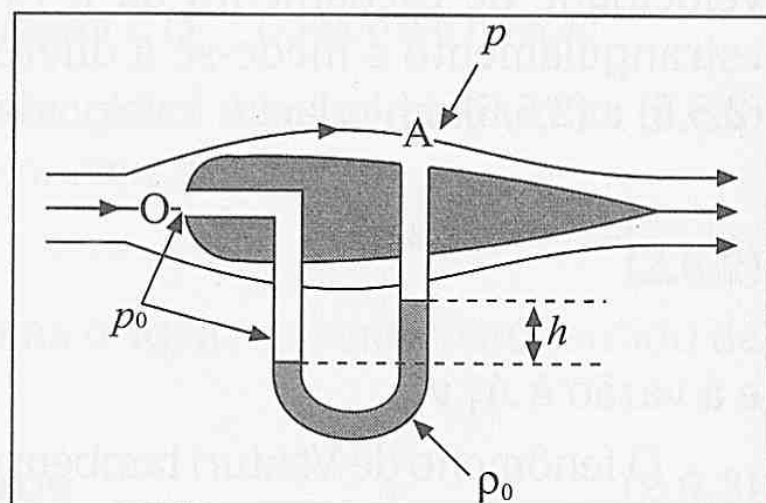


Figura 2.11 — Tubo de Pitot

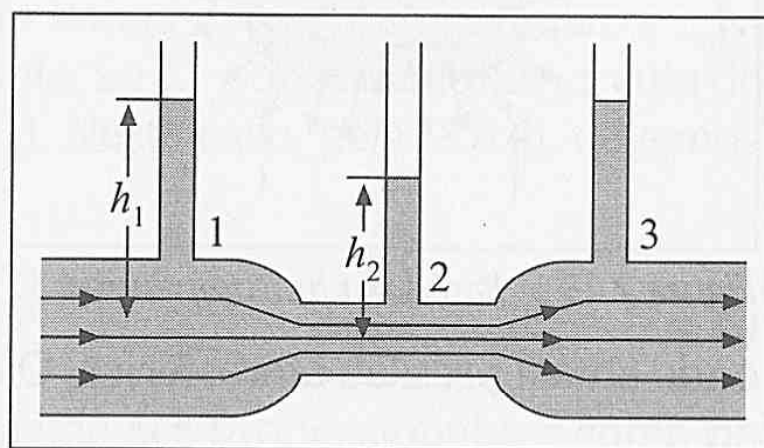


Figura 2.12 Fenômeno de Venturi

contrário, acreditando que a pressão teria de aumentar no estrangulamento, devido ao espaço mais reduzido. Pela constância da vazão, é a velocidade que tem de aumentar, e essa aceleração tem de ser devida a uma força, que só pode se originar de uma queda da pressão.

Na Fig. 2.12, o líquido sobe até alturas h_1 e h_2 em manômetros inseridos nos pontos 1 e 2, o que permite medir a diferença de pressão $p_1 - p_2$:

$$p_1 - p_2 = (p_0 + \rho g h_1) - (p_0 + \rho g h_2) = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h \quad (2.5.6)$$

onde h é a diferença entre as alturas.

Uma aplicação do fenômeno de Venturi é o *medidor de Venturi*, empregado para medir a velocidade de escoamento ou a vazão numa tubulação. Para este fim, insere-se nela um estrangulamento e mede-se a diferença de pressão (como na (2.5.6)). Resolvendo as (2.5.4), (2.5.5) e (2.5.6) em relação à velocidade desejada v_1 , obtém-se:

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}} \quad (2.5.7)$$

e a vazão é $A_1 v_1$.

O fenômeno de Venturi também é aplicado para aspirar fluidos e produzir vácuo, utilizando a queda de pressão num estrangulamento: é o princípio das *bombas aspirantes*, como a trompa de água, que permite evacuar um recipiente até pressões da ordem de 20 mm Hg. A aspiração de ar para mistura com o jato de gás num bico de Bunsen e a aspiração de vapor de gasolina num motor de explosão baseiam-se no mesmo princípio.

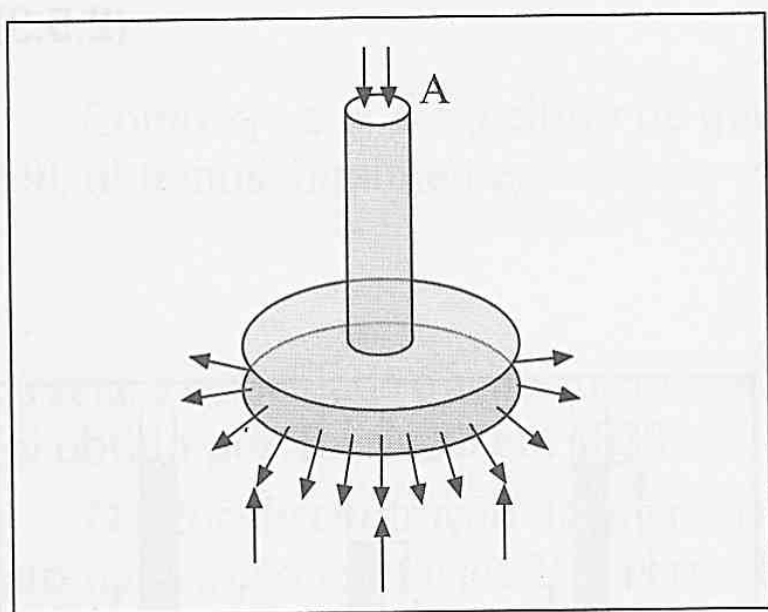


Figura 2.13 — Paradoxo hidrodinâmico

onde atua a pressão atmosférica. O disco inferior é soerguido por essa diferença de pressão.

Se duas folhas de papel estão bem juntas e se procura separá-las soprando no espaço entre elas, elas se grudam uma na outra! A Fig. 2.13 mostra uma forma de realizar essa experiência: soprando pela abertura A de um canudo de papel que se comunica com o espaço entre dois discos de papel bem próximos, o disco de baixo, em lugar de se afastar, é puxado para cima! A explicação desse *paradoxo hidrodinâmico* é o fenômeno de Venturi: o escapamento de ar com grande velocidade reduz a pressão no interstício entre os discos. A face de cima do disco inferior fica então sujeita a uma pressão menor que a de baixo,

2.6 — Circulação, Aplicações

(a) Circulação

Uma grandeza importante para caracterizar o tipo de escoamento de um fluido é a *circulação*. Seja Γ uma curva fechada orientada, ou seja, para a qual é definido um sentido positivo de percurso, situada no interior do fluido. Chama-se *circulação* C_Γ ao longo de Γ a integral de linha.

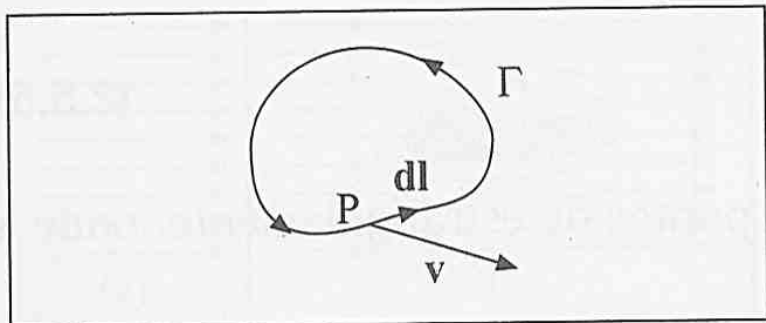


Figura 2.14 — Circulação

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.6.1)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do fluido e $d\mathbf{l}$ o elemento de linha ao longo de Γ , orientado (Fig. 2.14) no sentido

positivo de percurso. Os conceitos de integral de linha e de circulação de um vetor foram introduzidos em 1, Seção 7.3, quando discutimos o trabalho de uma força ao longo de um caminho. Analogamente ao que foi visto nesse caso, só intervém na (2.6.1) a projeção de \mathbf{v} sobre o deslocamento $d\mathbf{l}$ (produto escalar), ou seja, a componente da velocidade ao longo do caminho.

Exemplo 1: Consideremos um recipiente cilíndrico contendo líquido em rotação uniforme com velocidade angular ω (pg. 7).

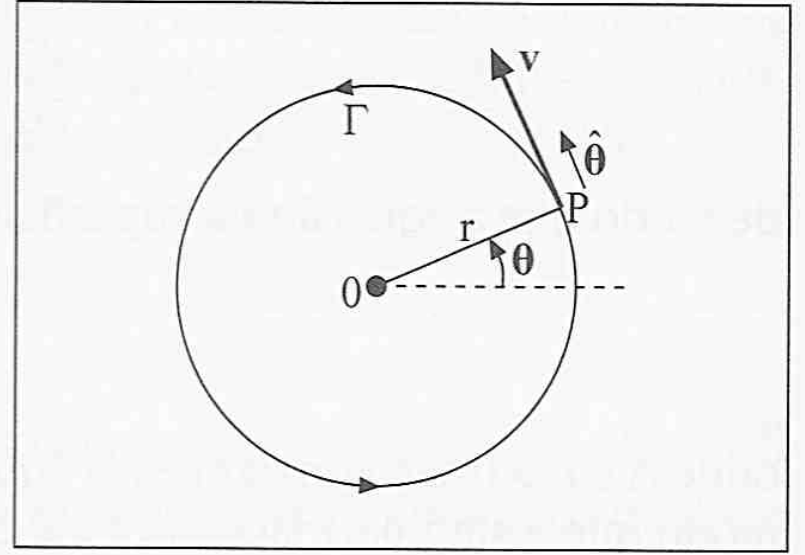


Figura 2.15 — Líquido em rotação

O líquido gira como um corpo rígido com essa velocidade angular. A velocidade \mathbf{v} num ponto P do líquido à distância r do eixo de rotação (Fig. 2.15) é portanto

$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\boldsymbol{\theta}} = v \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.6.2)$$

Se tomarmos para Γ um círculo de raio r com centro na origem, orientado no sentido da rotação, temos

$$d\mathbf{l} = r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \{ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = v r d\theta \} \quad (2.6.3)$$

o que dá

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma v r d\theta = v r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r v \quad (2.6.4)$$

Como Γ coincide com uma linha de corrente, e $|\mathbf{v}| = v$ é constante ao longo dela, C_Γ é neste caso o produto de v pelo comprimento $2\pi r$ do caminho. Como $v = \omega r$, a (2.6.4) dá

$$C_\Gamma = 2\pi r^2 \omega \quad (2.6.5)$$

ou seja, a circulação sobre um círculo de raio r cresce com r^2 .

Exemplo 2: Consideremos agora outro escoamento com linhas de corrente circulares e $|\mathbf{v}|$ função só de r , ao qual impomos a condição de que a circulação C_Γ sobre *qualquer* círculo de raio r com centro no eixo é *constante* (independente de r). Neste caso, pela (2.6.4), devemos ter, em lugar da (2.6.2),

$$v = \frac{C_\Gamma}{2\pi r}, \quad \mathbf{v} = v \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.6.6)$$

ou seja, a velocidade varia inversamente com r , em lugar de ser proporcional a r como na (2.6.2). Como $v \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow 0$, o eixo é uma linha singular, e é preciso geralmente excluir do escoamento um entorno do eixo.

A Fig. 2.16 mostra uma realização prática aproximada deste tipo de escoamento: o líquido escapa do recipiente pelo orifício inferior, circulando em torno do eixo e formando um redemoinho, em que a velocidade aumenta à medida que nos aproximamos do eixo, como quando a água se escoá pelo ralo de uma banheira. A superfície livre assume a forma característica afunilada ilustrada na figura, que podemos explicar imediatamente pela fórmula de Bernoulli (2.4.8): como $p = p_0 = \text{constante}$ (pressão atmosférica) sobre a superfície livre, temos pela (2.6.6),

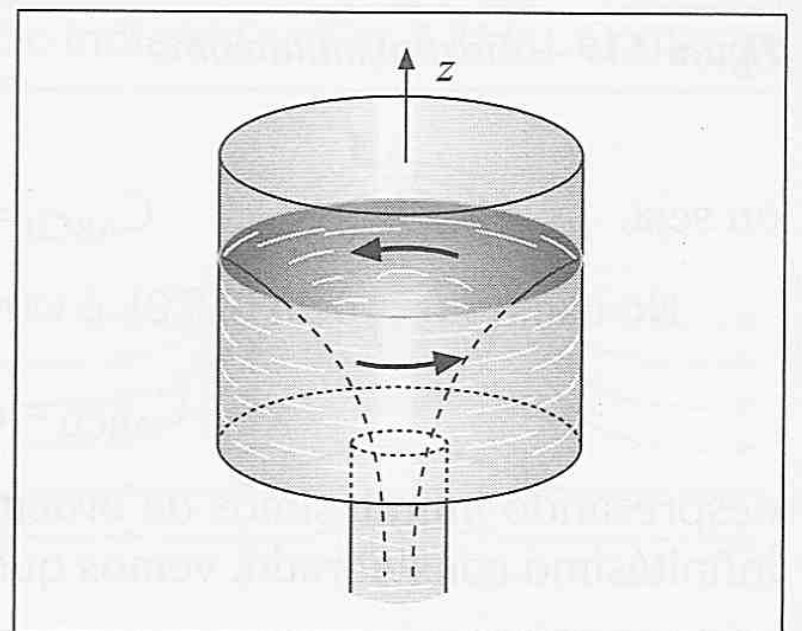


Figura 2.16 — Redemoinho

$$z + \frac{v^2}{2g} = z + \frac{C_\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} = \text{constante},$$

de modo que a equação da superfície livre é

$$z = A - \frac{B}{r^2} \quad (2.6.7)$$

onde A e $B > 0$ são constantes. O líquido ocupa a região externa ao funil centrado no eixo, de modo que a singularidade em $r = 0$ é excluída do campo de escoamento.

(b) Escoamentos rotacionais e irrotacionais

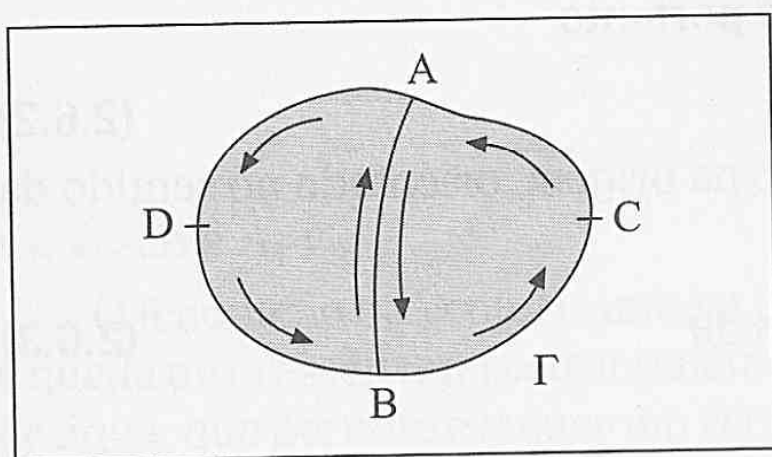


Figura 2.17 — Propriedade aditiva

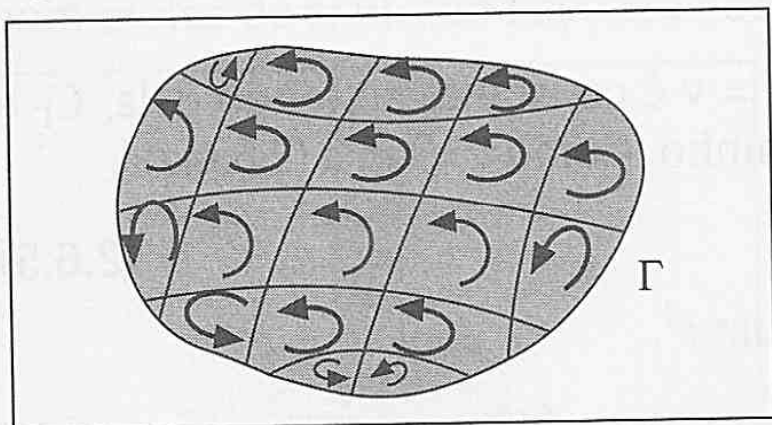


Figura 2.18 — Malha de subcircuitos

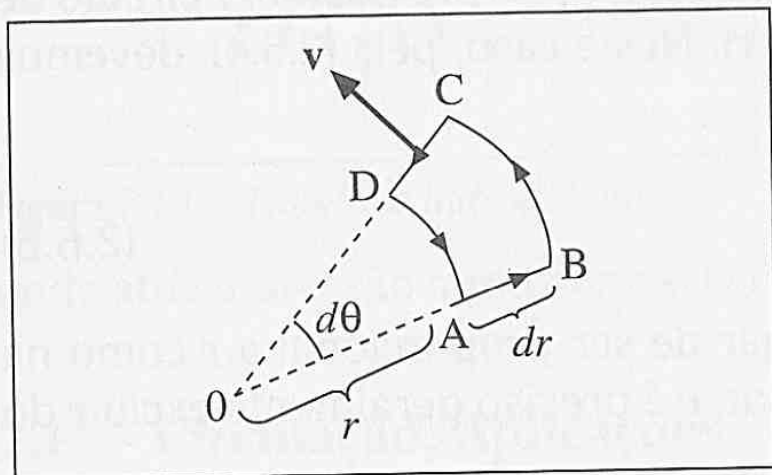


Figura 2.19 — Circuito infinitesimal

A circulação ao longo de um caminho tem uma propriedade aditiva, ilustrada na Fig. 2.17: se decomposermos Γ em dois circuitos de mesma orientação, CABC e BADB, através de uma partição por um arco AB, temos

$$C_\Gamma = C_{CABC} + C_{BADB} \quad (2.6.8)$$

porque a porção comum AB é percorrida duas vezes em sentidos opostos ($d\mathbf{l} \rightarrow -d\mathbf{l}$), e as contribuições correspondentes se cancelam.

Utilizando esta propriedade, podemos tomar uma superfície qualquer de contorno Γ e decompô-la numa malha de subcircuitos de mesma orientação (Fig. 2.18): C_Γ se reduz à soma das circulações ao longo de todos os subcircuitos. Eventualmente, tomando subcircuitos infinitesimais, podemos associar a circulação a uma propriedade local, definida em cada ponto do fluido.

Deste ponto de vista, existe uma diferença fundamental entre os escoamentos dos exemplos 1 e 2 considerados acima. Consideremos um circuito infinitesimal ABCD (Fig. 2.19) de abertura $d\theta$, com centro no eixo, compreendido entre os círculos de raios r e $r + dr$. Em ambos os exemplos, temos $\mathbf{v} = v\hat{\theta}$, onde $v = v(r)$ é função somente de r . Logo, sobre os lados AB e CD, é $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$, e vem

$$C_{ABCD} = v(r + dr) \times \underbrace{\text{arco BC}}_{(r+dr)d\theta} - v(r) \times \underbrace{\text{arco AD}}_{rd\theta}$$

ou seja,

$$C_{ABCD} = [(r + dr)v(r + dr) - rv(r)]d\theta \quad (2.6.9)$$

No exemplo 1, pela (2.6.2), é $v(r) = \omega r$, de modo que

$$C_{ABCD} = \omega[(r + dr)^2 - r^2]d\theta \approx 2\omega \cdot r dr d\theta \quad (2.6.10)$$

desprezando infinitesimais de ordem superior. Como $r dr d\theta$ é a área envolvida pelo circuito infinitesimal considerado, vemos que, para este circuito,

$$C_\Gamma / \text{área}_\Gamma = 2\omega \quad (\text{Exemplo 1}) \quad (2.6.11)$$

onde área_Γ é a área envolvida pelo circuito Γ . Logo, no exemplo 1, a *circulação por unidade de área para um circuito infinitésimo é constante* e igual a 2ω . Pela propriedade aditiva, isto continua valendo para um circuito finito, conforme é ilustrado pela (2.6.5): $C_\Gamma / (\pi r^2) = 2\omega$.

No exemplo 2, pela (2.6.6), é

$$(r + dr)v(r + dr) = rv(r) = C_\Gamma / (2\pi)$$

e a (2.6.9) dá, para o circuito ABCD,

$$C_\Gamma / \text{área}_\Gamma = 0 \quad (\text{exemplo 2}) \tag{2.6.12}$$

Pela propriedade aditiva, este resultado se estende a qualquer circuito *que não envolve o eixo* (já vimos que neste caso o eixo é uma linha singular e deve ser excluído).

Se a circulação por unidade de área no entorno de cada ponto se anula numa dada região, o escoamento nessa região se chama *irrotacional* (exemplo 2). Caso contrário (exemplo 1), o escoamento se diz *rotacional*. A distinção entre estes dois tipos de escoamento é fundamental: no escoamento rotacional, um elemento do fluido com centro num ponto possui momento angular em torno desse ponto, ou seja, gira ao mesmo tempo em que é transportado pelo movimento; no escoamento irrotacional, o momento angular de cada partícula fluida em torno de seu centro é nulo.

Podemos detectar a diferença colocando no interior do fluido uma pequena rodinha de pás: no escoamento rotacional, a rodinha gira enquanto é transportada (exemplo 1, Fig. 2.20 (a)); no escoamento irrotacional, a rodinha é transportada sem girar (exemplo 2, Fig. 2.20 (b)).

Se o escoamento é irrotacional, a propriedade aditiva implica

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{2.6.13}$$

para *qualquer* circuito Γ na região considerada. Por analogia com o que vimos em 1, Seções 7.3 e 7.4, a (2.6.13) implica a existência de uma função ϕ tal que

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \tag{2.6.14}$$

A função ϕ chama-se *potencial de velocidades*, e um escoamento irrotacional é também chamado, por isto, de *escoamento potencial*. Os exemplos de escoamentos nas Seções anteriores são todos irrotacionais.

(c) Efeito Magnus

Se um cilindro é introduzido num campo de escoamento inicialmente uniforme, as linhas de corrente no escoamento em torno do cilindro têm o aspecto indicado na Fig. 2.21 (a). Conforme

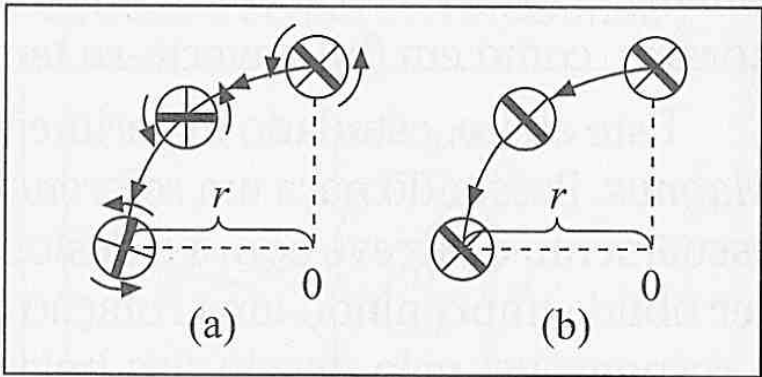


Figura 2.20 — Escoamento rotacional (a) e irrotacional (b)

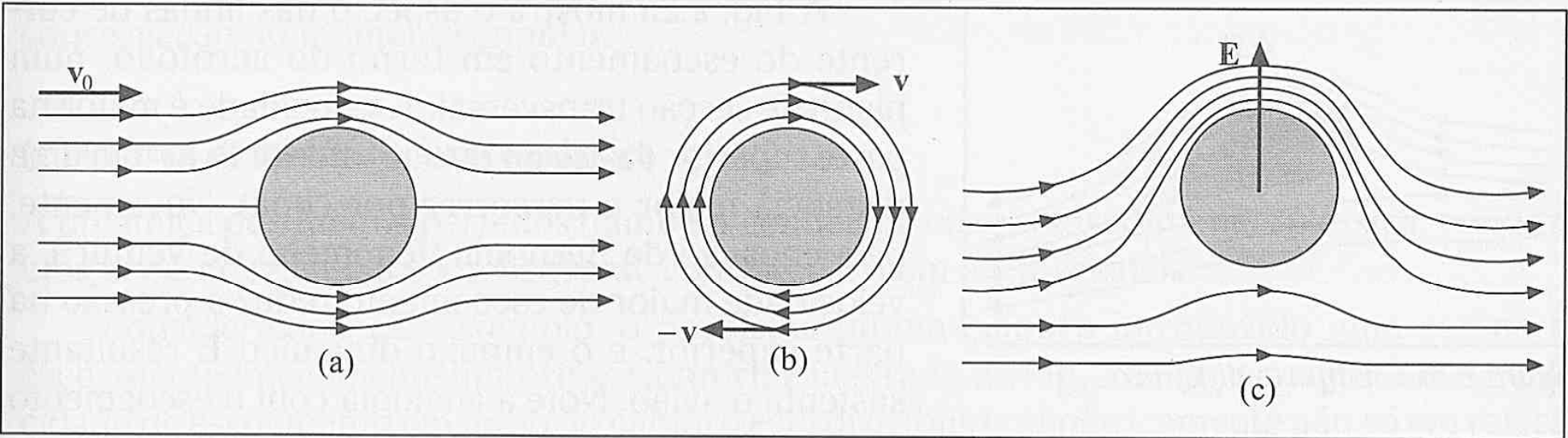


Figura 2.21 — Efeito Magnus

mencionado na Seção 2.2, a velocidade é maior na região onde as linhas de corrente estão mais juntas. A grande distância, o escoamento permanece aproximadamente uniforme. A Fig. 2.21 (b) mostra as linhas de corrente para uma *circulação* constante em torno do cilindro, que é o escoamento do exemplo 2, com Γ dado pela (2.6.6). Finalmente, a Fig. 2.21 (c) mostra as linhas de corrente resultantes da superposição dos dois escoamentos: a velocidade em cada ponto é a soma vetorial das velocidades correspondentes nos escoamentos (a) e (b) (escoamentos irrotacionais de fluidos incompressíveis podem ser superpostos desta forma).

Em pontos acima do cilindro, as velocidades de (a) e (b) se somam em magnitude, ao passo que abaixo se subtraem. Isto dá origem à distribuição assimétrica de linhas de corrente da Fig. 2.21(c), cuja densidade é maior acima do que abaixo do cilindro, correspondendo a uma velocidade de escoamento que assume valores mais elevados na metade superior do cilindro do que na inferior.

Em consequência do fenômeno de Venturi (Seção 2.5 (c)), esta assimetria da distribuição de velocidade produz uma assimetria correspondente da distribuição de pressão sobre o cilindro: a pressão abaixo é maior do que a pressão acima. A resultante das forças de pressão é portanto um empuxo vertical E dirigido para cima (Fig. 2.21 (c)), que se chama *empuxo dinâmico*. Se invertermos o sentido da circulação (tomando-a como anti-horária, em lugar de horária, como em (b)), inverte-se também o sentido de E .

Este efeito, estudado experimentalmente por Magnus em 1853, é conhecido como *efeito Magnus*. Passando para um referencial em que o fluido a grande distância está em repouso, o escoamento descreve agora o deslocamento do cilindro dentro do fluido, e a circulação pode ser obtida imprimindo uma rotação ao *cilindro*. O efeito Magnus, atuando sobre uma esfera, é responsável pelo desvio das bolas de tênis ou pingue-pongue lançadas “com efeito”, de forma a girar rapidamente sobre o próprio eixo.

Em 1920, Flettner propôs utilizar o efeito Magnus para a propulsão de um barco pelo vento, utilizando, em lugar de uma vela, um cilindro vertical em rotação rápida: o empuxo dinâmico é horizontal neste caso. A idéia não alcançou muito sucesso na prática.

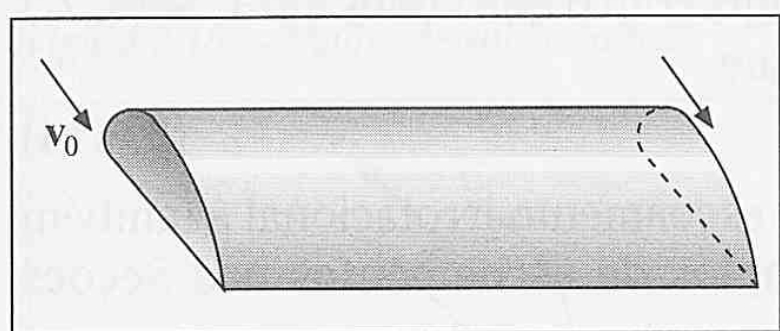


Figura 2.22 — Aerofólio

outro, inserido num campo de escoamento inicialmente uniforme, de velocidade v_0 . Essa é a situação típica num túnel de vento, que simula o deslocamento do avião, com velocidade $-v_0$, através da atmosfera em repouso (visto do referencial do avião).

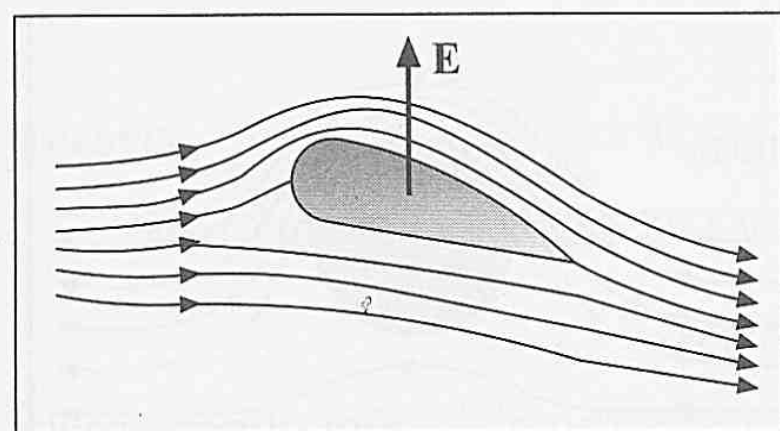


Figura 2.23 — Empuxo dinâmico

O empuxo dinâmico resultante da combinação de um escoamento uniforme com uma circulação também é responsável pela sustentação dos aviões. Consideremos, para simplificar, um modelo “bidimensional” da asa de um avião, conhecido como “aerofólio” (Fig. 2.22). Corresponde a um cilindro muito longo, de perfil arredondado de um lado e afilado do

A Fig. 2.23 mostra o aspecto das linhas de corrente do escoamento em torno do aerofólio, num plano de seção transversal. A velocidade é maior na parte superior da asa do que na inferior (o ar tem uma distância maior a percorrer por cima). Novamente, pela equação de Bernoulli (fenômeno de Venturi), a velocidade maior de escoamento reduz a pressão na parte superior, e o empuxo dinâmico E resultante sustenta o avião. Note a analogia com o escoamento da Fig. 2.21(c): como naquele caso, há uma circulação em torno do aerofólio, de sentido horário.

(d) Conservação da circulação. Vórtices

Em lugar de considerar a circulação C_Γ ao longo de um circuito Γ fixo, podemos também considerar a circulação ao longo de um circuito Γ_t formado sempre das mesmas partículas fluidas, e que portanto varia com o tempo (daí o índice t), acompanhando o fluido no seu deslocamento.

William Thomson (Lord Kelvin) demonstrou em 1869 o seguinte teorema: *No escoamento de um fluido perfeito homogêneo sujeito apenas a forças conservativas, tem-se*

$$\frac{d}{dt}(C_{\Gamma_t}) = 0 \quad (2.6.15)$$

ou seja, a circulação ao longo de um circuito formado sempre das mesmas partículas fluidas se conserva.

Este resultado, que não poderemos demonstrar aqui, tem conseqüências importantes. Se um escoamento é irrotacional num dado instante t_0 , temos $C_{\Gamma_{t_0}} = 0$ para qualquer circuito no fluido. A (2.6.15) mostra então que, nas condições do teorema, o movimento permanece sempre irrotacional. Em particular, para um fluido perfeito homogêneo sujeito apenas a forças conservativas, qualquer escoamento iniciado a partir do repouso é sempre irrotacional.

Vórtices (também conhecidos como turbilhões ou redemoinhos) desempenham um papel importante nos escoamentos rotacionais. Combinando os escoamentos dos Exemplos 1 e 2 (pgs. 27-28), obtemos um modelo de um *filete de vórtice retilíneo*. É constituído por um núcleo cilíndrico de raio r_0 , em que o fluido gira como um corpo rígido, como no Exemplo 1, em torno do qual se toma o escoamento irrotacional de circulação constante (2.6.6), onde $C_\Gamma = 2\pi r_0^2 \omega$ [cf. (2.6.5)]. A Fig. 2.24 mostra o perfil de velocidades, linear na região do núcleo, onde $v = \omega r$, e proporcional a $1/r$ na região externa ao núcleo. O escoamento só é rotacional na região do núcleo, e a circulação em torno do filete é constante.

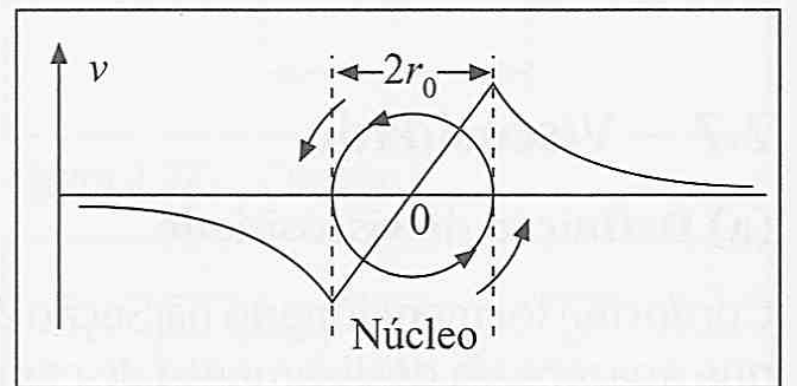


Figura 2.24 — Perfil de velocidades

Um *anel de vórtice* (Fig. 2.25) pode ser pensado como um filete de vórtice cilíndrico que se enrola em forma de anel (toro). O fluido circula em torno do anel enquanto este se desloca, conforme ilustrado na Fig. 2.24. Um exemplo bem conhecido de anéis de vórtice são os anéis de fumaça.

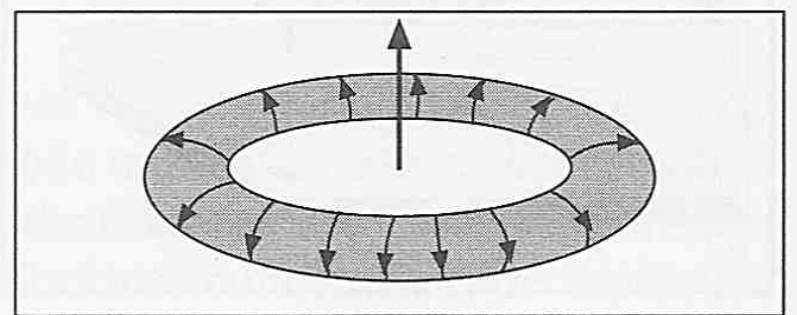


Figura 2.25 — Anel de vórtice

O teorema de Thomson e outros resultados análogos devidos a Helmholtz mostram que, num fluido perfeito, filetes (em particular, anéis) de vórtice, em seu deslocamento, são sempre formados pelas mesmas partículas fluidas, e a circulação em torno deles se conserva. Estes resultados estão relacionados com a lei de conservação do momento angular.

(e) Crítica da hidrodinâmica clássica

A dinâmica dos fluidos perfeitos, também conhecida como hidrodinâmica clássica, conduz a uma série de resultados em flagrante contradição com a experiência.

Consideremos, por exemplo, o problema de um cilindro introduzido num campo de escoamento inicialmente uniforme. Conforme ilustrado na Fig. 2.21 (a), a magnitude da velocidade de escoamento em torno do cilindro está distribuída simetricamente não só em relação ao plano horizontal que passa pelo centro, mas também em relação ao plano vertical. Pela

equação de Bernoulli, a distribuição de pressões em torno do cilindro terá também a mesma simetria. Logo, a resultante das forças de pressão, que é a força exercida pelo fluido sobre o cilindro, se anula* (não só não há empuxo dinâmico, mas também não há componente horizontal da força). A mesma simetria, levando ao mesmo resultado, existe no escoamento em torno de uma esfera.

No referencial em que o fluido a grande distância está em repouso, como vimos, estes escoamentos descrevem o deslocamento do cilindro (ou esfera) através do fluido. Logo, *um fluido perfeito não oferece resistência* a esse deslocamento. Este resultado é válido não só para cilindros e esferas: pode-se mostrar que vale para o escoamento estacionário irrotacional de um fluido perfeito incompressível em torno de qualquer obstáculo finito, o que constitui o *paradoxo de d'Alembert*. Um fluido real, naturalmente, sempre opõe resistência ao deslocamento de um corpo através dele!

Vimos também que, num fluido perfeito sob a ação de forças conservativas, qualquer movimento iniciado a partir de repouso é e permanece irrotacional. Num fluido real, nessas condições, é fácil gerar vórtices e outros movimentos rotacionais.

A origem de todas essas contradições é a hipótese de que o fluido é perfeito, ou seja, tem viscosidade desprezível. Vamos discutir agora, de forma extremamente sumária, alguns efeitos da viscosidade.

2.7 — Viscosidade

(a) Definição da viscosidade

Conforme foi mencionado na Seção 2.3, a viscosidade é uma força volumétrica de *atrito interno* que aparece no deslizamento de camadas fluidas umas sobre outras, dando origem a tensões tangenciais.

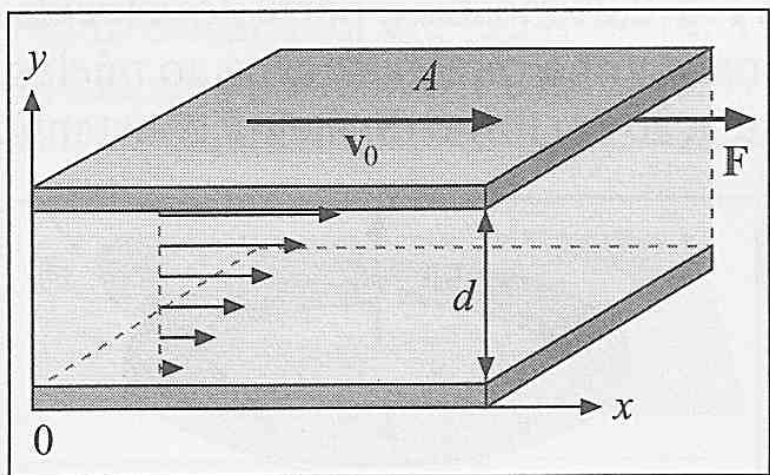


Figura 2.26 — Escoamento viscoso

arrastado juntamente com ela. Assim, o fluido em contato com a placa superior se desloca também com velocidade v_0 . A placa inferior e o fluido em contato com ela permanecem em repouso. A experiência mostra que, neste caso, a velocidade varia *linearmente* entre esses dois extremos no espaço entre as placas, ou seja, com o sistema de coordenadas indicado na Fig. 2.26, e $F = F_i$,

Consideremos uma camada de fluido contida entre duas placas planas paralelas de área A e espaçamento d (Fig. 2.26). A experiência mostra que, se puxarmos a placa superior para a direita, exercendo uma força constante F , ela se desloca com velocidade constante v_0 , de modo que a resistência viscosa do fluido é igual e contrária a F (por quê?).

É um fato experimental que *um fluido real em contato com um sólido permanece em repouso em relação à superfície de contato*, de modo que é

$$v(y) = \frac{v_0}{d} y \mathbf{i} = v(y) \mathbf{i} \tag{2.7.1}$$

O escoamento chama-se *laminar*, porque o fluido se desloca em camadas planas paralelas ou lâminas, que deslizam umas sobre as outras (como as cartas de um baralho).

A tensão tangencial F/A (força por unidade de área) necessária para manter o desloca-

* Não estamos levando em conta as forças gravitacionais, que dão origem ao empuxo hidrostático.

mento da placa superior com velocidade v_0 é dada pela *lei de Newton da viscosidade*

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d} = \eta \frac{dv}{dy} \quad (2.7.2)$$

ou seja, a tensão é proporcional à *taxa de variação espacial da velocidade* (cf. Seq. 1.1).

A constante de proporcionalidade η chama-se *coeficiente de viscosidade* do fluido. A unidade SI de η é o $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, ou seja, $\text{Newton} \times \text{segundo}/\text{m}^2$. A unidade mais empregada na prática é o *centipoise* (cp), dado por

$$1 \text{ cp} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$$

Para um líquido, η é tanto maior quanto mais “espesso” o líquido, e geralmente diminui quando a temperatura aumenta. Para um gás, em geral, η aumenta com a temperatura. Valores típicos a 20°C são $\eta \approx 1 \text{ cp}$ para a água, $\eta \approx 800 \text{ cp}$ para a glicerina; para o ar $\eta \approx 1,8 \times 10^{-2} \text{ cp}$.

O escoamento descrito pela (2.7.1) é um escoamento *rotacional*, como é fácil ver tomando a circulação ao longo do circuito retangular Γ da Fig. 2.27: os lados verticais 2 e 4 não contribuem (porque v é perpendicular a eles), e os lados horizontais, de comprimento l , dão $C_\Gamma = (v_1 - v_3) l$; como a velocidade v_1 no lado 1 é maior que v_3 no lado 3, temos uma circulação positiva no sentido horário.

A Fig. 2.28 mostra o que acontece com uma partícula fluida inicialmente de forma cúbica durante o escoamento: a deformação sofrida pelo fato de a velocidade ser maior em cima do que em baixo está claramente associada a uma rotação no sentido horário.

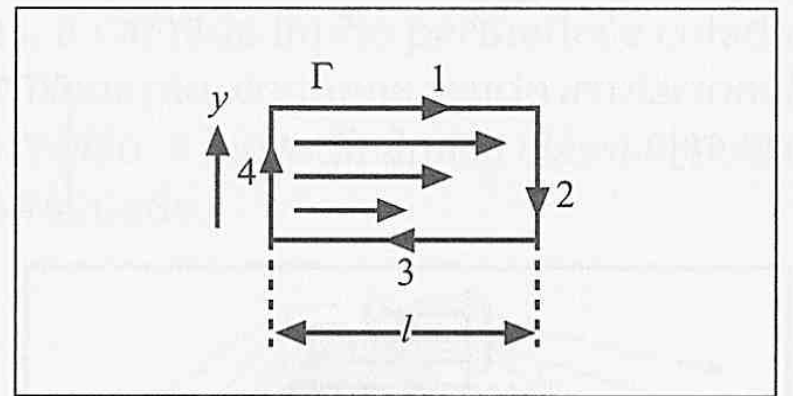


Figura 2.27 — Circuito Γ

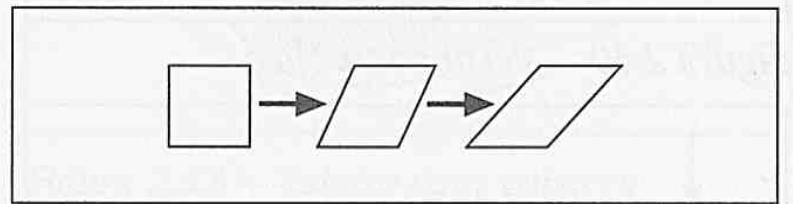


Figura 2.28 — Deformação pelo escoamento

(b) A lei de Hagen-Poiseuille

Consideremos o escoamento de um fluido viscoso através de uma tubulação cilíndrica de secção circular e raio a . Para velocidades de escoamento não muito grandes, o escoamento é laminar, com velocidade máxima no centro do tubo e decrescente até zero nas paredes: podemos imaginar o fluido decomposto em camadas cilíndricas concêntricas de espessura infinitésima que escorregam umas sobre as outras como tubos que se encaixam numa montagem telescópica.

Em regime estacionário, o fluido se escoia através de uma porção de comprimento l (Fig. 2.29) sob o efeito de uma diferença de pressão $p_1 - p_2$, onde p_1 e p_2 são as pressões nas extremidades. Sobre um cilindro fluido coaxial de raio r atua uma força $(p_1 - p_2) \pi r^2$ devido a essa diferença de pressão. Como a área da superfície lateral do cilindro é $2\pi r l$, essa força provoca uma tensão tangencial distribuída sobre essa superfície de valor

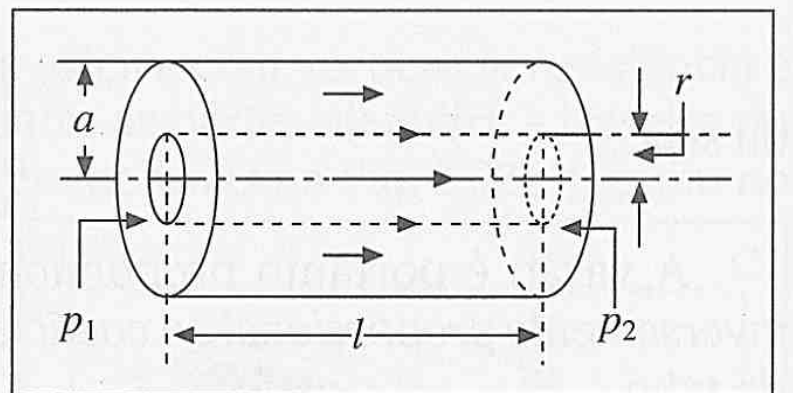


Figura 2.29 — Escoamento viscoso num tubo cilíndrico

$$\frac{F}{A} = \frac{(p_1 - p_2) \pi r^2}{2\pi r l} = \frac{(p_1 - p_2)}{2l} r \quad (2.7.3)$$

A velocidade v de escoamento a uma distância r do eixo só depende de r , $v = v(r)$ e temos $dv/dr < 0$, de modo que a lei de Newton (2.7.2) fica

$$\frac{F}{A} = -\eta \frac{dv}{dr} \quad (2.7.4)$$

Identificando as (2.7.3) e (2.7.4), vem

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} r$$

Integrando ambos os membros em relação a r de um dado valor até a , e lembrando que a velocidade se anula nas paredes ($v(a) = 0$), vem

$$\int_r^a \frac{dv}{dr'} dr' = \int_r^a dv = \underbrace{v(a)}_{=0} - v(r) = -v(r) = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_r^a r' dr' = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_{r'=r}^{r'=a}$$

ou seja

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} (a^2 - r^2) \quad (2.7.5)$$

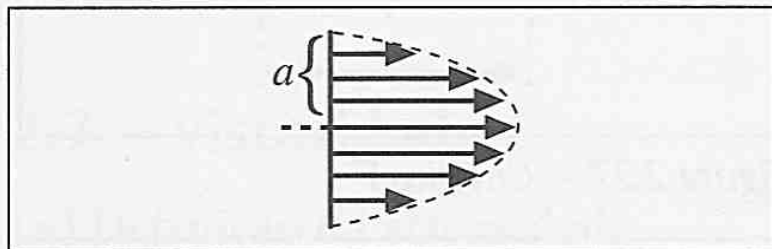


Figura 2.30 — Perfil parabólico

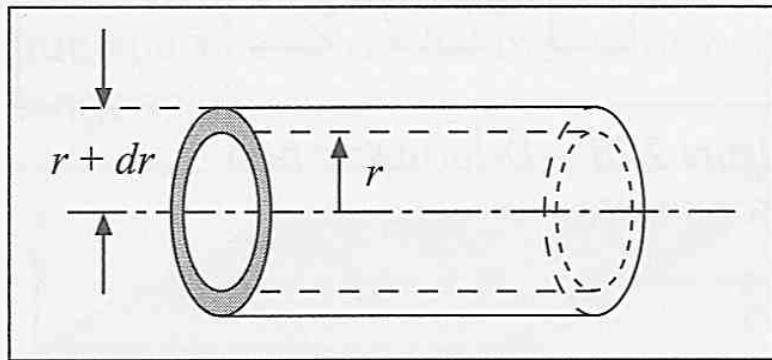


Figura 2.31 — Cálculo da vazão
vem

O gráfico de $v(r)$ em função de r é uma parábola (Fig. 2.30): diz-se que o perfil de velocidades é parabólico.

Para calcular a vazão total V (Seção. 2.2), ou seja, o volume que se escoar por unidade de tempo através da seção do tubo, consideremos primeiro a contribuição dV associada à porção compreendida entre dois cilindros de raios r e $r + dr$ (Fig. 2.31). A área do anel circular correspondente é $2\pi r dr$, e a (2.7.5) dá

$$dV = v(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2l\eta} (a^2 - r^2) r dr$$

onde usamos a (2.7.5). Integrando entre $r = 0$ e $r = a$,

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr$$

$$\underbrace{\int_0^a (a^2 - r^2) r dr}_{a^2 \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}}$$

ou seja,

$$V = \frac{\pi a^4}{8\eta} \left(\frac{p_1 - p_2}{l} \right) \quad (2.7.6)$$

A vazão é portanto *proporcional à queda de pressão por unidade de comprimento, inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade e varia com a quarta potência do raio do tubo.*

A (2.7.6) é a *lei de Hagen-Poiseuille*, obtida experimentalmente por Hagen e Poiseuille entre 1839 e 1846 (Poiseuille, que também era médico, estava investigando o escoamento do sangue através de um capilar). Uma de suas aplicações práticas importantes é para medir o coeficiente de viscosidade η determinando a vazão através de um tubo, em regime de escoamento laminar.

(c) Discussão qualitativa dos efeitos da viscosidade

No escoamento de um fluido perfeito, nada impede que ele deslize sobre um sólido com velocidade tangencial não nula. É o que sucede, por exemplo, no escoamento em torno de um cilindro, representado na Fig. 2.21 (a).

Para um fluido real, a viscosidade não permite esse deslizamento: como vimos, na superfície de contato com o sólido, o fluido tem de estar em repouso em relação a ele.

Para um fluido de viscosidade pequena, como a água, a ação da viscosidade confina-se geralmente a uma camada muito delgada junto à superfície do obstáculo (de espessura muito menor do que as dimensões do obstáculo). Nesta *camada limite*, cuja existência foi sugerida por Prandtl em 1904, a velocidade varia rapidamente, desde um valor nulo, junto à parede, até um valor característico do escoamento, no seio do fluido.

Esta variação da magnitude da velocidade transversalmente à direção do escoamento representa um escoamento *rotacional* dentro da camada limite, conforme vimos na pág. 33. Para velocidades de escoamento suficientemente baixas, a camada limite permanece colada ao obstáculo. O escoamento fora dela, com muito boa aproximação, continua sendo *irrotacional* e praticamente idêntico ao de um fluido perfeito. Nessa região, a *hidrodinâmica clássica* pode ser aplicada, o que a justifica e define o seu domínio de validade.

Para velocidades de escoamento mais elevadas, a camada limite se “descola” do obstáculo, em pontos como A e B na Fig. 2.32, e forma-se uma *esteira* (região A B C da figura), onde aparecem *vórtices*, trazendo um refluxo em direção ao obstáculo.

Continuando a aumentar a velocidade de escoamento, verifica-se que os vórtices se destacam e começam a ser arrastados pelo fluido. À medida que isto acontece, novos vórtices se formam na esteira do obstáculo e vão-se destacando por seu turno, criando *fileiras de vórtices* atrás do obstáculo. O regime de escoamento deixa de ser estacionário.

Para velocidades ainda maiores, o escoamento na esteira do obstáculo toma-se *turbulento*: o movimento é extremamente irregular e aparentemente caótico; as linhas de corrente se emaranham e variam a cada instante.

Por uma mudança de referencial, podemos aplicar estes resultados para discutir o deslocamento do obstáculo através do fluido. A resistência oposta pelo fluido a este deslocamento depende do regime de escoamento. Para baixas velocidades, antes do descolamento da camada limite, a resistência provém do atrito na camada limite, e é proporcional à velocidade v e ao coeficiente de viscosidade η .

Para velocidades mais elevadas, quando se forma a esteira com vórtices, a resistência é dominada pela assimetria na distribuição de pressões entre as partes dianteira e traseira do obstáculo. Na parte dianteira, há um ponto de estagnação (ponto O na Fig. 2.32), e, como no tubo de Pitot (cf. (2. 5. 2)), a pressão dinâmica aumenta por um termo proporcional a v^2 , o que não acontece na esteira do obstáculo. A resistência toma-se então proporcional a v^2 (1, Seção 5.2).

Um corpo de forma aerodinâmica arredondado na parte dianteira e afilado na traseira, como um peixe ou uma asa de avião, dá origem a um escoamento estacionário, em que as linhas de corrente acompanham a forma do corpo (Fig. 2.23), sem descolamento

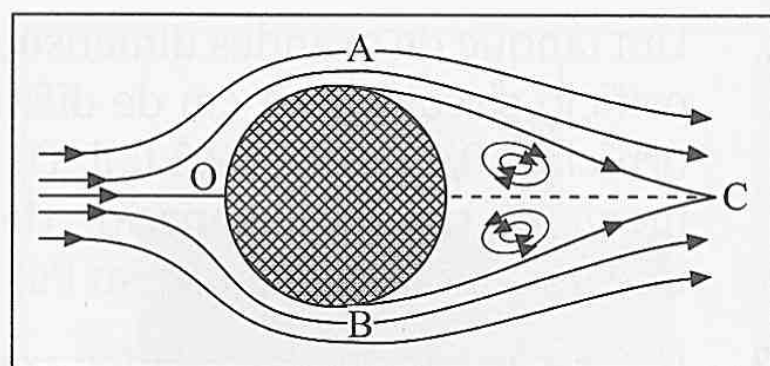


Figura 2.32 — Esteira com vórtices

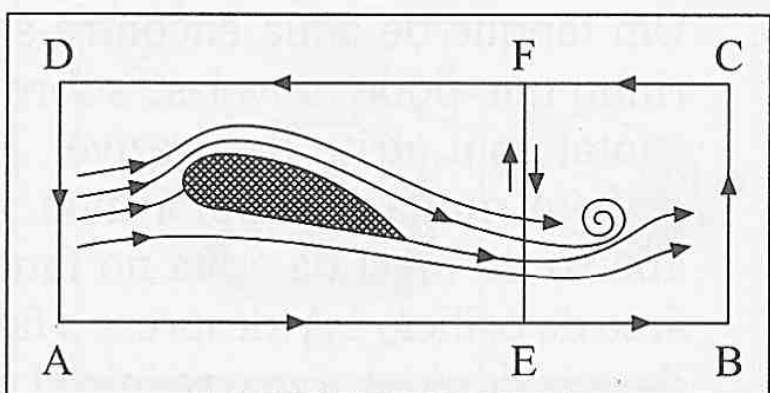


Figura 2.33 — Escoamento em torno de uma asa de avião

da camada limite, o que minimiza a resistência oposta pelo fluido ao deslocamento do corpo.

No caso de uma asa de avião (Fig. 2.33), a descontinuidade na direção da velocidade entre linhas de corrente que passam por cima e por baixo dá origem a um enrolamento da linha de corrente que passa pela ponta afilada, gerando vórtices. A circulação ao longo de um circuito A B C D suficientemente distante para que o fluido possa ser tratado como perfeito era inicialmente nula, e permanece nula pelo teorema de Thomson (2.6.15). Na porção E B C F que envolve o vórtice (Fig. 2.33), há uma circulação anti-horária. Logo, cria-se assim uma circulação horária no circuito A E F D que envolve a asa, dando origem ao empuxo dinâmico que sustenta o peso do avião. A resistência ao deslocamento é compensada pela tração do motor.

O tratamento teórico de muitos dos problemas aqui descritos é extremamente difícil e encontra-se ainda incompleto. Em particular, estamos longe de ter uma compreensão satisfatória do mecanismo de aparecimento da turbulência e do regime turbulento, embora haja importantes progressos recentes nesse sentido.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 2

1. Um tanque de grandes dimensões contém água até a altura de 1 m e tem na sua base um orifício circular de 1 cm de diâmetro. O fator de contração da veia líquida que sai pelo orifício é 0,69 [Seção 2.5 (a)]. Deseja-se alimentar o tanque, despejando água continuamente na sua parte superior, de forma a manter constante o nível da água no tanque. Calcule a vazão de água (em l/s) necessária para este fim.
2. Um reservatório de paredes verticais, colocado sobre um terreno horizontal, contém água até a altura h . Se abrirmos um pequeno orifício numa parede lateral, (a) A que distância máxima d da parede o jato de água que sai pelo orifício poderá atingir o chão? (b) Em que altura deve estar o orifício para que essa distância máxima seja atingida?
3. Um reservatório contém água até 0,5 m de altura e, sobre a água, uma camada de óleo de densidade $0,69 \text{ g/cm}^3$, também com 0,5 m de altura. Abre-se um pequeno orifício na base do reservatório. Qual é a velocidade de escoamento da água?
4. Um tubo contendo ar comprimido a uma pressão de 1,25 atm tem um vazamento através de um pequeno orifício em sua parede lateral. Sabendo que a densidade do ar na atmosfera é de $1,3 \text{ kg/m}^3$, calcule a velocidade de escapamento do ar através do orifício.
5. Um modelo aproximado da câmara de combustão de um foguete é um recipiente contendo gás que se mantém a uma pressão constante p , com um orifício pelo qual o gás escapa para o exterior, onde a pressão é $p_0 < p$. Tratando o gás como um fluido incompressível, demonstre que o empuxo resultante sobre o foguete (1, Seção 8.5) é igual a $2A(p - p_0)$, onde A é a área do orifício.
6. Um tanque de água encontra-se sobre um carrinho que pode mover-se sobre um trilho horizontal com atrito desprezível. Há um pequeno orifício numa parede, a uma profundidade h abaixo do nível da água no tanque (Fig. P.1). A área do orifício é A (despreze o fator de contração da veia líquida), a massa inicial da água é M_0 e a massa do carrinho e do tanque é m_0 . Qual é a aceleração inicial do carrinho?

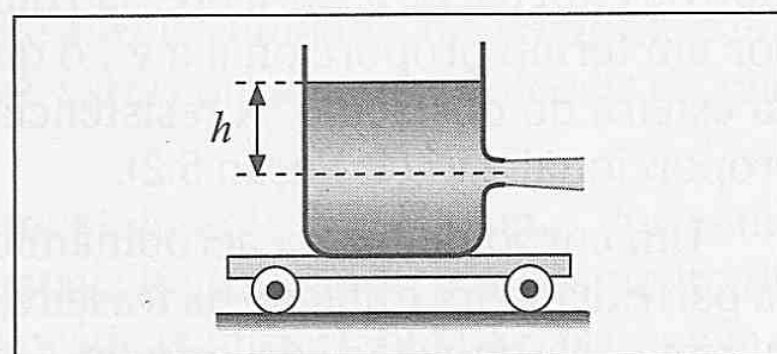


Figura P.1

7. Uma ampulheta é formada, de cada lado, por um tronco de cone circular de altura $h = 10$ cm, raio da base maior $R = 10$ cm e raio da base menor $r = 0,1$ cm. Após enchê-la de água até a metade, ela é invertida (Fig. P.2). (a) Calcule a velocidade inicial de descida do nível da água; (b) Calcule a velocidade de descida do nível depois de ele ter baixado de 5 cm; (c) Que forma deveria ter a superfície lateral (de revolução) da ampulheta para que o nível da água baixasse uniformemente (relógio de água)?
8. Um filete de água escorre verticalmente de uma torneira de raio a , com escoamento estacionário de vazão Q . Ache a forma do jato de água que cai, determinando o raio ρ da seção transversal em função da altura z de queda (Fig. P.3).
9. Dois tubinhos de mesmo diâmetro, um retilíneo e o outro com um cotovelo, estão imersos numa correnteza horizontal de água de velocidade v . A diferença entre os níveis da água nos dois tubinhos é $h = 5$ cm (Fig. P. 4). Calcule v .
10. A Fig. P. 5 ilustra uma variante do tubo de Pitot, empregada para medir a velocidade v de escoamento de um fluido de densidade ρ . Calcule v em função do desnível h entre os dois ramos do manômetro e da densidade ρ_f do fluido manométrico.
11. Um medidor tipo Venturi é inserido numa tubulação inclinada de raio R , onde se esco um fluido de densidade ρ . O estreitamento tem raio r e os ramos do manômetro são inseridos em pontos de alturas z_1 e z_2 (Fig. P. 6); o líquido manométrico tem densidade ρ_f . Calcule a vazão Q do fluido na tubulação em função destes dados e do desnível h entre os dois ramos do manômetro.

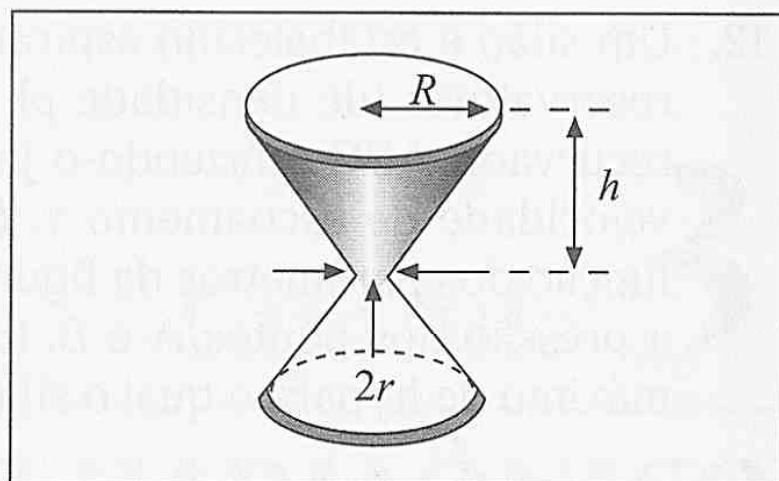


Figura P.2

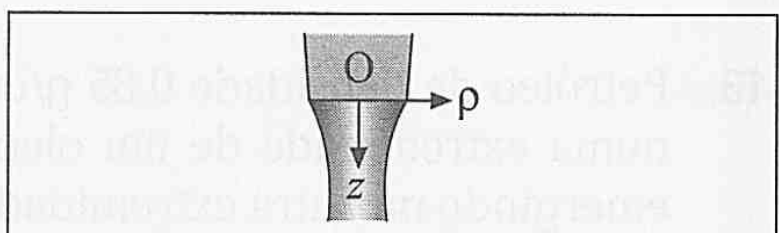


Figura P.3

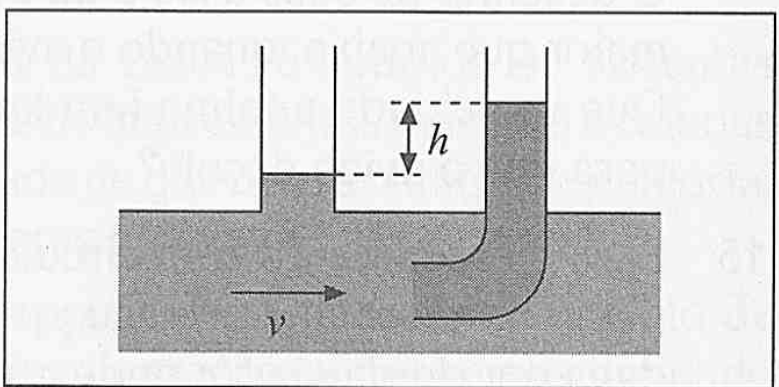


Figura P.4

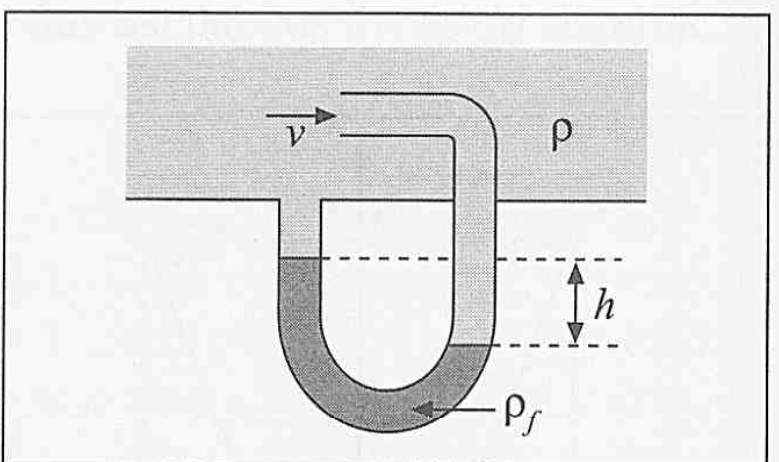


Figura P.5

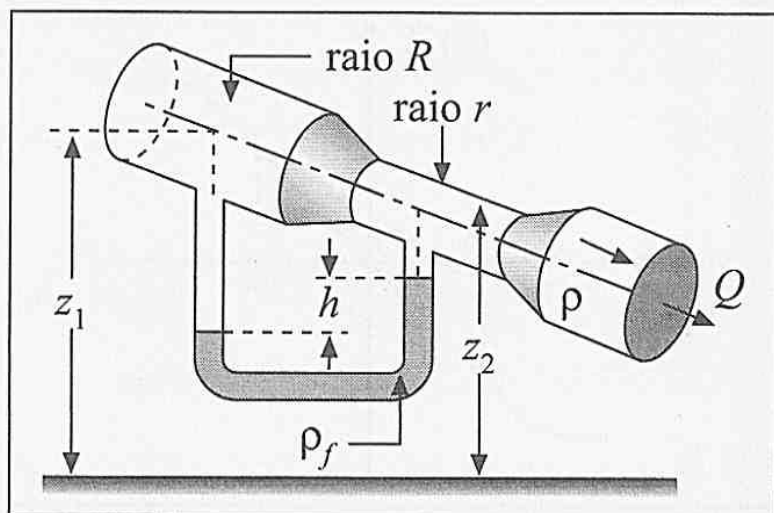


Figura P.6

12. Um sifão é estabelecido aspirando o líquido do reservatório (de densidade ρ) através do tubo recurvado ABC e fazendo-o jorrar em C, com velocidade de escoamento v . (a) Calcule v em função dos parâmetros da figura P.7. (b) Calcule a pressão nos pontos A e B. (c) Qual é o valor máximo de h_0 para o qual o sifão funciona?

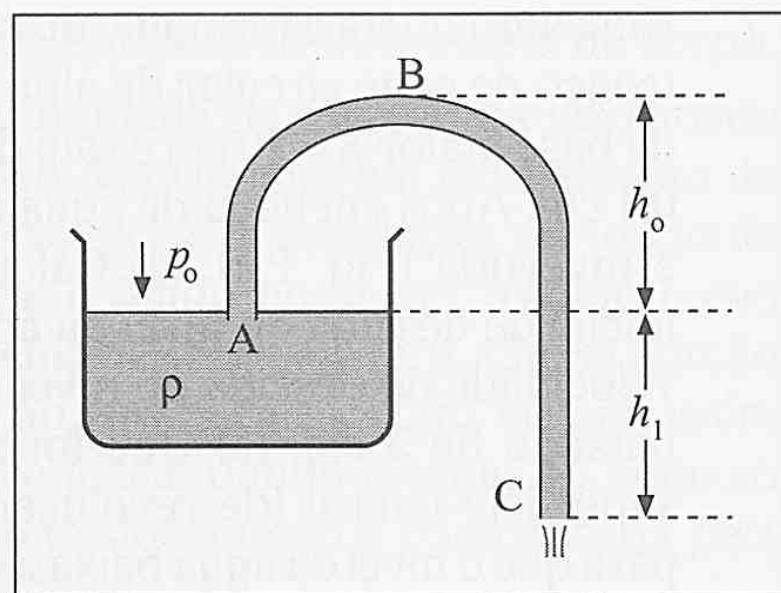


Figura P.7

13. Petróleo de densidade $0,85 \text{ g/cm}^3$ e viscosidade 1 poise é injetado, à pressão de 5 atm, numa extremidade de um oleoduto de 20 cm de diâmetro e 50 km de comprimento, emergindo na outra extremidade à pressão atmosférica. (a) Calcule a vazão em litros/dia; (b) Calcule a velocidade de escoamento ao longo do eixo do oleoduto.
14. Um avião tem uma massa total de 2.000 kg e a área total coberta por suas asas é de 30 m^2 . O desenho de suas asas é tal que a velocidade de escoamento acima delas é 1,25 vezes maior que abaixo, quando o avião está decolando. A densidade da atmosfera é $1,3 \text{ kg/m}^3$. Que velocidade mínima (em km/h) de escoamento acima das asas precisa ser atingida para que o avião decole?
15. Para o escoamento com circulação constante definido pela (2.6.6), demonstre que, num plano horizontal, a pressão p varia com a distância r ao eixo com uma taxa de variação dada por $dp/dr = \rho v^2/r$, onde ρ é a densidade do fluido. Interprete este resultado. Obtenha p como função de r a partir desta equação e explique o resultado obtido.

Capítulo 3

O OSCILADOR HARMÔNICO

3.1 — Introdução

Neste capítulo e nos que se seguem, vamos abordar o estudo de *oscilações* e *ondas*, fenômenos de importância fundamental na física. As oscilações correspondem a vibrações localizadas, ao passo que ondas estão associadas à propagação.

Oscilações são encontradas em todos os campos da física. Exemplos de sistemas mecânicos vibratórios incluem pêndulos, diapasons, cordas de instrumentos musicais e colunas de ar em instrumentos de sopro. A corrente elétrica alternada de que nos servimos é oscilatória, e oscilações da corrente em circuitos elétricos têm inúmeras aplicações importantes.

Um pêndulo desviado da posição de equilíbrio e depois solto fornece um exemplo de *oscilações livres*, em que o sistema, após ser estabelecida a configuração inicial, não é submetido a forças externas oscilatórias, e estabelece seu próprio período de oscilação, determinado pelos parâmetros que o caracterizam. Se submetemos o pêndulo a impulsos externos periódicos, teremos uma *oscilação forçada*, em que é preciso levar em conta também o período das forças externas e sua relação com o período próprio das oscilações livres do sistema.

Os sistemas oscilantes mais simples, que estudaremos inicialmente, têm apenas *um grau de liberdade*, ou seja (conforme 1, Seção 11.1), são descritos por uma única coordenada, por exemplo o ângulo de desvio do pêndulo em relação à posição vertical de equilíbrio.

Já vimos de forma qualitativa no curso anterior (1, Seção 6.5) como surgem oscilações periódicas no movimento unidimensional sob a ação de forças conservativas, associadas a uma energia potencial $U(x)$. Num entorno de uma posição de equilíbrio estável, $U(x)$ tem a forma de um “poço de potencial”, com um mínimo na posição de equilíbrio, que pode ser tomada como origem O (Fig. 3.1). Para uma dada energia E , a partícula oscila periodicamente entre os pontos de retorno x_1 e x_2 . A Fig. 3.1 também mostra o gráfico da força $F(x)$, dada por

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (3.1.1)$$

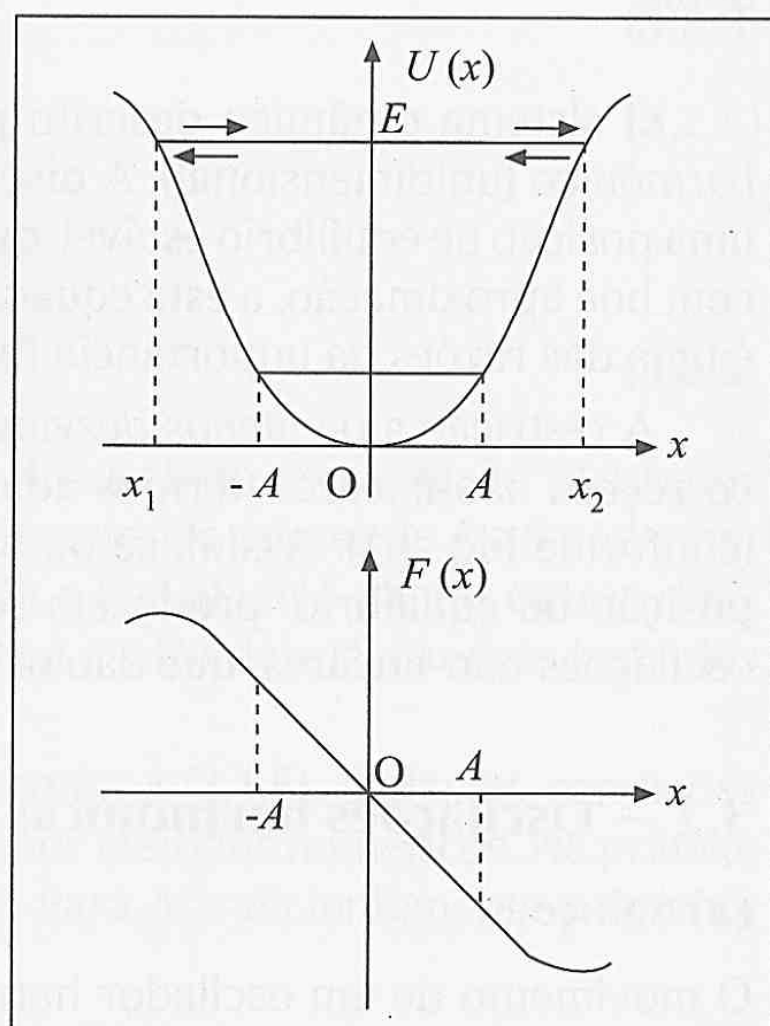


Figura 3.1 — Energia potencial U e força F num movimento oscilatório

Vimos também que, para pequenos desvios da posição de equilíbrio estável, o gráfico de $F(x)$ é aproximadamente linear. Assim, na Fig. 3.1, para $-A \leq x \leq A$, temos aproximadamente

$$F(x) = -kx \quad (3.1.2)$$

ou seja, a força restauradora, que tende a fazer a partícula voltar à posição de equilíbrio ($k > 0$), *obedece aproximadamente à lei de Hooke* (conforme 1, Seções 5.2 e 6.3). Correspondentemente, $U(x)$ pode ser aproximado nessa região por [1, (6.4.5)]

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.1.3)$$

ou seja, num entorno suficientemente pequeno de um mínimo, podemos aproximar $U(x)$ por uma parábola. Note que a (3.1.2) se obtém da (3.1.3) por derivação, de acordo com a (3.1.1).

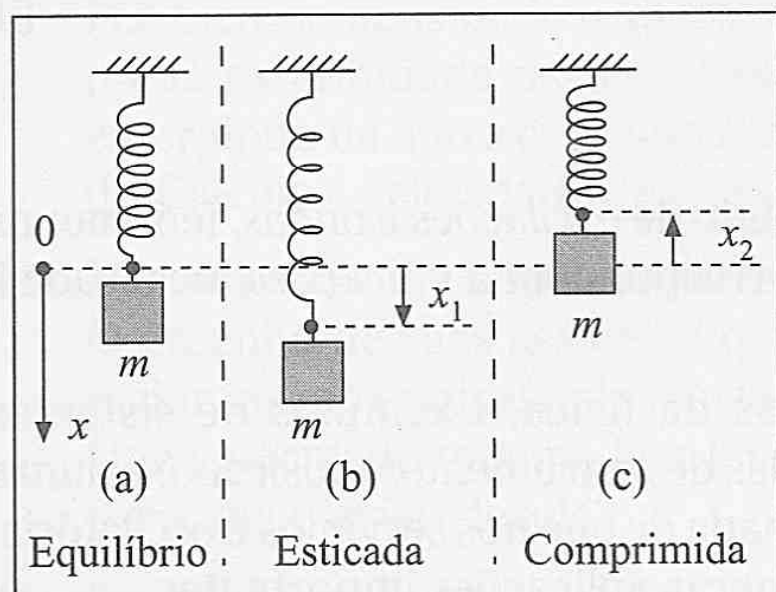


Figura 3.2 — Massa e mola

Um exemplo simples é o sistema constituído por uma massa m suspensa verticalmente por uma mola. A Fig. 3.2 (a) mostra a posição de equilíbrio estável, em que a força devida à distensão da mola equilibra o peso. Em (b), a mola foi esticada, sofrendo um deslocamento $x_1 > 0$ em relação ao nível de equilíbrio estável correspondente a $x = 0$. Em (c), ela foi comprimida, com um deslocamento $x_2 < 0$. A força restauradora é dada pela (3.1.2), onde k é a constante da mola.

A equação de movimento correspondente é

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad (3.1.4)$$

ou seja,

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (3.1.5)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.6)$$

O sistema dinâmico descrito pela equação de movimento (3.1.5) chama-se *oscilador harmônico* (unidimensional). A discussão precedente mostra que, para *pequenos* desvios de uma posição de equilíbrio estável, qualquer sistema com um grau de liberdade deve obedecer, com boa aproximação, a esta equação de movimento. Esta grande generalidade de aplicação é uma das razões da importância fundamental do oscilador harmônico.

A restrição a *pequenos desvios* é importante. Para desvios maiores, tendem a aparecer *correções não-lineares* (termos adicionais proporcionais a x^2 , x^3 , ...) na lei de forças (3.1.2) (conforme Fig. 3.1). Assim, se passarmos do *limite elástico* de uma mola, ela não retorna à posição de equilíbrio: produzem-se deformações permanentes. Não vamos considerar as oscilações não-lineares, que dão origem a efeitos mais complicados.

3.2 — Oscilações harmônicas

(a) Soluções

O movimento de um oscilador harmônico chama-se *movimento harmônico simples* (MHS). Para obter a lei horária do MHS, temos de resolver a equação de movimento (3.1.5) em relação à função incógnita $x(t)$. A (3.1.5) é uma *equação diferencial ordinária* para $x(t)$, porque contém

derivadas de x em relação a t . Ela é de 2.^a ordem, porque a derivada mais elevada que aparece é a 2.^a.

Em 1, Seção 2.5, já resolvemos uma equação diferencial ordinária de 2.^a ordem, a equação do movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante} \quad (3.2.1)$$

Vimos que, integrando ambos os membros em relação a t , obtemos a lei de variação da velocidade,

$$\int_0^t \frac{d^2x}{dt^2} dt = \underbrace{\left[\frac{dx}{dt} \right]_0^t}_v = v(t) - \underbrace{v(0)}_{v_0} = a \int_0^t dt = at$$

ou seja,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

onde v_0 é a *velocidade inicial*. Integrando novamente em relação a t ,

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'} dt' = [x]_0^t = x(t) - \underbrace{x(0)}_{x_0} = v_0 \int_0^t dt' + a \int_0^t t' dt' = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

ou seja, finalmente, sendo x_0 a posição inicial,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (3.2.2)$$

Este resultado familiar ilustra o fato de que a *solução geral de uma equação diferencial ordinária de 2.^a ordem depende de duas constantes arbitrárias*, que na (3.2.2) correspondem às condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(0) = v(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Poderíamos também ter reconhecido que

$$x(t) = A + Bt + \frac{1}{2} at^2 \quad (3.2.5)$$

é solução da (3.2.1) quaisquer que sejam as constantes A e B ; logo, é a solução geral, por conter duas constantes arbitrárias ajustáveis independentemente. Os valores de A e B poderiam então ser obtidos seja dando as condições iniciais (3.2.3) e (3.2.4), seja dando outras duas condições equivalentes, como por exemplo os valores $x(t_1)$ e $x(t_2)$ de $x(t)$ em dois instantes diferentes t_1 e t_2 .

Para resolver uma equação diferencial mais geral, como a (3.1.5), dadas as condições iniciais, podemos sempre procurar soluções aproximadas por métodos numéricos. Na prática, isto se faz efetivamente com o auxílio de computadores. Para Δt suficientemente pequeno, podemos aproximar

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{dx}{dt}(t + \Delta t) - \frac{dx}{dt}(t) \right] \quad (3.2.6)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [x(t + \Delta t) - x(t)] \quad (3.2.7)$$

Logo, partindo de $t = 0$, onde são dadas as (3.2.3) e (3.2.4), obtemos

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \Delta t \frac{dx}{dt}(0) = x_0 + v_0 \Delta t \quad (3.2.8)$$

$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) \approx \frac{dx}{dt}(0) + \Delta t \cdot \underbrace{\frac{d^2 x}{dt^2}(0)}_{=-\omega^2 x(0)} = v_0 - \omega^2 x_0 \Delta t \quad (3.2.9)$$

onde usamos também a equação diferencial (3.1.5). As (3.2.8) e (3.2.9) definem um novo par de “condições iniciais”, mas agora no instante Δt .

Repetindo o mesmo processo, obteríamos x e $\frac{dx}{dt}$ no instante $2\Delta t$, e assim sucessivamente.

Num gráfico de x em função de t , unindo os pontos assim obtidos $x(0)$, $x(\Delta t)$, $x(2\Delta t)$, ... por segmentos de reta, obtém-se uma poligonal, que se aproxima tanto mais da curva solução $x(t)$ quanto menor o intervalo Δt .

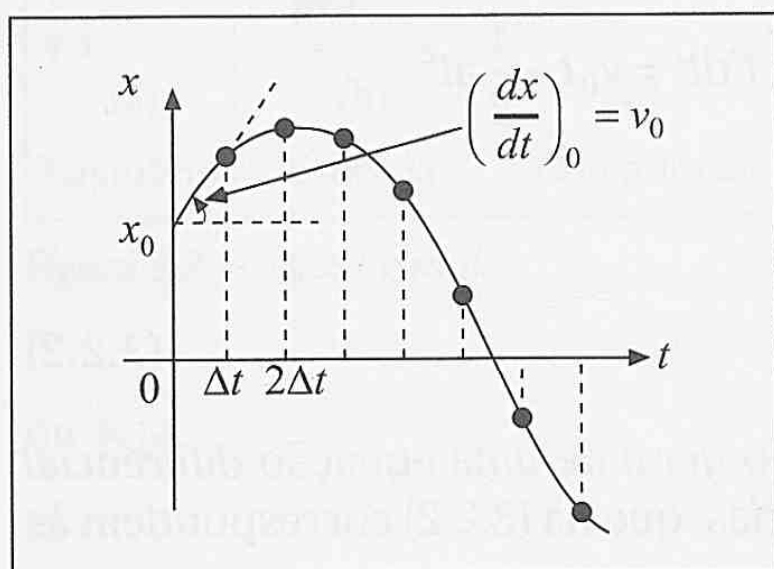


Figura 3.3 — Resolução numérica

A Fig. 3.3 mostra o aspecto qualitativo da solução aproximada obtida desta forma (tomamos $x_0 > 0$, $v_0 > 0$).

A (3.1.5) se escreve

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\omega^2 x \quad (3.2.10)$$

Logo, para $x > 0$, o coeficiente angular dx/dt da tangente à curva decresce quando passamos de t a $t + \Delta t$: a declividade diminui, passa pelo zero (tangente horizontal) e depois torna-se negativa e crescente em valor absoluto.

Por conseguinte, enquanto está acima do eixo das abscissas, a curva é côncava para baixo; quando passa para baixo do eixo ($x < 0$), é o contrário: a concavidade fica voltada para cima. Isto caracteriza o comportamento *oscilatório*. A (3.2.10) também mostra que a curvatura é tanto mais acentuada quanto maior for $|x|$.

O gráfico aproximado lembra uma senóide, sugerindo considerar soluções do tipo $\text{sen}(ct)$, $\text{cos}(ct)$, onde c é uma constante a ser ajustada. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\text{sen}(ct)] &= c \text{cos}(ct) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[\text{sen}(ct)] &= -c^2 \text{sen}(ct) \end{aligned} \right. \\ \frac{d}{dt}[\text{cos}(ct)] &= -c \text{sen}(ct) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[\text{cos}(ct)] &= -c^2 \text{cos}(ct) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Logo, tomando $c = \omega$, obtemos as seguintes soluções da (3.1.5):

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \text{cos}(\omega t) \\ x_2(t) &= \text{sen}(\omega t) \end{aligned}} \quad (3.2.11)$$

(b) Linearidade e princípio de superposição

A (3.1.5) é uma equação diferencial *linear*, ou seja, só contém termos *lineares* na função incógnita e suas derivadas: não aparecem termos em x^2 , x^3 , ..., $(dx/dt)^2$, ..., $(d^2x/dt^2)^3$, A equação diferencial linear de 2.^a ordem mais geral é da forma

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = F \quad (3.2.12)$$

onde os coeficientes A , B , C e F não dependem de x , mas poderiam, em geral, depender de t . Na (3.1.5), esses coeficientes são *constantes*. Além disso, a (3.1.5) é uma equação *homogênea*, ou seja, com

$$F = 0 \quad (3.2.13)$$

Qualquer equação diferencial linear de 2.^a ordem homogênea tem as seguintes propriedades fundamentais, cuja verificação é imediata:

- (i) Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, $x_1(t) + x_2(t)$ também é.
- (ii) Se $x(t)$ é solução, $ax(t)$ ($a = \text{constante}$) também é.

Note que estes resultados não seriam válidos para equações não-lineares: por exemplo, se o 2.^o membro da (3.1.5) fosse proporcional a x^2 em lugar de x (verifique!).

Combinando (i) e (ii), vemos que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, qualquer combinação linear

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (3.2.14)$$

onde a e b são constantes arbitrárias, é solução.

Este resultado é uma forma do *princípio de superposição*. Resultados análogos valem para equações diferenciais lineares de ordem qualquer, como é fácil ver.

Uma consequência imediata é que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções *independentes*, ou seja, se $x_2(t)$ não é múltipla de $x_1(t)$, a (3.2.14) é a solução geral, pois depende de duas constantes arbitrárias a e b [se $x_2(t)$ fosse múltipla de $x_1(t)$, $x_2(t) = cx_1(t)$, a (3.2.14) ficaria: $x(t) = (a + bc)x_1(t) = dx_1(t)$, ou seja, só teríamos uma constante efetivamente ajustável].

Aplicando a (3.2.14) à (3.2.11), obtemos a forma geral das oscilações livres do oscilador harmônico:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (3.2.15)$$

o que também podemos escrever de outra forma equivalente:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.16)$$

onde as duas constantes arbitrárias passam a ser A e φ .

É fácil obter a relação entre essas duas formas de escrever a solução. Como $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$, vem

$$a = A \cos \varphi, \quad b = -A \sin \varphi \quad (3.2.17)$$

Inversamente, dados a e b , podemos obter A e φ :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

o que determina φ a menos de um múltiplo de 2π , ou seja, de forma consistente com a (3.2.16), onde φ só é definido a menos de um múltiplo de 2π .

(c) Interpretação física dos parâmetros

Pela (3.2.16), vemos que $x(t)$ oscila entre os valores extremos $-A$ e A (conforme Fig. 3.1). Logo, $A = |x(t)|_{\text{máx}} = \text{amplitude de oscilação}$.

Como $\cos(\omega t + \varphi)$ é uma função periódica de ωt de período 2π , vemos que o período de oscilação é

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

(3.2.19)

onde ν , a *freqüência* de oscilação, se mede em ciclos por segundo ou hertz (Hz). A grandeza $\omega = 2\pi\nu$ chama-se *freqüência angular* e se mede em rad/s ou simplesmente s^{-1} . O argumento do co-seno na (3.2.16),

$$\theta = \omega t + \varphi$$

(3.2.20)

chama-se *fase* do movimento, e φ é a *constante de fase* ou *fase inicial* (valor da fase para $t = 0$).

A Fig. 3.4 mostra o efeito de variar φ mantendo constantes os demais parâmetros: desloca a curva como um todo, começando num ponto diferente. Diz-se que a oscilação com $\varphi = \pi/2$ (90°) está em *quadratura* em relação a $\varphi = 0$: quando $|x|$ é máximo numa, é nulo na outra. A oscilação com $\varphi = \pi$ (180°) está em *oposição de fase* em relação a $\varphi = 0$: os valores de x em instantes correspondentes são iguais e contrários.

Note que, pelas (3.2.19) e (3.1.6), o período de oscilação é independente da amplitude, o que, conforme veremos depois, deixa de valer para oscilações não-lineares. A (3.1.6) se escreve

$$\omega^2 = k / m$$

(3.2.21)

Como $k = |F/x|$ pela (3.1.4), isto equivale a

$$\omega^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{força restauradora por unidade de} \\ \text{deslocamento e por unidade de massa} \end{array} \right\}$$

(3.2.22)

o que vale para sistemas vibrantes em geral: quanto maior a força restauradora por unidade de deslocamento do equilíbrio e quanto menor a inércia (massa), mais rápidas são as oscilações.

(d) Ajuste das condições iniciais

A (3.2.16) dá

$$\dot{x}(t) = v(t) = -\omega A \text{ sen}(\omega t + \varphi)$$

(3.2.23)

de modo que, para satisfazer as condições iniciais (3.2.3) e (3.2.4), devemos ter

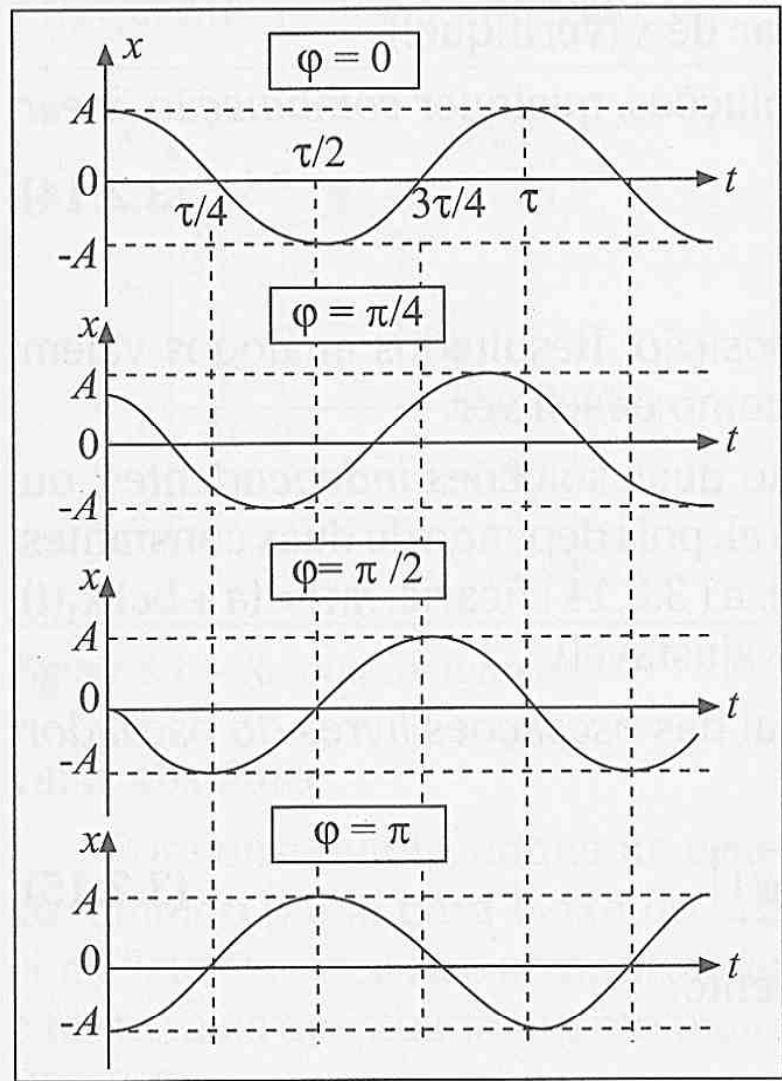


Figura 3.4 — Variação da fase inicial

$$\left. \begin{aligned} A \cos \varphi &= x_0 \\ -\omega A \sin \varphi &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.24)$$

Comparando com as (3.2.17), podemos escrever a solução sob a forma (3.2.15):

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.2.25)$$

Também podemos determinar A e φ a partir das (3.2.24):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (3.2.26)$$

$$\cos \varphi = x_0 / A, \quad \sin \varphi = -v_0 / (\omega A) \quad (3.2.27)$$

onde, nas (3.2.27), A é dado pela (3.2.26). Em particular, quando o oscilador é solto em repouso, a (3.2.26) dá $A = |x_0|$, ou seja, o deslocamento inicial dá a amplitude de oscilação.

Como $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$, vemos, comparando a (3.2.23) com a (3.2.16), que a velocidade do oscilador está adiantada de $\pi/2$ em relação ao deslocamento (Fig. 3.5), ou seja, está em *quadratura* com ele. Quando $|x| = A$ (deslocamento máximo), a velocidade é nula: são os pontos de inversão; quando a partícula passa pela posição de equilíbrio ($x = 0$), a velocidade tem magnitude máxima.

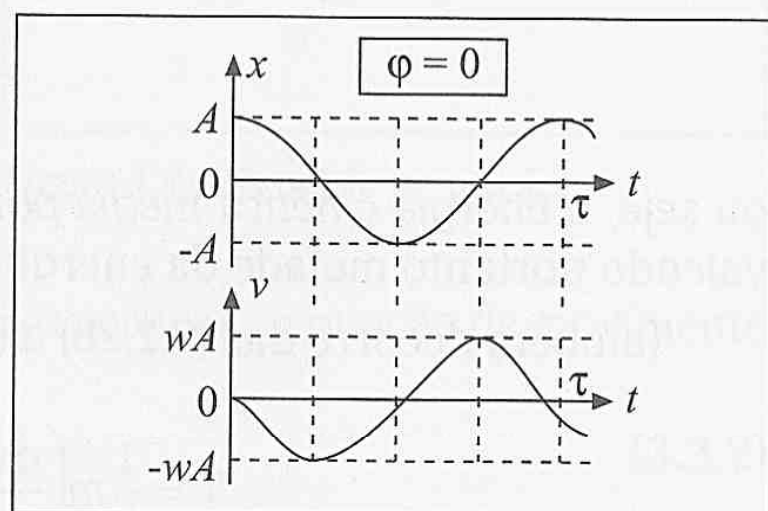


Figura 3.5 — Deslocamento e velocidade

(e) Energia do oscilador

Pela (3.2.23), a energia cinética do oscilador no instante t é

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (3.2.28)$$

e, pelas (3.1.3) e (3.2.16), a energia potencial é

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (3.2.29)$$

onde utilizamos também a (3.2.21).

Somando membro a membro, obtemos a energia total E , que se conserva:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{constante} \quad (3.2.30)$$

Vemos que a energia total é proporcional ao quadrado da amplitude, e também ao quadrado da frequência.

A Fig. 3.6 mostra os gráficos de $U(t)$ e $T(t)$ durante um período de oscilação, correspondentes às curvas de $x(t)$ e $v(t)$ da Fig. 3.5. Nos instantes em que o oscilador passa pela posição de equilíbrio, a energia é puramente cinética; quando a magnitude do deslocamento

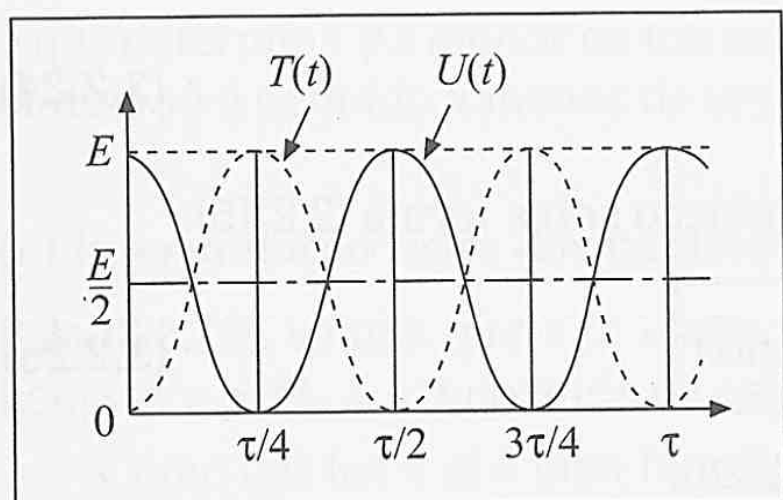


Figura 3.6 Valores médios de T e U

é máxima, ela é puramente potencial (no exemplo da pg. 40, fica armazenada na mola). Em instantes intermediários, as contribuições à energia oscilam entre esses dois extremos.

O valor médio de uma função $f(t)$ num intervalo $0 \leq t \leq \tau$ é definido por

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt \quad (3.2.31)$$

Se subdividirmos o intervalo em N partes iguais, é fácil ver que \bar{f} é o limite da média aritmética de f nos pontos de subdivisão quando $N \rightarrow \infty$. Decorre imediatamente desta definição que

$$\overline{[f(t) - \bar{f}]} = 0 \quad (3.2.32)$$

Como as curvas de $T(t)$ e $U(t)$ na Fig. 3.6 são simétricas em torno de $E/2$ (têm a mesma área acima e abaixo dessa ordenada), temos

$$\bar{T} = \bar{U} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 \quad (3.2.33)$$

ou seja, a energia cinética média por período é igual à energia potencial média por período, valendo portanto metade da energia total.

Também decorre das (3.2.28) a (3.2.30) que

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \quad (3.2.34)$$

o que, para uma energia total dada, define a energia cinética como função da posição do oscilador.

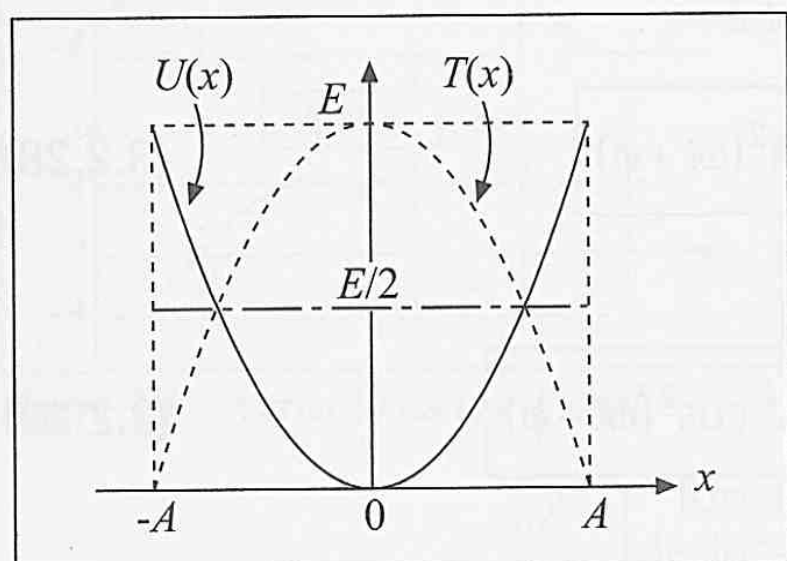


Figura 3.7 — U e T em função de x

Como o gráfico de $U(x)$ é uma porção de parábola entre $-A$ e A , o gráfico de $T(x)$ é uma porção de parábola invertida (Fig. 3.7); máximos de U são zeros de T e vice-versa.

A (3.2.34) também dá a velocidade instantânea em função de x :

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (3.2.35)$$

onde o sinal depende da porção do ciclo de oscilação considerada.

Já vimos em 1, Seção 6.6, que a (3.2.35) pode ser diretamente integrada para dar a lei horária $x = x(t)$. O resultado lá obtido, $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, é equivalente à (3.2.16), bastando

fazer $\varphi_0 = \varphi + \frac{\pi}{2}$ e notar que $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$.

3.3 — Exemplos e aplicações

Como vimos, praticamente qualquer sistema conservativo com um grau de liberdade, na vizinhança de uma posição de equilíbrio estável, se comporta como um oscilador harmônico, de modo que a variedade de exemplos é muito grande. Uma ilustração simples já vista é uma massa presa a uma mola (pág. 40). Vamos considerar agora outros exemplos e aplicações práticas.

(a) O pêndulo de torção

Consideremos uma barra horizontal suspensa em equilíbrio, por um fio vertical (Fig. 3.8). Se defletirmos a barra, no plano horizontal, de um *pequeno* ângulo em relação à posição de equilíbrio, a lei de Hooke para a *torção* do fio diz que ele reage com um *torque restaurador* proporcional ao ângulo de torção:

$$\tau = -K\phi \quad (3.3.1)$$

onde K é o *módulo de torção* do fio, que depende do seu comprimento, diâmetro e material, e o sinal negativo, como na (3.1.2), indica que o torque é no sentido de trazer o sistema de volta à posição de equilíbrio.

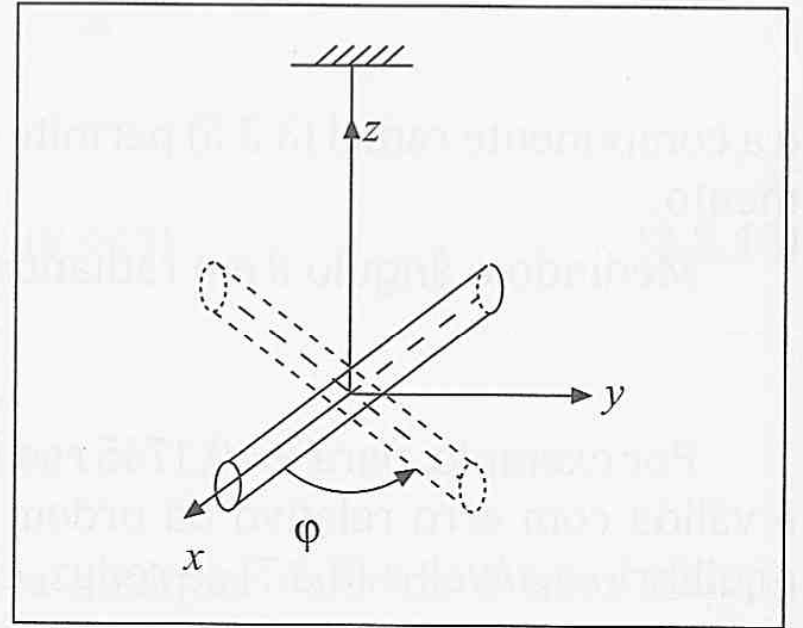


Figura 3.8 — Pêndulo de torção

Se I é o momento de inércia da barra em relação ao eixo vertical, a equação de movimento é (1, Seção 12.1)

$$\tau = I\alpha = I\ddot{\phi} \quad (3.3.2)$$

ou seja, pela (3.3.1),

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad (3.3.3)$$

onde

$$\omega^2 = \frac{K}{I} \quad (3.3.4)$$

que é da forma (3.2.22) (ω^2 = torque restaurador por unidade de deslocamento angular e de momento de inércia).

Sistemas deste tipo são empregados em instrumentos de laboratório muito sensíveis, como a balança de torção utilizada na experiência de Cavendish (1, Seç. 10.8) e o galvanômetro. Nas oscilações do volante de um relógio, o torque restaurador provém de uma mola espiral.

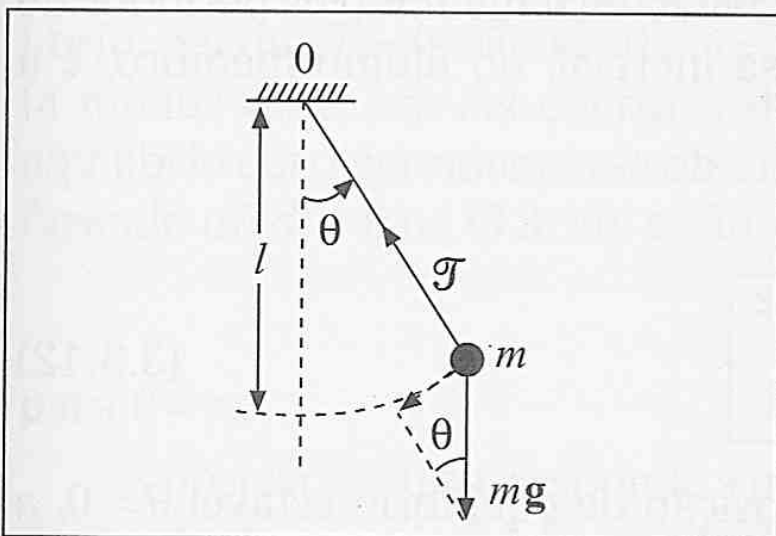


Figura 3.9 — Pêndulo simples

(b) O pêndulo simples

O pêndulo simples consiste numa massa m suspensa por um fio ou haste de comprimento l e massa desprezível (Fig. 3.9). A massa m move-se sobre um círculo de raio l sob a ação do peso mg e da tensão \mathcal{T} . Decompondo a aceleração em componentes tangencial e radial (1, Seção 3.8), as equações de movimento são, para um ângulo de desvio θ em relação à posição vertical de equilíbrio,

$$ma_r = -ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg \cos \theta - \mathcal{T} \quad (3.3.5)$$

$$ma_\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (3.3.6)$$

A componente tangencial (3.3.6) dá a equação de movimento do pêndulo simples

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta} \quad (3.3.7)$$

e a componente radial (3.3.5) permite obter a tensão \mathcal{T} uma vez resolvida a equação de movimento.

Medindo o ângulo θ em radianos, temos, para ângulos θ pequenos,

$$\boxed{\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta} \quad (3.3.8)$$

Por exemplo, para $\theta = 0,1745$ rad ($\approx 10^\circ$), temos $\sin \theta = 0,1736$, de modo que a (3.3.8) ainda é válida com erro relativo da ordem de 0,5%. Logo, para *pequenos* desvios da posição de equilíbrio estável, a (3.3.7) se reduz, como deveria, à equação de oscilação harmônica

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (3.3.9)$$

o que dá

$$\boxed{\omega^2 = g / l} \quad (3.3.10)$$

Como $-mg \theta$ é a força restauradora para um pequeno deslocamento $l\theta$, a (3.3.10) é da forma (3.2.22).

Pela (3.2.19), o período τ das *pequenas oscilações* do pêndulo é

$$\boxed{\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} \quad (3.3.11)$$

O fato de que τ é independente da amplitude de oscilação (desde que esta permaneça pequena) constitui o *isocronismo* das pequenas oscilações do pêndulo, descoberto por Galileu (1, Seção 1.7). Galileu também menciona em “Duas Novas Ciências” que “os tempos de vibração de corpos suspensos por fios de comprimentos diferentes estão entre si como as raízes quadradas dos comprimentos dos fios”. Vimos também (1, Seção 13.7) que Newton verificou com precisão a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional medindo os períodos de pêndulos simples: no 1.º membro da (3.3.6), m é a massa inercial; no último membro, é a massa gravitacional.

A energia cinética do pêndulo é

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \quad (3.3.12)$$

Tomando como nível zero de energia potencial a posição de equilíbrio estável $\theta = 0$, a energia potencial U se obtém (1, Seção 7.3) do trabalho realizado pela força (3.3.6) num deslocamento entre 0 e θ :

$$U = -W_{0 \rightarrow \theta} = mg \int_0^{\theta} \sin \theta' \cdot l d\theta' = [-mgl \cos \theta']_0^{\theta} \quad (3.3.13)$$

ou seja
$$U = mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.3.14)$$

Em particular, na aproximação (3.3.8), a (3.3.13) fica

$$U = mgl \int_0^{\theta} \theta' d\theta' = mgl \left[\frac{(\theta')^2}{2} \right]_0^{\theta}$$

ou seja, levando em conta a (3.3.10),

$$U = \frac{1}{2} mgl \theta^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \theta^2 \quad (\theta \ll 1) \quad (3.3.15)$$

que deve ser comparado com a (3.2.29).

Discussão qualitativa para grandes amplitudes

Pelas (3.3.12) e (3.3.14), a energia total do pêndulo, para qualquer valor de θ (não só para $\theta \ll 1$) é dada por

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.3.16)$$

Valores de θ que diferem por múltiplos de 2π correspondem ao mesmo ângulo, de modo que poderíamos tomar como intervalo de variação de θ , por exemplo, $-\pi < \theta \leq \pi$.

Nada impede, porém, que apliquemos à (3.3.16) o método de discussão qualitativa do movimento unidimensional em 1, Seção 6.5, fazendo θ variar, como x , entre $-\infty$ e ∞ , desde que lembremos que θ e $\theta + 2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) correspondem à mesma posição do pêndulo.

A energia potencial $U(\theta)$ dada pela (3.3.14) corresponde, nesta representação, a um gráfico *periódico* de período 2π (na Fig. 3.10 há 3 períodos representados). A força restauradora na posição θ é

$$F(\theta) = -dU/(l d\theta) = -mg \sin \theta$$

como na (3.3.6), e as posições de equilíbrio, em que $F = 0$, são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (a menos de $2k\pi$). As energias de equilíbrio correspondentes se obtêm fazendo $d\theta/dt = 0$ na (3.3.16), e são: $E = 0$ para $\theta = 0$ e

$$E = E_0 = 2mgl \quad (3.3.17)$$

para $\theta = \pi$.

A posição $\theta = 0$ corresponde à posição vertical de equilíbrio *estável*, com o pêndulo abaixo do ponto de suspensão O, enquanto $\theta = \pi$ é a posição vertical de equilíbrio *instável*, com o pêndulo acima do ponto O (Fig. 3.11): é preciso neste caso que a massa m esteja na extremidade

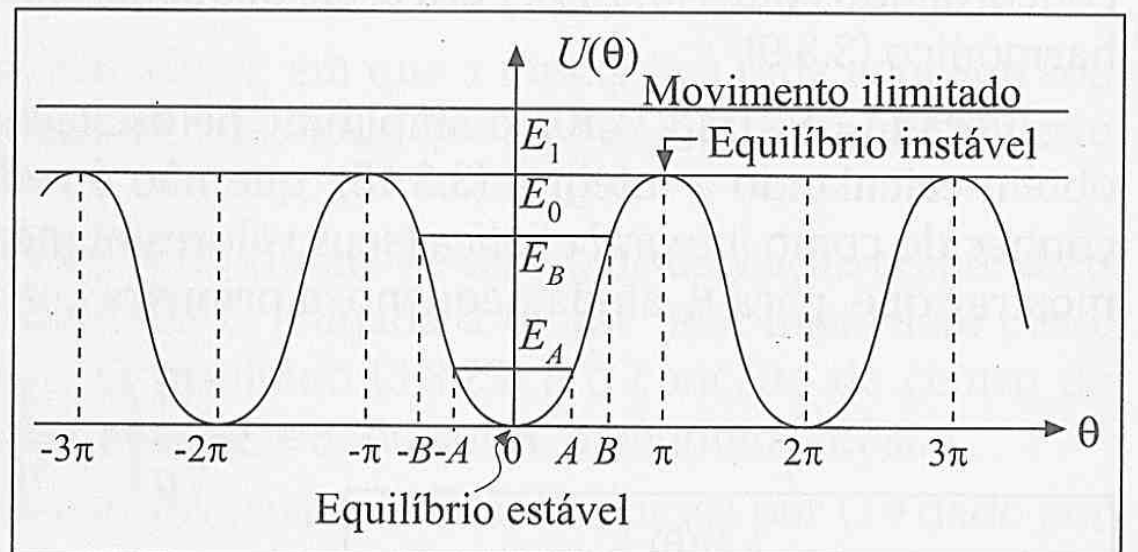


Figura 3.10 — Energia potencial do pêndulo

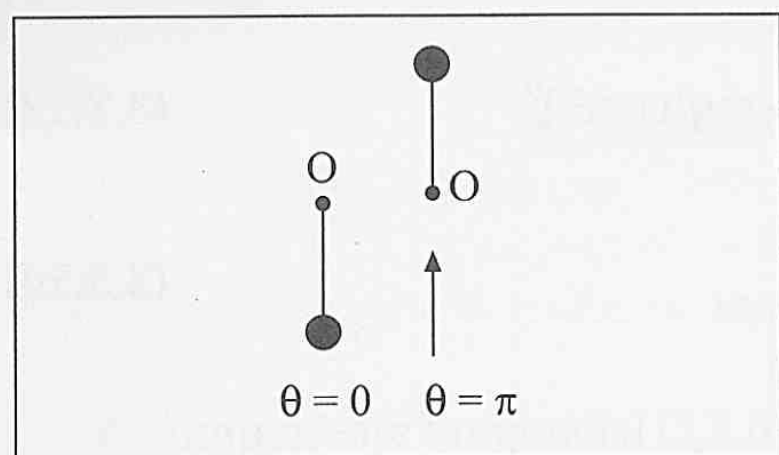


Figura 3.11 — Posições de equilíbrio estável e instável

de uma haste rígida, e não de um fio, porque o fio se dobraria antes de atingir essa posição (conforme 1, Seção 7.6 (c)).

Para uma energia total $E < 2 mgl$, o pêndulo oscila entre os pontos de inversão $\theta = \pm \theta_0$ nos quais $d\theta/dt = 0$, de modo que [cf. (3.3.16)]

$$E = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

e, subtraindo membro a membro da (3.3.16),

$$\frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0 \quad \left\{ \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{(2g/l)(\cos \theta - \cos \theta_0)} \right.$$

onde o sinal + vale durante metade do período, digamos de t_0 a $t_0 + \frac{\tau}{2}$, quando o pêndulo oscila de $-\theta_0$ a θ_0 , e o sinal - para o retorno. Integrando durante a primeira metade, vem

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (3.3.18)$$

que é a expressão geral do período em função da amplitude de oscilação θ_0 .

Para $E = E_A \ll 2 mgl$ (Fig. 3.10), temos $\theta_0 = A \ll 1$, de modo que $U(\theta)$ pode ser aproximado pela parábola (3.3.15). Comparando com a (3.3.14), vemos que isto corresponde à aproximação.

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = (1 - \cos \theta_0) - (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(\theta_0^2 - \theta^2) \quad (3.3.19)$$

e a (3.3.18) fica (1, Seção 6.6)

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) \right]_{-\theta_0}^{\theta_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

concordando com a (3.3.11). Para estas pequenas oscilações, vale a aproximação de oscilador harmônico (3.3.9).

Para $E = E_B$ (Fig. 3.10), a amplitude de oscilação $\theta_0 = B$ não é mais $\ll 1$, e o período se obtém calculando a integral (3.3.18), que não é redutível a funções elementares: é do tipo conhecido como *integral elíptica* (seus valores numéricos encontram-se em tabelas). Pode-se mostrar que, para θ_0 ainda pequeno, a primeira correção à (3.3.11) é da forma

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad (3.3.20)$$

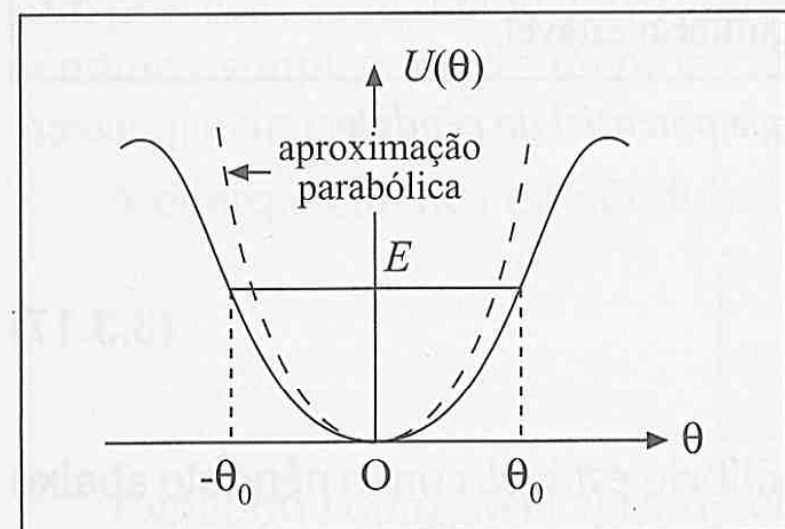


Figura 3.12 — Energia potencial para grandes amplitudes

Assim, para amplitudes maiores, o pêndulo deixa de ser isócrono: o período depende da amplitude, crescendo com θ_0 . A correção se torna $\sim 1\%$ para $\theta_0 \sim 0,4 \text{ rad} \sim 22^\circ$. O fato de que o período *aumenta* com a amplitude pode ser visto comparando $U(\theta)$ com a aproximação parabólica (Fig. 3.12). Como $U(\theta)$ cresce mais lentamente que a parábola, a força restauradora $F(\theta)$ é *menor* do que a dada pela lei de Hooke para ângulos grandes, o que, pela (3.2.22), implica numa diminuição de ω^2 (aumento de τ).

Para energias $E_1 > 2 mgl$, o movimento é ilimitado, ou seja, $|\theta|$ cresce indefinidamente na representação da (Fig. 3.10). Levando em conta a periodicidade, isto significa que o pêndulo, para energia total suficientemente elevada, passa a girar indefinidamente (na ausência de atrito) em torno de seu ponto de suspensão.

(c) O pêndulo físico

Qualquer corpo rígido suspenso de um ponto O de tal forma que possa girar livremente (sem atrito) em torno de um eixo horizontal passando pelo ponto de suspensão O constitui um *pêndulo físico* (Fig. 3.13), também chamado de pêndulo composto. Seja G o centro de gravidade, situado a uma distância s de O; na posição de equilíbrio estável, G está abaixo de O e na mesma vertical.

Se θ é o ângulo de desvio de OG em relação à vertical e M a massa total, o torque \mathcal{T} em relação a O é

$$\mathcal{T} = -Mgs \sin\theta \quad (3.3.21)$$

Se I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao eixo horizontal que passa por O, a equação de movimento é (1, Seção 12. 1)

$$I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{T} = -Mgs \sin\theta \quad (3.3.22)$$

Comparando esta equação com a (3.3.7), vemos que é idêntica à equação de movimento de um pêndulo simples de comprimento

$$l = \frac{I}{Ms} \quad (3.3.23)$$

De fato o pêndulo simples é um caso particular, em que a massa fica toda concentrada num ponto à distância l do ponto de suspensão O, de modo que $s = l$ e $I = Ml^2$, o que converte a (3.3.23) numa identidade.

O ponto C da reta OG tal que $\overline{OC} = l$ (Fig. 3.13) chama-se *centro de oscilação* do pêndulo físico: se a massa total M fosse concentrada em C e ligada a O por uma haste sem peso, teríamos um pêndulo simples equivalente. O resultado (3.3.23) e o conceito de centro de oscilação são devidos a Huygens, figurando em seu tratado sobre o pêndulo (1673).

O *raio de giração* k do pêndulo em relação ao eixo horizontal que passa por O é dado por (1, Seção 12.2)

$$I = Mk^2 \quad (3.3.24)$$

Comparando com a (3.3.23), obtemos

$$k^2 = ls \quad (3.3.25)$$

ou seja, k é a média geométrica \sqrt{ls} entre l e s .

Suponhamos agora que se tome C como novo ponto de suspensão em lugar de O, e sejam s_c , l_c , e k_c , as grandezas correspondentes a s , l e k nessa nova situação. A Fig. 3.13 dá

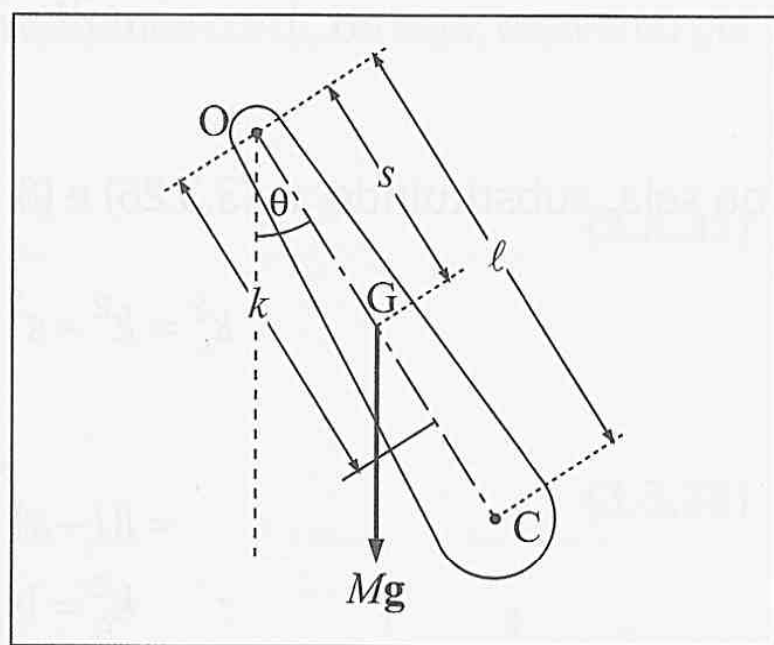


Figura 3.13 — Pêndulo físico

$$s_c = l - s \quad (3.3.26)$$

Para calcular k_c , calculemos I_c , o momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa por C. Se I_G é o momento de inércia referido ao eixo horizontal que atravessa o centro de gravidade G, o teorema de Steiner (1, Seção 12.2) dá

$$I = I_G + Ms^2 = Mk^2 \quad \left\{ I_G = M(k^2 - s^2) \right. \quad (3.3.27)$$

$$I_c = I_G + Mk_c^2 \quad (3.3.28)$$

ou seja, substituindo as (3.3.26) e (3.3.27),

$$\begin{aligned} k_c^2 &= k^2 - s^2 + (l - s)^2 = \underbrace{k^2}_{=ls \text{ pela (3.3.25)}} - 2ls + l^2 = l^2 - ls \\ &= l(l - s) \\ \therefore k_c^2 &= ls_c \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

pela (3.3.26). Comparando as (3.3.25) e (3.3.29), concluímos que

$$\boxed{I_c = I} \quad (3.3.30)$$

ou seja, o novo centro de oscilação é o ponto O!

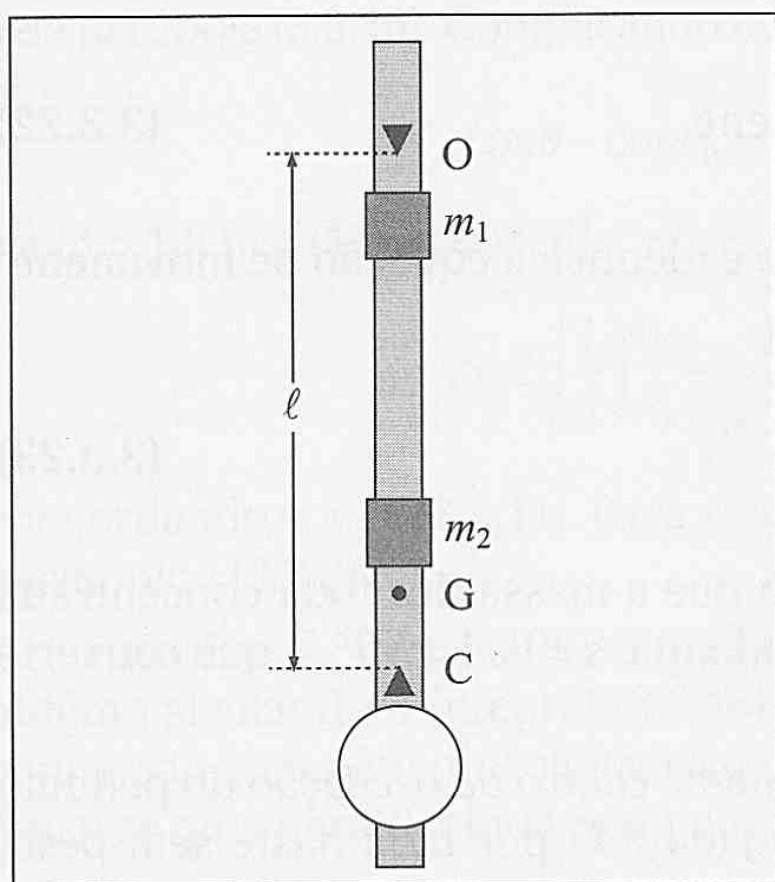


Figura 3.14 — Pêndulo reversível

Esta reciprocidade entre ponto de suspensão e centro de oscilação é a idéia básica do *pêndulo reversível* de Kater, usado para medir g com precisão. Através de dois cutelos, separados por uma distância l bem determinada, o pêndulo pode ser suspenso por O ou C (Fig. 3.14). As massas m_1 e m_2 podem ser deslocadas para cima e para baixo, e suas posições são ajustadas até que o período τ das pequenas oscilações seja o mesmo para as duas suspensões, o que garante ser l o comprimento do pêndulo simples equivalente (note que o sistema é deliberadamente assimétrico: G não deve coincidir com o ponto médio de OC. Por quê?) Podemos então utilizar a (3.3.11), e obter g a partir de l e τ .

(d) Oscilações de um líquido num tubo em U

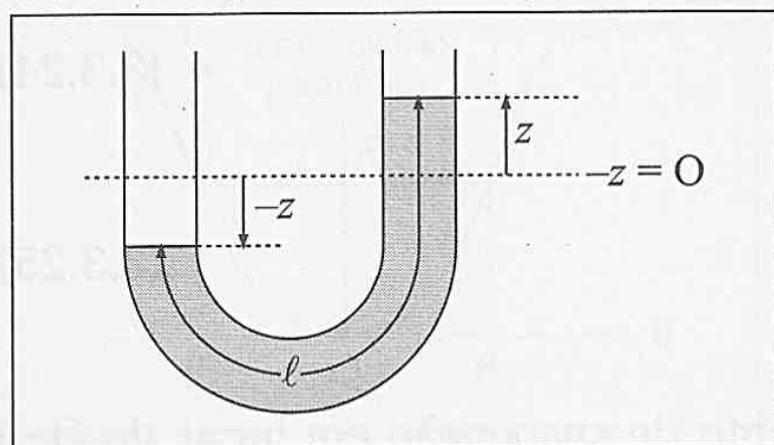


Figura 3.15 — Tubo em U

Consideremos um líquido de densidade ρ contido num tubo em U de secção transversal A , e seja l o comprimento total da coluna líquida, de modo que a massa total de líquido é $M = \rho Al$. Em equilíbrio, o líquido tem o mesmo nível nos dois ramos, que tomamos como nível $z = 0$ (Fig. 3.15), correspondente à energia potencial $U = 0$. Se o nível baixa de uma altura z num ramo, subindo de z no outro, isto equivale a elevar de

uma altura z , em bloco, a massa de água ρAz removida do outro ramo, de modo que a energia potencial correspondente é

$$U(z) = \underbrace{\rho Az}_{\text{massa elevada}} \cdot gz = \rho Agz^2 \quad (3.3.31)$$

A coluna líquida entra em oscilação com velocidade instantânea dz/dt , ou seja, com energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\rho Al}_M \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (3.3.32)$$

A energia total associada à oscilação é portanto

$$E = \frac{1}{2} \rho Al \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \rho Agz^2 \quad (3.3.33)$$

Comparando com as (3.2.28) a (3.2.30), vemos que ρAg corresponde a $\frac{1}{2} k = \frac{1}{2} M \omega^2$, com $M = \rho Al$. Logo,

$$\rho Ag = \frac{1}{2} \rho Al \omega^2 \left\{ \omega^2 = \frac{2g}{l} \right\} \quad (3.3.34)$$

dá a *frequência angular das oscilações harmônicas da massa líquida*.

Comparando a (3.3.34) com a (3.3.10), vemos que ela equivale às oscilações harmônicas de um pêndulo de comprimento $l/2$. Newton formulou este resultado nos “Principia” da seguinte forma: “Se água sobe e desce alternadamente nos ramos de um tubo; e se construirmos um pêndulo cujo comprimento entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação é igual à metade do comprimento da água no tubo: digo então que a água subirá e descera nos mesmos tempos em que o pêndulo oscila”.

(e) Oscilações de duas partículas

Consideremos um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 ligadas por uma mola de massa desprezível e constante elástica k . Supomos que as partículas só podem mover-se numa dimensão e que a única força que atua sobre elas é a força restauradora da mola. Se l é o comprimento de equilíbrio da mola e x_1 e x_2 as posições das partículas em relação a uma origem O arbitrária (Fig. 3.16), a deformação da mola é

$$x = (x_2 - x_1) - l \quad (3.3.35)$$

de modo que as forças restauradoras sobre as duas partículas são (tomamos $x > 0$ na fig.)

$$F_1 = kx = -F_2 \quad (3.3.36)$$

o que dá as equações de movimento

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= kx \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -kx \end{aligned} \right\} \quad (3.3.37)$$

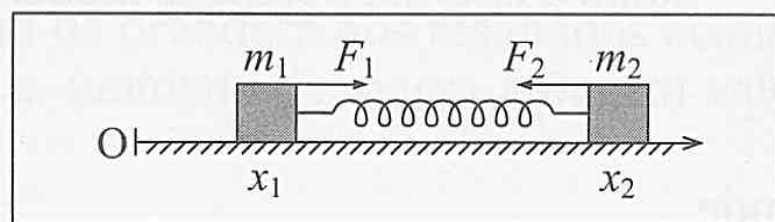


Figura 3.16 — Sistema de duas partículas

$$\text{Seja} \quad X = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M \quad (M = m_1 + m_2) \quad (3.3.38)$$

a coordenada do CM das duas partículas. Decorre imediatamente das (3.3.37) que

$$\ddot{X} = 0 \quad \{\dot{X} = V = \text{constante} \quad (3.3.39)$$

como deveria ser.

Multiplicando a primeira (3.3.37) por m_1 , a segunda por m_2 e subtraindo membro a membro, vem

$$\boxed{\mu \ddot{X} = -kx} \quad (3.3.40)$$

onde μ é a *massa reduzida* do sistema,

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (3.3.41)$$

A (3.3.41) corresponde ao resultado obtido em 1, Seção 10.10, para forças centrais: a *coordenada relativa* $x_2 - x_1$ se comporta como a coordenada de uma partícula única, de massa igual à massa reduzida, sujeita à força de interação entre as duas partículas, ao passo que o CM permanece em repouso ou movimento retilíneo uniforme.

Vimos também em 1, Seção 12.3, que a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M V^2 \quad (3.3.42)$$

onde o 1.º termo é a energia cinética do movimento interno T' , sendo

$$v_1' = -\frac{m_2}{M} \dot{x}, \quad v_2' = \frac{m_1}{M} \dot{x} \quad (3.3.43)$$

as velocidades relativas ao CM (1, Seção 10.10). Logo,

$$T' = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 \quad (3.3.44)$$

Como a energia potencial associada à deformação da mola é $\frac{1}{2} kx^2$, a energia total é

$$E = E_{\text{CM}} + E' \quad (3.3.45)$$

onde

$$E_{\text{CM}} = T_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M V^2 \quad (3.3.46)$$

$$E' = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.3.47)$$

A energia do CM (3.3.46) e a energia total interna (3.3.47) se conservam separadamente; a translação do CM não afeta a oscilação. A energia de oscilação (3.3.47) é idêntica à de um oscilador harmônico de massa μ e deslocamento x .

Exemplo: *Molécula diatômica:* Vimos em 1, Seção 6.5, que a energia potencial de interação entre dois átomos que podem formar uma molécula diatômica pode ser representada sob a forma

$$U(r) = D \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right] \quad (3.3.48)$$

onde a é a distância de equilíbrio (correspondente ao mínimo de U) e $D = -U(a)$ é a energia de dissociação da molécula (Fig. 3.17).

Para pequenos deslocamentos da posição $r = a$ de equilíbrio estável, definidos por

$$x = r - a \quad (3.3.49)$$

podemos aproximar $U(r) = U(a + x)$ por uma parábola (Fig. 3.17)

$$U(r) \approx -D + \frac{1}{2} k \overbrace{(r-a)^2}^{x^2} \quad (3.3.50)$$

Derivando duas vezes em relação a r os dois membros da (3.3.50) e fazendo $r = a$, obtemos

$$k = \left(\frac{d^2 U}{dr^2} \right)_{r=a} \quad (3.3.51)$$

Pela (3.3.48),

$$\left(\frac{d^2 U}{dr^2} \right)_{r=a} = \frac{12D}{a^2} \left[13 \left(\frac{a}{r} \right)^{14} - 7 \left(\frac{a}{r} \right)^8 \right]_{r=a} = \frac{72D}{a^2} \quad (3.3.52)$$

de modo que a (3.3.51) dá

$$k = 72D / a^2 \quad (3.3.53)$$

A força restauradora associada à (3.3.50) é $F(x) = -dU/dx = -kx$, o que leva à equação de movimento (3.3.40) para as pequenas vibrações da molécula em torno da posição de equilíbrio. A frequência angular vibracional ω seria

$$\omega = \sqrt{k / \mu} \quad (3.3.54)$$

onde k é dado pela (3.3.53) e μ é a massa reduzida.

Na realidade, o tratamento correto de um sistema atômico como este deve ser dado pela mecânica quântica. Vejamos, entretanto, qual é a ordem de grandeza dos resultados acima para um caso típico, a molécula de CO. Como 1 u.m.a. (unidade de massa atômica) vale $\approx 1,66 \times 10^{-27}$ kg, temos [cf. (3.3.41)]

$$\left. \begin{aligned} m(C^{12}) &= 12 \text{ u.m.a.} \approx 2 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ m(O^{16}) &= 16 \text{ u.m.a.} \approx 2,7 \times 10^{-26} \text{ kg} \end{aligned} \right\} \mu \approx 1,16 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

O raio molecular é $a \approx 1,1 \times 10^{-10}$ m e a energia de dissociação é $D \approx 10$ e $V \approx 1,6 \times 10^{-18}$ J.

A (3.3.53) dá então

$$k \approx 9,5 \times 10^3 \text{ N/m}$$

Uma mola com esta constante de força sofreria uma elongação da ordem de 10^{-3} m = 1 mm se dela suspendêssemos uma massa de 1 kg, de modo que seria relativamente “dura”, mas a ordem de grandeza da força restauradora não deixa de ser comparável à de uma mola macroscópica.

A frequência de vibração ν se obtém dos valores acima pela (3.3.54):

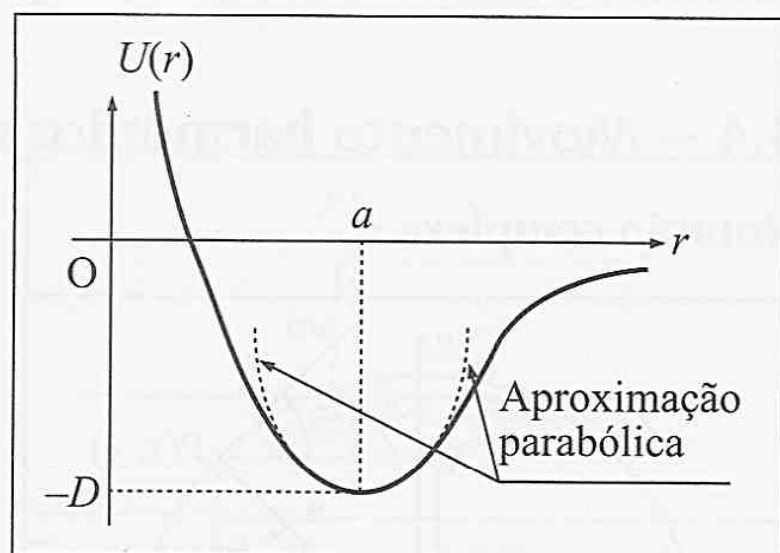


Figura 3.17 — Energia potencial de molécula diatômica

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \approx 1,4 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

o que, para radiação eletromagnética, corresponde a um comprimento de onda $\lambda = c/\nu \sim 2 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \mu\text{m}$ (c = velocidade da luz no vácuo), que está na região do infravermelho. Sabe-se que as vibrações da molécula de CO dão origem a radiação infravermelha, com $\lambda \approx 4,7 \mu\text{m}$ para uma vibração fundamental, de modo que a ordem de grandeza dos resultados é correta, embora o tratamento adequado requeira o emprego da mecânica quântica.

3.4 — Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme

Notação complexa

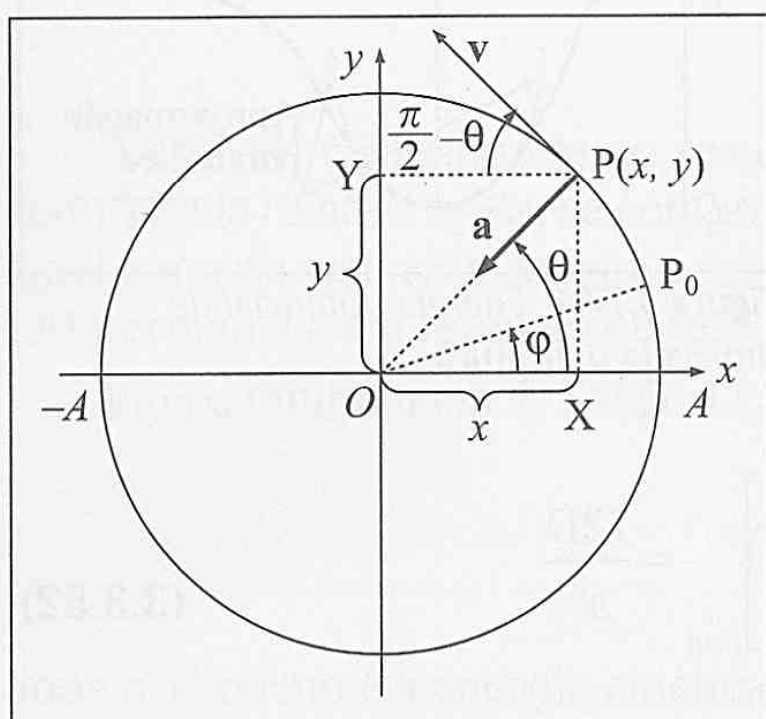


Figura 3.18 — Círculo de referência

Pela (3.2.20), o ângulo de fase θ no MHS varia linearmente com o tempo. Consideremos um círculo de raio A e um ponto P desse círculo cujo vetor de posição \overline{OP} forma um ângulo θ com o eixo dos x no instante t .

Como $\theta = \omega t + \varphi$, o ponto P descreve um movimento circular uniforme de velocidade angular ω sobre o círculo (Fig. 3.18), partindo da posição inicial P_0 tal que $\theta(0) = \varphi$. Se X é a projeção de P sobre o eixo dos x , temos

$$\overline{OX} = x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4.1)$$

o que, pela (3.2.16), coincide com o deslocamento instantâneo da partícula em MHS.

A velocidade v do movimento circular uniforme é tangencial e de magnitude ωA (1, Seção 3.7); sua projeção sobre Ox é (Fig. 3.18)

$$v_x = -\omega A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \dot{x} \quad (3.4.2)$$

que coincide com a velocidade da partícula no MHS. A aceleração do ponto P é radial e de magnitude $|a| = \omega^2 A$; sua projeção sobre Ox é

$$a_x = -\omega^2 A \cos \theta = -\omega^2 x = \ddot{x} \quad (3.4.3)$$

que é a aceleração do MHS.

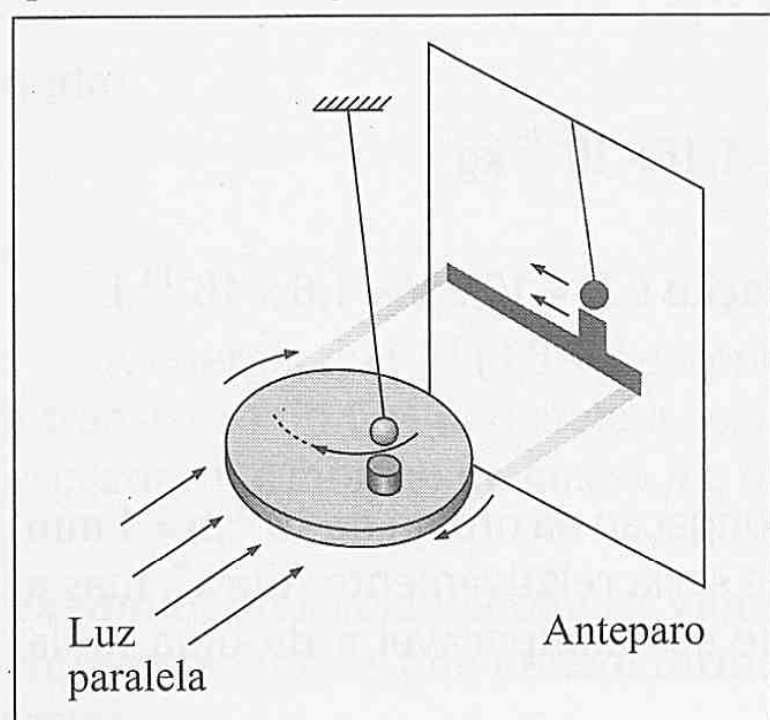


Figura 3.19

Vemos portanto que se pode considerar o MHS como projeção de um movimento circular uniforme. A Fig. 3.19 mostra uma realização concreta da projeção: um pequeno poste cilíndrico é montado sobre o prato de um toca-discos em rotação, e um pêndulo de mesmo período oscila sobre o prato. Um feixe de luz paralela projeta as sombras do toca-discos e do pêndulo sobre um anteparo. Se a sombra do pêndulo está inicialmente sobre a do poste, ela a acompanha, permanecendo sobre ela durante todo o movimento.

A projeção do ponto P sobre o eixo dos y (Fig. 3.18) é

$$\overline{OY} = y = A \sin \theta = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.4.4)$$

que também é um MHS. Como $\sin(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ este movimento tem uma defasagem de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao da (3.4.1), ou seja, está em quadratura com ele (cf. Sec. 3.2).

A representação do MHS pelo movimento circular uniforme a ele associado é chamada de representação em termos do *vetor girante* \mathbf{OP} e o círculo de raio A é chamado de *círculo de referência*. Vamos ver agora que se pode obter uma representação análoga, extremamente conveniente, em termos de números complexos.

Números complexos

Vamos recordar algumas propriedades fundamentais dos números complexos, que podemos introduzir com base na sua representação geométrica. Consideremos um ponto P do plano xy , cujo vetor de posição é

$$\mathbf{OP} = a\hat{x} + b\hat{y} \quad (3.4.5)$$

onde \hat{x} e \hat{y} são vetores unitários nas direções dos eixos Ox e Oy , respectivamente.

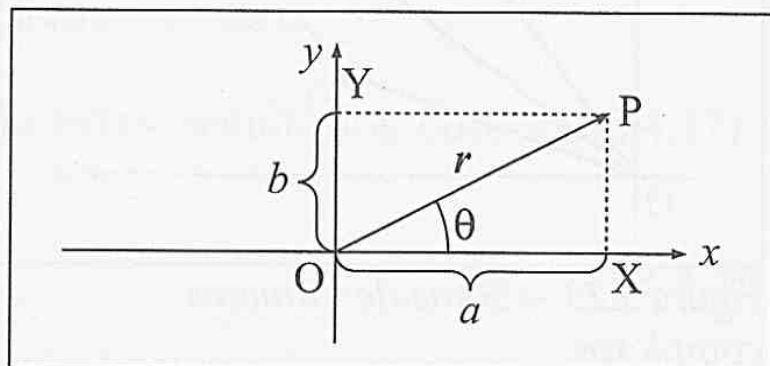


Figura 3.20 — Representação geométrica

Podemos associar a \mathbf{OP} um *número complexo* z relacionado com a (3.4.5) por

$$z = a + ib \quad (3.4.6)$$

que se obtém da (3.4.5) pelas substituições $\hat{x} \rightarrow 1$, $\hat{y} \rightarrow i$. Como a e b são números reais, o elemento novo na (3.4.6) é o símbolo i , que podemos interpretar como indicando a seguinte operação geométrica:

$$i \equiv \text{rotação de } +\frac{\pi}{2} \text{ no plano } xy \quad (3.4.7)$$

Assim, um número real a fica associado a um ponto X de abscissa a sobre Ox . O número real b estaria associado a outro ponto, digamos B , do eixo Ox . Pela (3.4.7), o ponto ib se obtém aplicando uma rotação de $+\frac{\pi}{2}$ ao vetor \mathbf{OB} (Fig. 3.21), ou seja, rebatendo-o sobre Oy no sentido anti-horário, o que leva ao ponto Y , e a soma na (3.4.6) corresponde à soma vetorial $\mathbf{OX} + \mathbf{OY} = \mathbf{OP}$.

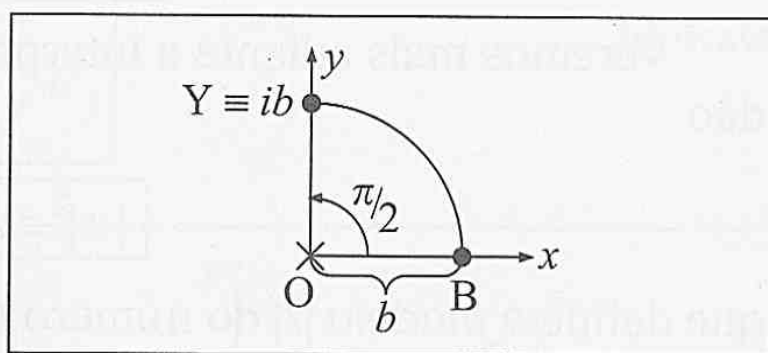


Figura 3.21 — Número imaginário

Em particular, para $b = 1$, obtemos o ponto i , que está a uma unidade de distância da origem sobre o eixo Oy (Fig. 3.22). Aplicando a este ponto nova rotação de $+\pi/2$, o que, pela (3.4.7), equivale a multiplicá-lo por i , obtemos uma rotação de π , que leva o ponto 1 em -1 (Fig. 3.22), ou seja,

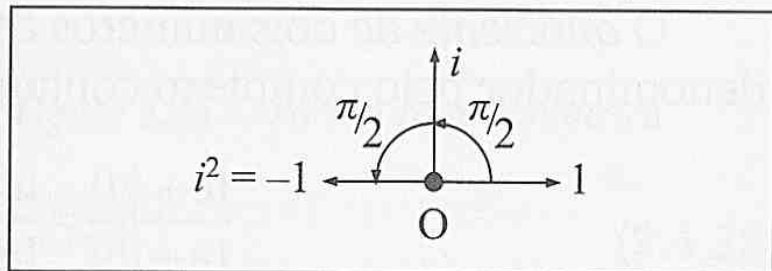


Figura 3.22 — Unidade imaginária

$$i^2 = -1 \quad \left(i = \sqrt{-1}\right) \quad (3.4.8)$$

O número complexo i chama-se *unidade imaginária*. O plano xy chama-se *plano complexo*, e o ponto de coordenadas (a, b) nesse plano chama-se *imagem* do número complexo $z = a + ib$; vamos nos referir a ele como o *ponto* z do plano complexo.

Na (3.4.6), define-se

$$z = a + ib \Rightarrow \begin{cases} a \equiv \operatorname{Re} z \\ b \equiv \operatorname{Im} z \end{cases}$$

(3.4.9)

onde essas notações significam que a é a *parte real* de z e b é a *parte imaginária* de z .

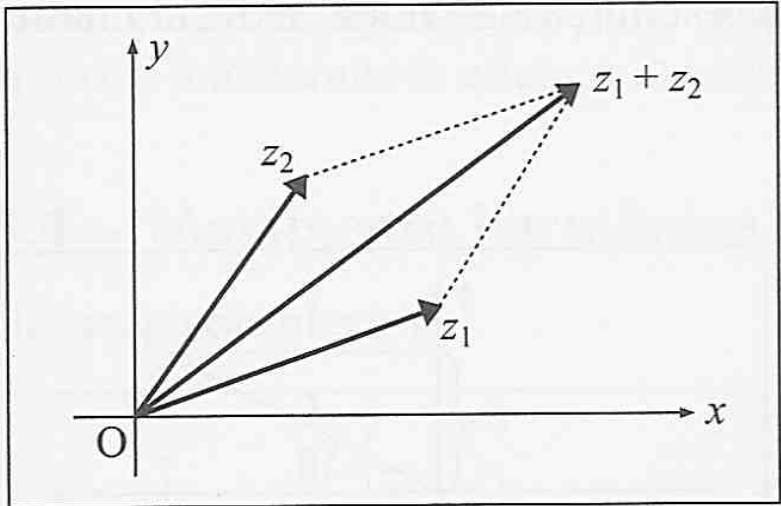


Figura 3.23 — Soma de números complexos

A soma de números complexos corresponde pela representação geométrica à soma de vetores (Fig. 3.23), de modo que as componentes se somam:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

(3.4.10)

Chama-se *complexo conjugado* z^* do número complexo $z = a + ib$ o número

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib$$

(3.4.11)

cujas imagem (Fig. 3.24) é simétrica da de z em relação ao eixo real Ox . O eixo Oy chama-se *eixo imaginário*.

As (3.4.9) a (3.4.11) dão

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

(3.4.11)

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

(3.4.12)

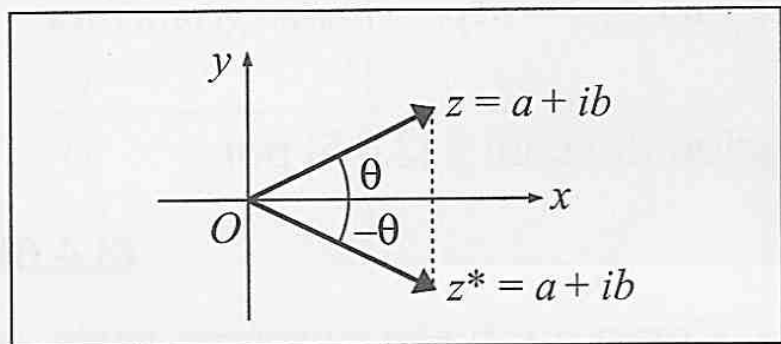


Figura 3.24 — Complexo conjugado

O *produto* de dois números complexos define-se de tal forma que valha a propriedade distributiva e utilizando a (3.4.8), o que dá

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

(3.4.13)

Veremos mais adiante a interpretação geométrica desta operação. As (3.4.11) e (3.4.13) dão

$$|z|^2 \equiv z^* z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$$

(3.4.14)

que define o *módulo* $|z|$ do número complexo z . Comparando com a (3.4.5), vemos que coincide com o módulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ do vetor representativo r . O módulo de um número real é um caso particular.

O *quociente* de dois números complexos pode ser calculado multiplicando numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador e utilizando a (3.4.14):

$$\frac{(c + id)}{(a + ib)} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

(3.4.15)

A fórmula de Euler

A função exponencial

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

(3.4.16)

é a solução da equação diferencial linear de 1ª ordem

$$\frac{df}{dx} = \lambda f(x) \quad (3.4.17)$$

que satisfaz a condição inicial

$$f(0) = 1 \quad (3.4.18)$$

Temos

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$$

o que dá
$$\frac{d}{dx} (\cos x + i \operatorname{sen} x) = i \cos x - \operatorname{sen} x = i(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

Para $x = 0$, temos $\cos x + i \operatorname{sen} x = 1$. Comparando estes resultados com as (3.4.17) e (3.4.18), somos levados a definir

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (3.4.19)$$

A (3.4.16) também satisfaz, qualquer que seja a relação funcional

$$f(x_1 + x_2) = e^{\lambda(x_1 + x_2)} = e^{\lambda x_1} e^{\lambda x_2} = f(x_1) f(x_2)$$

Pela (3.4.13),

$$\begin{aligned} (\cos x_1 + i \operatorname{sen} x_1) (\cos x_2 + i \operatorname{sen} x_2) &= (\cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2) \\ &+ i (\operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2) = \cos (x_1 + x_2) + i \operatorname{sen} (x_1 + x_2) \end{aligned}$$

de modo que a (3.4.19) também satisfaz a relação funcional acima, característica da função exponencial. A (3.4.19) é a *fórmula de Euler*, por ele obtida em 1748 e considerada como um dos mais belos resultados da matemática.

Aplicando as (3.4.11) e (3.4.12) à (3.4.19), obtemos:

$$\begin{aligned} \cos x &= \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \operatorname{sen} x &= \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

A imagem z do número complexo $x + iy$ é um ponto de coordenadas cartesianas (x, y) . Se passarmos a coordenadas polares (r, θ) (Fig. 3.25),

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (3.4.21)$$

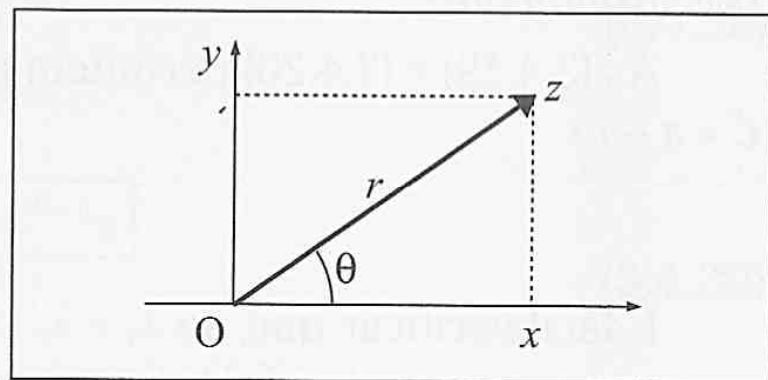


Figura 3.25 — Forma trigonométrica

a (3.4.19) dá

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta} \quad (3.4.22)$$

que é a *forma trigonométrica* do número complexo z . Pela (3.4.14), temos

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.4.23)$$

e θ chama-se *argumento* de z , dado por

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \operatorname{tg}^{-1}(y / x) \quad (3.4.24)$$

Em particular, temos

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad (3.4.25)$$

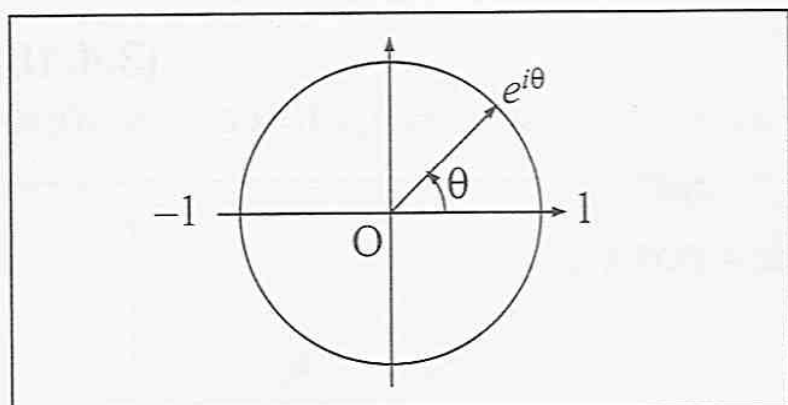


Figura 3.26 — Círculo unitário

Um número complexo da forma $z = e^{i\theta}$ chama-se um *fator de fase*, e sua imagem é um ponto do círculo unitário (Fig. 3.26), correspondente a um vetor que faz um ângulo θ com o eixo real. Casos particulares são:

$$e^{\pm i\pi/2} = \pm i, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1 \quad (3.4.26)$$

O produto de dois números complexos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ é

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.4.27)$$

ou seja, o *módulo do produto é o produto dos módulos* e o *argumento é a soma dos argumentos*.

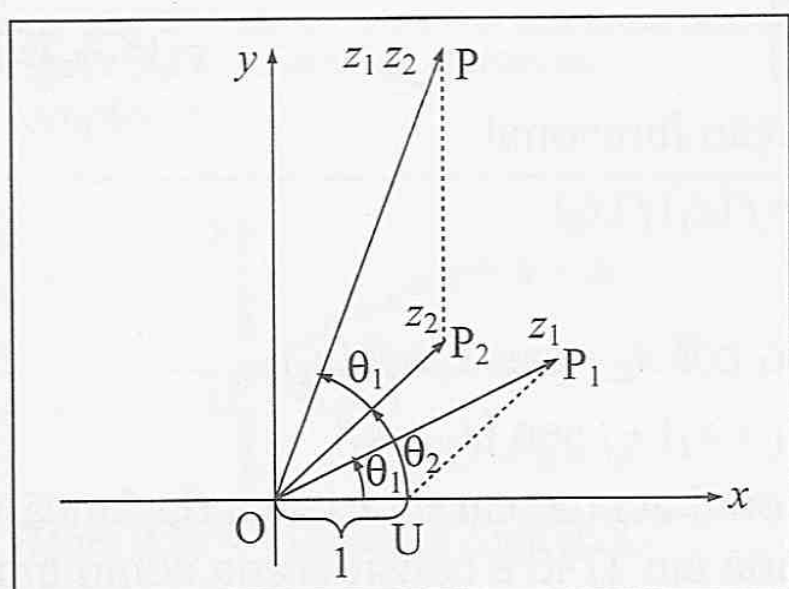


Figura 3.27 — Interpretação geométrica do produto

A Fig. 3.27 mostra a interpretação geométrica do produto. Os pontos P_1 e P_2 são as imagens de z_1 e z_2 e $\overline{OU} = 1$ no eixo real. A imagem P do produto $z_1 z_2$ se obtém construindo um triângulo OP_2P semelhante a OUP_1 , de tal forma que OP se obtém de OP_2 por uma rotação de $+\theta_1$ e multiplicando o seu módulo por $r_1 = |\overline{OP_1}|$ (pela semelhança dos triângulos, $|\overline{OP}| / |\overline{OP_2}| = |\overline{OP_1}| / |\overline{OU}| = |\overline{OP_1}|$), o que concorda com a (3.4.27).

Em particular, tomando $r_1 = 1$, a (3.4.27) mostra que $\exp(i\theta)$, aplicado a um número complexo, equivale a uma rotação de $+\theta$ da imagem do número, o que generaliza a (3.4.7).

Analogamente, obtemos

$$z_1 / z_2 = r_1 e^{i\theta_1} / r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.4.28)$$

ou seja, o *módulo de um quociente é o quociente dos módulos*, e o *argumento é a diferença dos argumentos*.

As (3.4.19) e (3.4.20) permitem definir a exponencial de um número complexo qualquer, $c = a + ib$

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b) \quad (3.4.29)$$

É fácil verificar que, se λ_1 e λ_2 são números reais e z_1 e z_2 são complexos

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 \operatorname{Re} z_1 + \lambda_2 \operatorname{Re} z_2 \quad (3.4.30)$$

ou seja, a parte real de qualquer combinação linear com coeficientes reais de números complexos é a mesma combinação linear das partes reais desses números.

Note que isso não é verdade se os coeficientes λ_1, λ_2 são complexos. Com efeito, a (3.4.13) mostra que

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 \quad \text{se} \quad \operatorname{Im} z_1 \neq 0, \quad \operatorname{Im} z_2 \neq 0 \quad (3.4.31)$$

Se $z(t) = x(t) + iy(t)$ é função de um parâmetro real t , temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t) + iy(t)] = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \quad (3.4.32)$$

de modo que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\operatorname{Re} z) \quad (3.4.33)$$

o que se estende a derivadas de ordem superior, como d^2z/dt^2 .

Em consequência deste resultado e da (3.4.30), vemos que, se $z(t)$ é solução de uma equação diferencial linear de coeficientes reais, como a (3.2.12), $\operatorname{Re} z(t)$ também é solução dessa equação.

Aplicação ao oscilador harmônico

Consideremos a equação diferencial (3.1.5) do MHS para uma função complexa $z(t)$:

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0} \quad (3.4.34)$$

Tratando-se de uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes, procuremos uma solução da forma

$$\boxed{z(t) = e^{pt}} \quad (3.4.35)$$

onde p é uma constante, que pode ser complexa.

A (3.4.35) dá

$$\frac{dz}{dt} = pe^{pt} = pz \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2z}{dt^2} = p \frac{dz}{dt} = p^2 z \end{array} \right. \quad (3.4.36)$$

ou seja, a operação de derivação em relação a t (d/dt) pode ser substituída pela multiplicação por p :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \leftrightarrow p} \quad (3.4.37)$$

de modo que a equação diferencial (3.4.34) é levada numa equação algébrica:

$$p^2 + \omega^2 = 0 \quad (3.4.38)$$

que se chama a *equação característica*.

Resolvendo em relação a p , obtemos as raízes

$$\boxed{p^2 = -\omega^2 \quad \{p_{\pm} = \pm i\omega\}} \quad (3.4.39)$$

Vamos ver que basta tomar uma das raízes, que escolhemos como p_+ :

$$\boxed{p = i\omega} \quad (3.4.40)$$

Levando na (3.4.35), vemos que

$$\boxed{z(t) = Ce^{i\omega t}} \quad (3.4.41)$$

onde C é uma constante complexa arbitrária, é solução da (3.4.34). Podemos escrever C sob forma trigonométrica,

$$\boxed{C = Ae^{i\varphi}} \quad (3.4.42)$$

Substituindo na (3.4.41) e tomando a parte real, obtemos:

$$x(t) = \text{Re } z(t) = \text{Re } [Ae^{i(\omega t + \varphi)}] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4.43)$$

que é novamente a solução geral (3.2.16), obtida agora pelo *método da notação complexa*. A razão por que basta tomar uma das raízes na (3.4.39) é que a (3.4.41) já depende, através de C , de *duas* constantes (reais) arbitrárias: no caso, A e φ .

As (3.4.37) e (3.4.40) dão

$$\frac{d}{dt} \leftrightarrow i\omega \quad (3.4.44)$$

de modo que, por exemplo,

$$\frac{dz}{dt} = +i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \left\{ \frac{dx}{dt} = \text{Re} \left(\frac{dz}{dt} \right) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \right.$$

o que concorda com a (3.2.23). Lembrando a (3.4.7), vemos que, no plano complexo, dz/dt está adiantado de $+\pi/2$ em relação a z , o que corresponde à quadratura entre deslocamento e velocidade no movimento circular associado (pág. 57).

De fato, lembrando a interpretação de $e^{i\theta}$ como rotação de um ângulo θ , vemos que na (3.4.43), onde $\theta = \omega t + \varphi$, a imagem de $z(t)$ no plano complexo descreve o movimento circular uniforme associado ao MHS.

A vantagem do emprego da notação complexa está no fato de que é bem mais fácil manipular a exponencial do que senos e co-senos. A própria derivada, conforme mostra a (3.4.44), reduz-se a uma operação algébrica: multiplicação por $i\omega$. Veremos depois que o método é especialmente útil na extensão a um oscilador amortecido.

É importante lembrar, porém, que a idéia de trabalhar com números complexos e somente no fim tomar a parte real, como na (3.4.33), *deixa de valer quando há operações não-lineares* no que se refere aos complexos, como ilustrado pela (3.4.31) (por exemplo, quando um número complexo é elevado ao quadrado).

3.5 — Superposição de movimentos harmônicos simples

Há inúmeras situações em que movimentos harmônicos simples se superpõem, gerando um movimento resultante. Exemplo: dois diapasões vibrantes produzem tons musicais puros (que correspondem a MHS), que atingem simultaneamente o tímpano de nosso ouvido, colocando-o em vibração; esta oscilação é gerada pela resultante dos dois MHS.

(a) Mesma direção e frequência

Consideremos primeiro o movimento resultante de dois MHS de mesma direção x e de mesma frequência angular ω :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Se pensarmos em x_1 e x_2 como projeções de vetores girantes \mathbf{OP}_1 e \mathbf{OP}_2 (Fig. 3.28), x será a projeção da resultante \mathbf{OP} desses dois vetores (o conjunto gira rigidamente com velocidade angular ω). A magnitude $A = |\mathbf{OP}|$ da resultante e o ângulo $\varphi_1 + \beta$ que faz com Ox (fig.) se

obtem aplicando as leis dos co-senos e dos senos ao triângulo OP_1P :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.5.2)$$

$$\frac{A_2}{\sin \beta} = \frac{A}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{A_2}{A} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{array} \right. \quad (3.5.3)$$

O movimento resultante é

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1 + \beta) \quad (3.5.4)$$

Como a soma de vetores é a imagem da soma de números complexos, chegaríamos naturalmente ao mesmo resultado (verifique!) tomando a parte real de

$$z_1 + z_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = e^{i(\omega t + \varphi_1)} \underbrace{[A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}]}_{A e^{i\beta}}$$

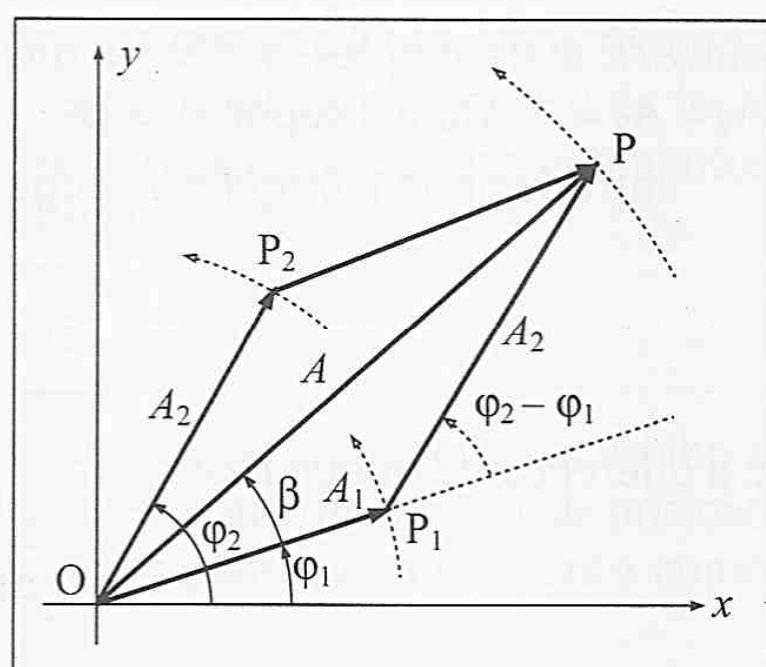


Figura 3.28 — Resultante de vetores girantes

(b) Mesma direção e frequências diferentes. Batimentos

Neste caso,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.5.5)$$

A diferença de fase entre os dois MHS, $\theta_1 - \theta_2 = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$, varia com o tempo, de modo que podemos tomar

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (3.5.6)$$

sem restrição significativa da generalidade.

Para ω_1 e ω_2 quaisquer, o movimento resultante, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ não será em geral sequer um movimento periódico. Para que exista um período τ após o qual x_1 e x_2 voltem simultaneamente ao valor inicial, é necessário que

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 \tau = 2n_1 \pi \\ \omega_2 \tau = 2n_2 \pi \end{array} \right\} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (n_1, n_2 \text{ inteiros})$$

ou seja,
$$n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2 = \tau \quad (3.5.7)$$

de modo que os períodos devem ser comensuráveis. O período τ corresponde à solução da (3.5.7) com os menores valores inteiros possíveis para n_1 e n_2 .

A Fig. 3.29 mostra um exemplo com $A_1 = 3A_2$ e $\tau_1 = 3\tau_2$. Se a razão das frequências é irracional (por exemplo, $\sqrt{2}$), o movimento resultante não é mais periódico.

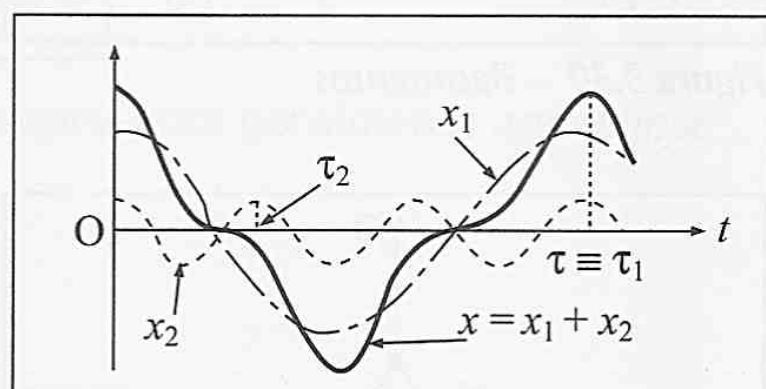


Figura 3.29 — Períodos comensuráveis

Batimentos

Um caso especial muito importante é aquele em que ω_1 e ω_2 são muito próximas uma da

outra. É mais simples analisar o que acontece quando os dois MHS têm a mesma amplitude $A_1 = A_2 = A$. Vamos supor $\omega_1 > \omega_2$.

Introduzindo a *freqüência angular média*

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 2\pi / \bar{\tau} = 2\pi\bar{\nu} \quad (3.5.8)$$

e a *diferença de freqüências*

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi\Delta\nu(>0) \quad (3.5.9)$$

temos

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega, \quad \omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \quad (3.5.10)$$

logo,

$$x = A \left\{ \cos\left(\bar{\omega}t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) + \cos\left(\bar{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right\}$$

ou seja,

$$x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\bar{\omega}t) \quad (3.5.11)$$

Este resultado vale quaisquer que sejam ω_1 e ω_2 , mas o caso de interesse, em que ω_1 e ω_2 são muito próximas, corresponde a supor

$$\Delta\omega \ll \bar{\omega} \quad (3.5.12)$$

Nestas condições, $\cos(\bar{\omega}t)$ oscila rapidamente em confronto com

$$a(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (3.5.13)$$

e podemos considerar $x(t)$ como uma oscilação de freqüência angular $\bar{\omega}$ cuja “amplitude” $|a(t)|$ é *lentamente variável* com o tempo, oscilando com freqüência angular dada pela (3.5.13).

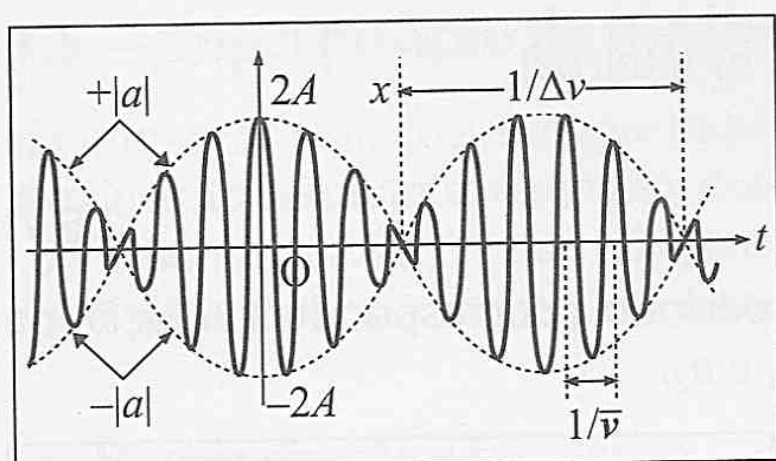


Figura 3.30 — Batimentos

A Fig. 3.30 mostra o gráfico de $x(t)$ (linha cheia) e da *envoltória* das oscilações rápidas (linha interrompida) que corresponde a $\pm |a(t)|$. A *modulação da amplitude* leva ao fenômeno dos *batimentos*, com um período para $|a(t)|$ dado por $1/\Delta\nu$, (intervalo entre dois zeros consecutivos ou dois máximos de $|a|$ consecutivos), que é $\gg 1/\bar{\nu}$, intervalo entre dois máximos consecutivos de $x(t)$.

Se as amplitudes de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ não são iguais, temos ainda uma modulação da amplitude resultante, que passa por máximos e mínimos, mas os mínimos não são mais nulos.

Um exemplo de batimentos sonoros se obtém fazendo vibrar simultaneamente dois diapasões de freqüências de oscilação muito próximas, por exemplo $\nu_1 = 439$ Hz e $\nu_2 = 441$ Hz. O efeito resultante sobre nosso ouvido será a nota musical “lá”, de freqüência $\bar{\nu} = 440$ Hz, mas a intensidade sonora (proporcional a

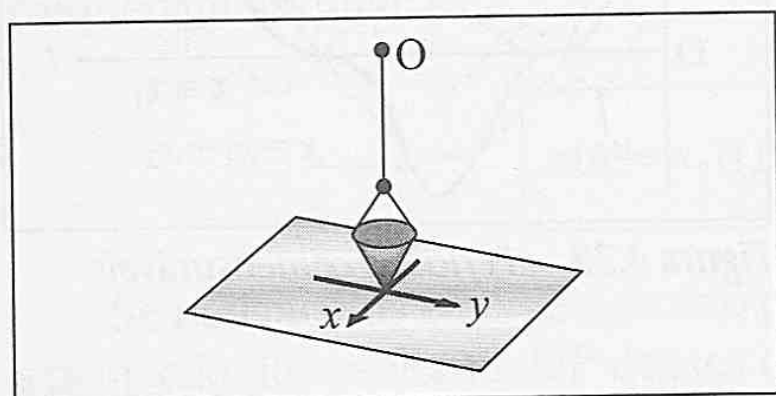


Figura 3.31 — Oscilador bidimensional

$|a(t)|^2$) aumentará e diminuirá periodicamente, passando por um máximo 2 vezes por segundo ($\Delta v = 2$). Batimentos também são perceptíveis quando tocamos simultaneamente uma tecla branca e a tecla preta vizinha num piano, na região dos graves. A desapareição dos batimentos pode ser utilizada como critério na afinação de instrumentos musicais.

(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

Um *oscilador harmônico bidimensional* seria uma partícula cujo movimento é restrito a um plano, sujeita a uma força restauradora proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio estável. Tomando esta posição como origem e o plano do movimento como plano (xy), a equação de movimento será

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (3.5.14)$$

$$\text{o que dá} \quad \ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0, \quad \omega^2 = k/m \quad (3.5.15)$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ou seja,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (3.5.16)$$

$$\text{o que dá} \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) &= B \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.17)$$

Um exemplo prático seriam as pequenas oscilações de um pêndulo cujo movimento não é restrito a um plano vertical dado. Suspendendo por um fio um pequeno funil com areia (Fig. 3.31), a trajetória da ponta fica marcada no plano (xy) pela areia que escorre. Essa trajetória, cujas equações paramétricas são as (3.5.17), representa a composição de dois MHS de mesma frequência em direções perpendiculares.

Para simplificar, podemos escolher a origem dos tempos de tal forma que $\varphi_1 = 0$ na (3.5.17) (isto não muda a trajetória, mas tão-somente o seu ponto inicial).

$$x(t) = A \cos(\omega t); \quad y(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.5.18)$$

onde φ representa a *defasagem* entre as componentes x e y.

Como $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$, vemos que a trajetória está sempre inscrita num retângulo de lados $2A$ e $2B$. Podemos obter a equação da curva eliminando t entre as (3.5.18):

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi = \frac{x}{A} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi$$

o que leva a (verifique!)

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi} \quad (3.5.19)$$

curva de 2.º grau que, por estar inscrita num retângulo, representa geralmente uma *elipse*.

Casos particulares [cf. (3.5.18) e (3.5.19)]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi = 0 & \quad \left\{ \frac{y}{x} = \frac{B}{A} \right\} \\ \varphi = \pi & \quad \left\{ \frac{y}{x} = -\frac{B}{A} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.20)$$

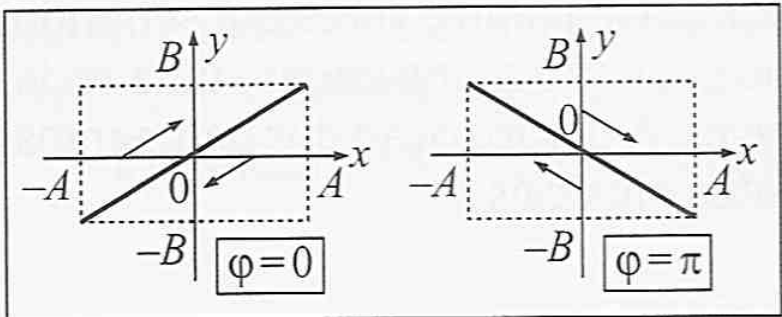


Figura 3.32 — Trajetórias lineares

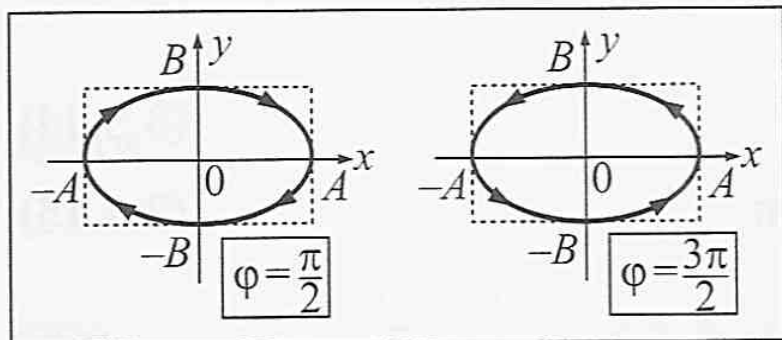


Figura 3.33 — Trajetórias elípticas

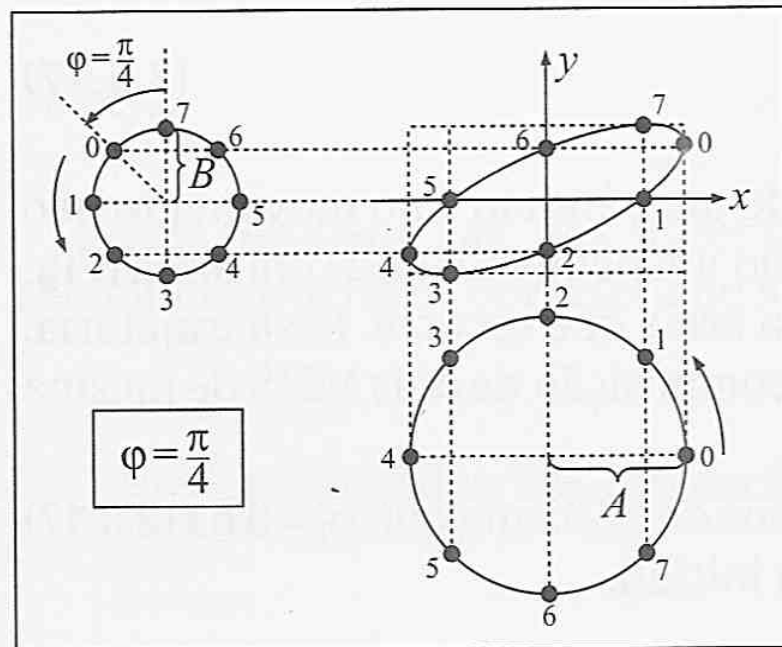


Figura 3.34 — Defasagem $\varphi = \pi/4$

midade de E descreve uma elipse: diz-se que a onda é *elipticamente polarizada*. O caso particular (3.5.20) corresponde a *polarização linear*, e as (3.5.21), com $A = B$, a *polarização circular*, que é *direita* ou *esquerda* conforme o sentido de percurso do círculo nesse caso.

(d) Frequências diferentes e direções perpendiculares

Uma realização experimental neste caso consiste em aplicar duas voltagens oscilantes de frequências angulares ω_1 e ω_2 aos pares de placas defletoras perpendiculares (x e y) de um osciloscópio: a imagem do feixe de elétrons na tela descreve então as trajetórias correspondentes, que se chamam *curvas de Lissajous*. A construção geométrica dessas curvas pode ser feita pelo método dos círculos de referência, acima indicado.

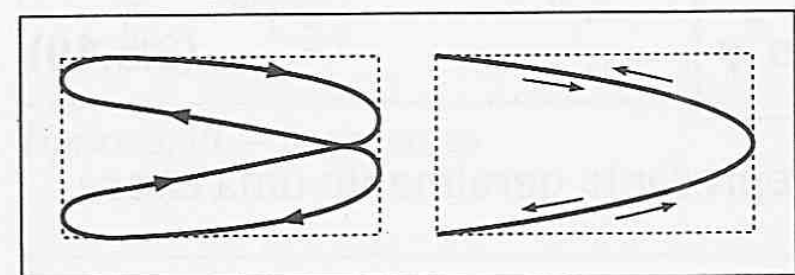


Figura 3.35 — Curvas de Lissajous

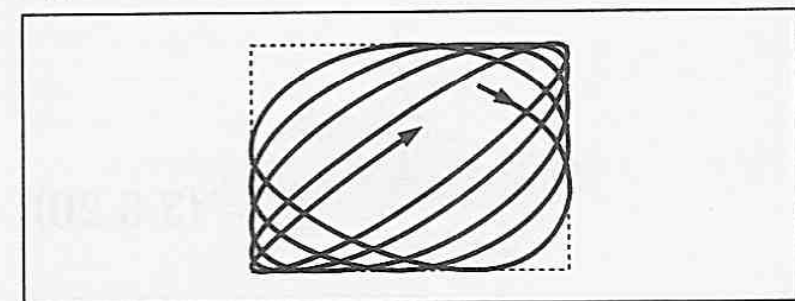


Figura 3.36 — Períodos incomensuráveis

ou seja, nestes casos, a elipse degenera num segmento de reta, que é (Fig. 3.32) a diagonal principal ou secundária do retângulo. O pêndulo do exemplo acima oscila como pêndulo plano.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (3.5.21)$$

Nestes casos, os eixos principais da elipse coincidem com os eixos coordenados (Fig. 3.33). A diferença entre os dois casos é o sentido de percurso da elipse, que é *horário* para $\varphi = \pi/2$ e *anti-horário* para $\varphi = 3\pi/2$. Isto pode ser visto pelas (3.5.18), que dão $(x, y) = (A, 0)$ para $t = 0$ e, para $t = \tau/4$ ($\omega t = \pi/2$), com $\varphi = \pi/2$, $(x, y) = (0, -B)$, e, com $\varphi = 3\pi/2$, $(x, y) = (0, B)$.

Para outros valores da defasagem φ , a elipse é inclinada em relação aos eixos coordenados, como mostra a Fig. 3.34 para $\varphi = \pi/4$. A figura também ilustra um método de construção geométrica da trajetória a partir das posições simultâneas de vetores girantes em dois círculos de referência, um associado ao oscilador x e outro ao oscilador y .

Conforme será visto mais tarde, numa onda eletromagnética plana de frequência ω que se propaga na direção z , o vetor campo elétrico E tem componentes x e y , que oscilam harmonicamente, como as (3.5.18). Logo, num dado plano $z = \text{constante}$, a extre-

midade de E descreve uma elipse: diz-se que a onda é *elipticamente polarizada*. O caso particular (3.5.20) corresponde a *polarização linear*, e as (3.5.21), com $A = B$, a *polarização circular*, que é *direita* ou *esquerda* conforme o sentido de percurso do círculo nesse caso.

Se os períodos τ_1 e τ_2 são comensuráveis [cf. (3.5.7)], a trajetória é periódica, ou seja, acaba retornando ao ponto de partida, como ilustrado na Fig. 3.35 para $\tau_2 = 2\tau_1$, e diferentes defasagens.

Se os períodos são incomensuráveis, a trajetória não é periódica, ou seja, nunca “se fecha”; um exemplo está ilustrado na Fig. 3.36.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 3

- Um bloco de massa M , capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica k , inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa m , lançada em direção ao bloco com velocidade horizontal v , atinge-o no instante $t = 0$ e fica grudada nele (Fig. P.1). Ache a expressão do deslocamento x do sistema para $t > 0$.

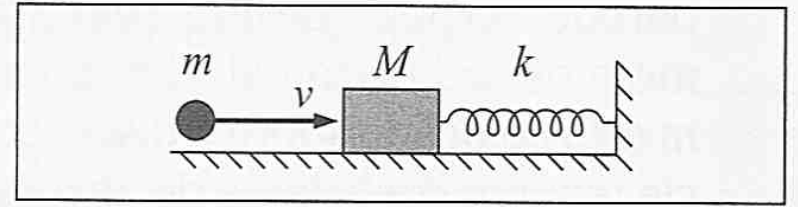


Figura P.1

- Uma partícula de massa m está suspensa do teto por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado l_0 , cuja massa é desprezível. A partícula é solta em repouso, com a mola relaxada. Tomando o eixo Oz orientado verticalmente para baixo, com origem no teto, calcule a posição z da partícula em função do tempo.

- Duas partículas 1 e 2 de mesma massa m estão presas por molas de constante elástica k , comprimento relaxado l_0 e massa desprezível, a paredes verticais opostas, separadas de $2l_0$; as massas podem deslizar sem atrito sobre uma superfície horizontal (Fig. P.2). Tem-se $m = 10\text{ g}$ e $k = 100\text{ N/m}$. No instante $t = 0$, a partícula 1 é deslocada de 1 cm para a esquerda e 2 de 1 cm para a direita, comunicando-se a elas velocidades de magnitude $\sqrt{3}\text{ m/s}$, para a esquerda (partícula 1) e para a direita (partícula 2). (a) Escreva as expressões dos deslocamentos x_1 e x_2 das duas partículas para $t > 0$. (b) As partículas irão colidir uma com a outra? Em que instante? (c) Qual a energia total do sistema?

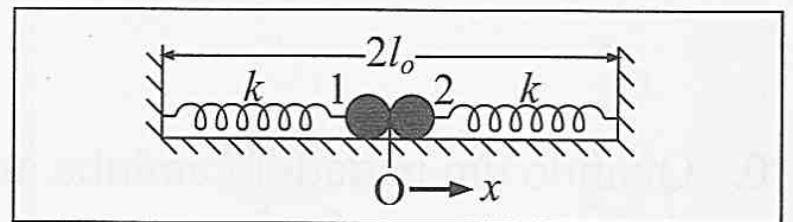


Figura P.2

- Uma conta de massa m enfiada num aro vertical fixo de raio r , no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo θ (Fig. P.3) permanece pequeno. Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule o período.

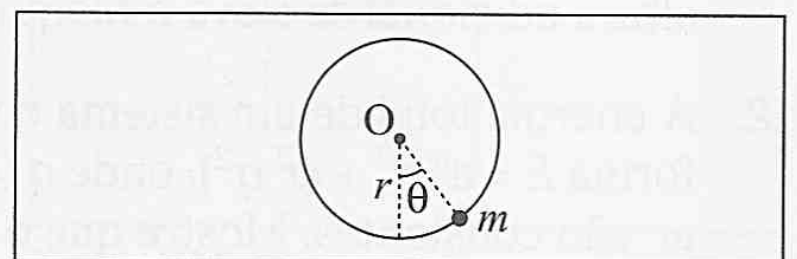


Figura P.3

- Uma bola de massa m de massa fresca de pão cai de uma altura h sobre o prato de uma balança de mola e fica grudada nele (1, Cap. 6, Problema 6). A constante da mola é k , e as massas da mola e do prato podem ser desprezadas. (a) Qual é a amplitude de oscilação do prato? (b) Qual é a energia total de oscilação?

- Uma placa circular homogênea de raio R e massa M é suspensa por um fio de módulo de torção K de duas maneiras diferentes: (a) Pelo centro C da placa, ficando ela num plano horizontal; (b) Por um ponto O da periferia, com a placa vertical. Calcule os períodos τ_a e τ_b das pequenas oscilações de torção, respectivamente nos casos (a) e (b) (Fig. P.4).

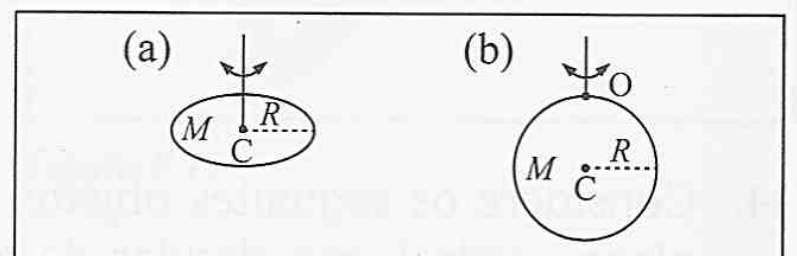


Figura P.4

- Um pêndulo balístico de madeira, de massa igual a 10 kg, suspenso por um fio de 1 m de comprimento, é atingido no instante $t = 0$ por uma bala de 10 g, viajando à velocidade de 300 m/s, que fica encravada nele. Ache o ângulo θ (em rad) entre o fio e a vertical como função de t .

8. Um disco de massa M , preso por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a uma parede vertical, desliza sem atrito sobre uma mesa de ar horizontal. Um bloquinho de massa m está colocado sobre o disco, com cuja superfície tem um coeficiente de atrito estático μ_e . Qual é a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue sobre ele?

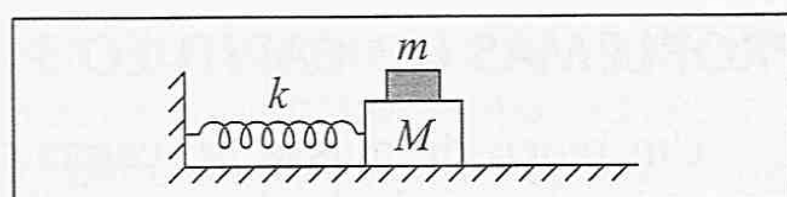


Figura P.5

9. Um densímetro (Cap. 1, Probl. 11), flutuando em equilíbrio na água, tem um volume V_0 submerso (Fig. P.6); a área da secção transversal da porção cilíndrica é A . Empurrando-o verticalmente para baixo, o densímetro entra em pequenas oscilações na direção vertical. Calcule a frequência angular de oscilação.

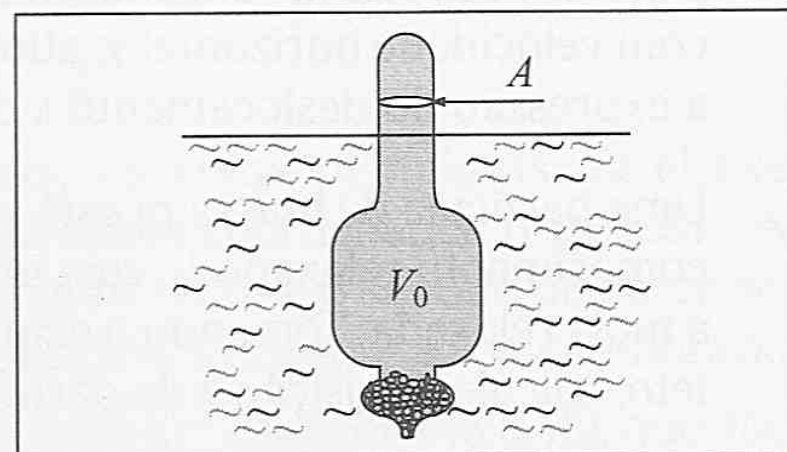


Figura P.6

10. Quando um nadador caminha até a extremidade de um trampolim horizontal, ele desce de 5 cm sob a ação do peso, no equilíbrio. Desprezando a massa do trampolim, calcule a sua frequência angular de oscilação em torno do equilíbrio, com o nadador permanecendo na extremidade.
11. Um tremor de terra coloca em vibração no sentido vertical, com frequência angular $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$ e amplitude de 4 cm, uma plataforma horizontal, sobre a qual está colocado um bloquinho de madeira. A plataforma move-se inicialmente para cima. (a) De que altura terá subido a plataforma no momento em que o bloquinho se desprende dela? (b) De que altura adicional se eleva o bloquinho depois que se separou da plataforma?
12. A energia total de um sistema conservativo na vizinhança de um equilíbrio estável é da forma $E = a (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$, onde q (deslocamento, ângulo, ...) é o desvio do equilíbrio e a e ω são constantes. Mostre que o sistema oscila com frequência angular ω .
13. Uma bolinha homogênea de massa m e raio r rola sem deslizar sobre uma calha cilíndrica de raio $R \gg r$, na vizinhança do fundo, ou seja, com $\theta \ll 1$ (Fig. P.7). Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule a frequência angular ω .

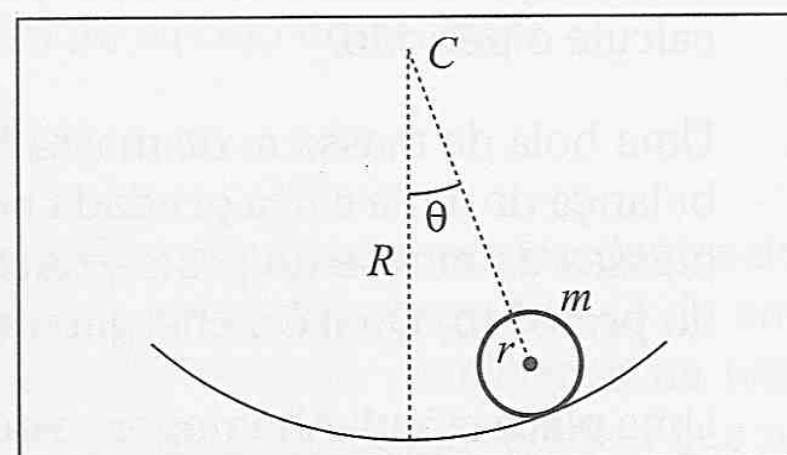


Figura P.7

14. Considere os seguintes objetos oscilando num plano vertical: aro circular de diâmetro l , suspenso de O_a [Fig. P.8(a)] e placa circular homogênea de diâmetro l , suspensa de O_b [Fig. P.8(b)]. Compare os respectivos períodos τ_a e τ_b com o período de oscilação τ de um pêndulo simples de comprimento l .

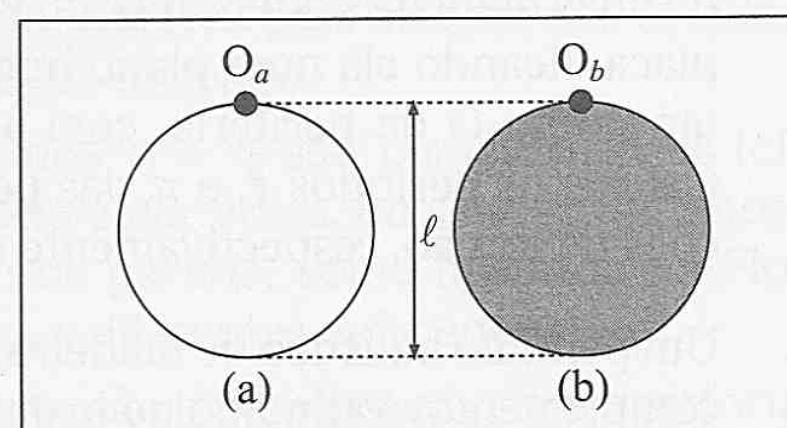


Figura P.8

15. Um pêndulo físico é formado por uma barra delgada homogênea de comprimento l , suspensa por um ponto à distância s ($< l/2$) de seu centro, oscilando num plano vertical. Para que valor de s o período de oscilação é mínimo? Quanto vale então?

16. Um fio de arame de comprimento $2l$ é dobrado ao meio, formando um ângulo de 60° , e é suspenso pelo vértice O (Fig. P.9), oscilando num plano vertical. Calcule o período τ de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

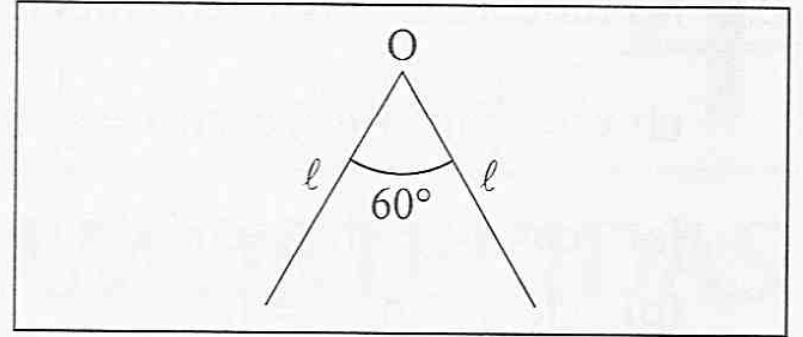


Figura P.9

17. Um oscilador harmônico começa a oscilar em $t = 0$. Após $1/4$ de período, sua energia cinética é 3 vezes maior que a energia potencial. Qual é a fase inicial? (Dê todos os valores possíveis).

18. Com um bloco de massa m e duas molas, de constantes elásticas k_1 e k_2 , montam-se os dois arranjos indicados nas Figs. P.10(a) e (b). Calcule as respectivas frequências angulares ω_a e ω_b de pequenas oscilações verticais em torno do equilíbrio.

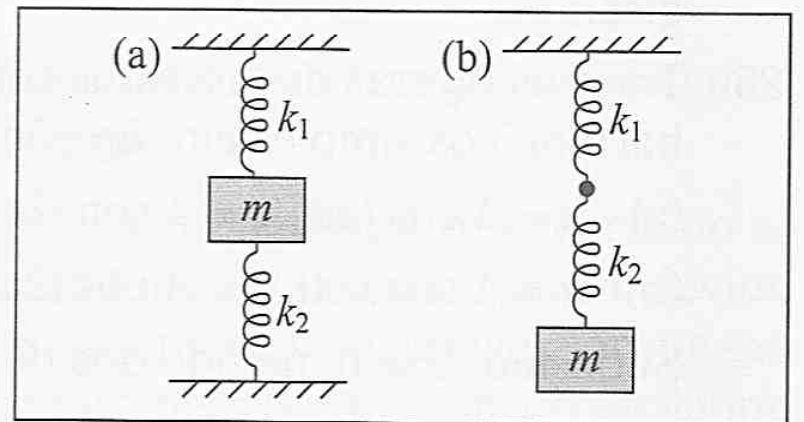


Figura P.10

19. O pêndulo da Fig. P.11, formado por uma barra de massa desprezível e comprimento l com uma massa m suspensa, está ligado em seu ponto médio a uma mola horizontal de massa desprezível e constante elástica k , com a outra extremidade fixa e relaxada quando o pêndulo está em equilíbrio na vertical. Calcule a frequência angular ω de pequenas oscilações no plano vertical.

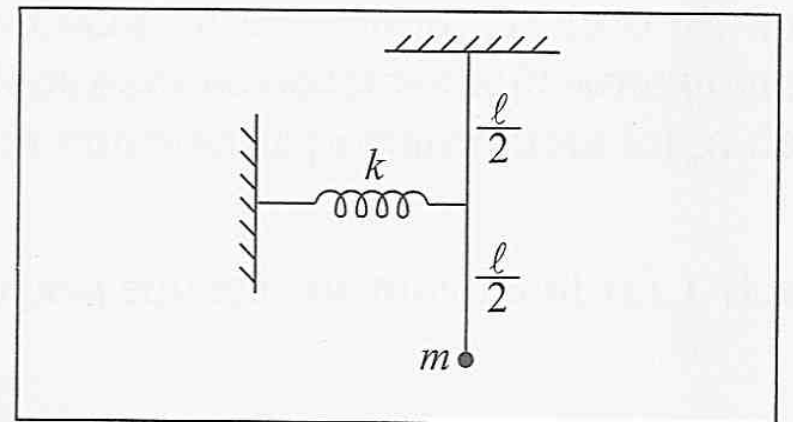


Figura P.11

20. Um tubo cilíndrico cuja secção transversal tem área A está dobrado em forma de V, com um ramo vertical e o outro formando um ângulo ϕ com a vertical, e contém uma massa M de um líquido de densidade ρ (Fig. P.12). Produz-se um pequeno desnível entre um ramo e o outro. Calcule a frequência angular de oscilação da massa líquida.

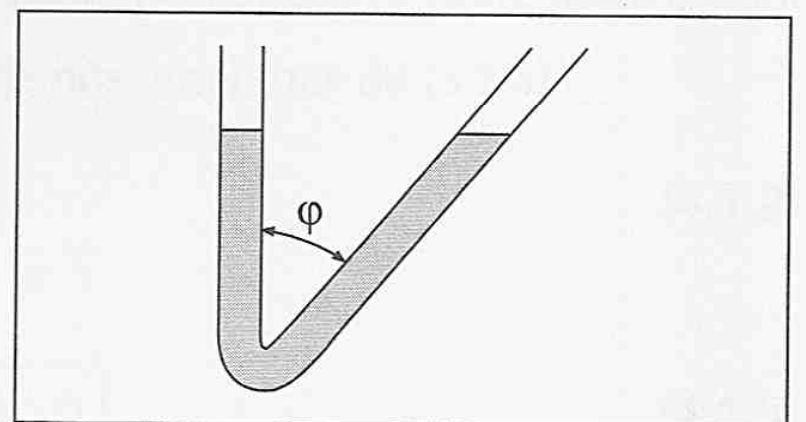


Figura P.12

21. A molécula de HCl é uma molécula iônica, que podemos considerar como resultante da interação entre os íons H^+ e Cl^- , com energia potencial de interação dada por $U(r) = -K(e^2/r) + B/r^{10}$, onde r é a distância entre os centros. O primeiro termo é a atração coulombiana ($k = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$), e o segundo representa uma interação repulsiva a curta distância ($B > 0$). A distância entre os centros na molécula é de $1,28 \text{ \AA}$; uma unidade de massa atômica vale $1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$. (a) Calcule a "constante de mola efetiva" k da ligação. (b) Calcule a frequência de vibração ν da molécula (clássica).

22. Use a fórmula de Euler (3.4.19) e as regras para cálculo de produto e potências de números complexos para calcular : (a) $\cos(a + b)$ e $\sin(a + b)$; (b) $\cos(3a)$ e $\sin(3a)$ em função de \cos e \sin de a e b .

23. As funções $\operatorname{ch} x$ (co-seno hiperbólico) e $\operatorname{sh} x$ (seno hiperbólico) são definidas por:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \text{ e } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}). \text{ Mostre que:}$$

(a) $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$; $\sin(ix) = i \operatorname{sh} x$;

(b) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

(c) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

24. Ache o movimento resultante de dois movimentos harmônicos simples na mesma direção

dados por: $x_1 = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, $x_2 = \sin(\omega t)$. Represente graficamente os respectivos vetores girantes.

25. Trace as figuras de Lissajous correspondentes à composição dos seguintes movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares:

(a) $x = A \cos(\omega t)$, $y = A \sin(2\omega t)$

(b) $x = A \sin(\omega t)$, $y = A \cos(2\omega t)$

Sugestão: Use o método dos dois círculos de referência [Seç. 3.5 (c)].

Capítulo 4

OSCILAÇÕES AMORTECIDAS E FORÇADAS

4.1 — Oscilações amortecidas

As oscilações harmônicas simples, estudadas no capítulo anterior, ocorrem em sistemas conservativos. Na prática, sempre existe dissipação da energia.

Assim, no caso de um pêndulo, as oscilações se amortecem devido à *resistência do ar* (além do *atrito* no suporte). As oscilações de um líquido num tubo em U se amortecem devido à *viscosidade* do líquido. As vibrações de um diapásão produzem um som audível porque são comunicadas ao ar, gerando ondas sonoras. A energia utilizada para isto provém do oscilador, dando origem a *amortecimento por emissão de radiação sonora*.

Conforme vimos (Seção 2.7; 1, Seção 5.2), a resistência de um fluido, como o ar, ao deslocamento de um obstáculo, é proporcional à velocidade para velocidades suficientemente pequenas, o que se aplica a pequenas oscilações. Vamos considerar portanto uma força de amortecimento proporcional à velocidade.

Para um oscilador unidimensional, como o descrito pela equação de movimento (3.1.4), a resistência dá origem a um termo adicional:

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}, \quad \rho > 0 \quad (4.1.1)$$

onde $-\rho\dot{x}$ representa a resistência dissipativa, que atua em sentido oposto à velocidade ($\rho > 0$).

Dividindo por m ambos os membros da (4.1.1), obtemos, em lugar da (3.1.5),

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.1.2)$$

onde

$$\omega_0^2 = k / m, \quad \gamma = \rho / m > 0 \quad (4.1.3)$$

A (4.1.2) é uma equação diferencial linear homogênea de 2.^a ordem com coeficientes constantes (3.2.12), de modo que, como na (3.4.35), podemos procurar uma solução, usando notação complexa, da forma

$$z(t) = e^{pt} \quad \{ \dot{z} = pz, \quad \ddot{z} = p^2 z \quad (4.1.4)$$

o que leva à equação característica

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad (4.1.5)$$

cujas raízes são

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (4.1.6)$$

Se $\gamma/2 < \omega_0$, dizemos que o amortecimento é *subcrítico*. Neste caso, na (4.1.6), temos a raiz quadrada de um número negativo, e [cf. (3.4.39)] reescrevemos a (4.1.6) como

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (4.1.7)$$

Para satisfazer às condições iniciais, precisamos de uma solução com duas constantes reais arbitrárias. Podemos tomar a combinação linear das soluções correspondentes às duas raízes da equação característica:

$$z(t) = ae^{p_+t} + be^{p_-t} \quad (4.1.8)$$

onde a e b são constantes reais. Para amortecimento subcrítico, pela (4.1.7),

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}) \quad (4.1.9)$$

Tomando a parte real da (4.1.9), obteríamos a solução da (4.1.2) em forma análoga à (3.2.15) para o MHS:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \quad (4.1.10)$$

Outra forma equivalente se obtém procedendo como nas (3.4.41) a (3.4.43):

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot Ce^{i\omega t}, \quad C = Ae^{i\varphi} \quad (4.1.11)$$

o que dá, tomando a parte real,

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1.12)$$

onde as duas constantes reais arbitrárias são agora A e φ .

Ajuste das condições iniciais: A (4.1.10) dá

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}x(t) + e^{-\frac{\gamma}{2}t} [-\omega a \sin(\omega t) + \omega b \cos(\omega t)]$$

de modo que, para satisfazer às condições iniciais (3.2.3) e (3.2.4), devemos ter

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 = a \\ \dot{x}(0) &= v_0 = -\frac{\gamma}{2}a + \omega b \end{aligned} \right\} b = \frac{1}{\omega} \left(v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0 \right)$$

o que leva a [cf. (3.2.25)]

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega} \right) \sin(\omega t) \right] \quad (4.1.13)$$

o que também pode ser escrito sob a forma (4.1.12) [cf. (3.2.26) e (3.2.27)].

A grande vantagem da notação complexa é a unificação entre as funções trigonométricas e a função exponencial [cf. (4.1.8), (4.1.10)]. Vale a pena verificar diretamente, por diferenciação, que a (4.1.12) satisfaz a equação diferencial (4.1.2).

4.2 — Discussão dos resultados

Vamos agora discutir e interpretar os resultados obtidos na Seção anterior. Há três casos: (a) Amortecimento subcrítico: $\gamma/2 < \omega_0$; (b) Amortecimento supercrítico: $\gamma/2 > \omega_0$; (c) Amortecimento crítico: $\gamma/2 = \omega_0$.

(a) Amortecimento subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$)

Neste caso, a solução é dada pela (4.1.12). O gráfico de $x(t)$ está representado na Fig. 4.1, para $\varphi = 0$. Vemos que representa efetivamente uma *oscilação amortecida*. Para o caso de *amortecimento fraco*, $\gamma \ll \omega_0$, o fator $Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$ pode ser considerado como amplitude de oscilação lentamente variável [cf. (3.5.13)], e as curvas exponencialmente decrescentes $\pm Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$ definem a *envoltória* das oscilações (em linha inter-rompida na Fig. 4.1).

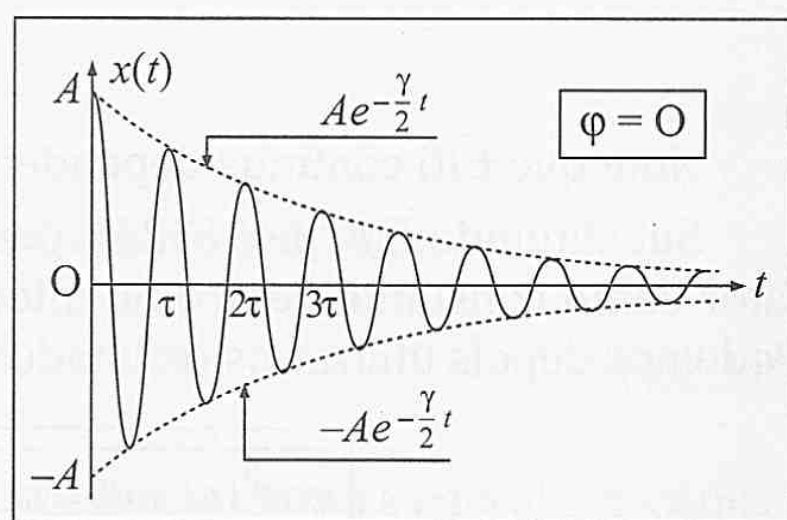


Figura 4.1 — Oscilações amortecidas

Embora as oscilações não sejam mais periódicas, continuaremos chamando de “período” o intervalo $\tau = 2\pi/\omega$. Note que, pela (4.1.7), é $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$ ou seja, ω é $< \omega_0$ e decresce à medida que o amortecimento aumenta.

O balanço de energia

A energia mecânica do oscilador no instante t é dada por [cf. (3.2.30)]

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) \quad (4.2.1)$$

e não é mais conservada: a dissipação converte-a em outras formas de energia. A taxa de variação temporal de $E(t)$ é

$$\frac{dE}{dt} = m \ddot{x} \dot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + kx)$$

ou seja, pelas (4.1.1) e (4.1.3),

$$\frac{dE}{dt} = -\rho \dot{x}^2 = -m\gamma \dot{x}^2 \quad (4.2.2)$$

Logo, a taxa instantânea de dissipação da energia mecânica do oscilador é igual ao produto da força de resistência $-\rho \dot{x}$ pela velocidade \dot{x} , sendo portanto proporcional ao quadrado da velocidade instantânea. Note que dE/dt é sempre ≤ 0 , anulando-se nos instantes em que a velocidade se anula, e acompanhando a oscilação de \dot{x}^2 durante cada período.

Substituindo na (4.2.1) os valores de $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ tirados da (4.1.12), obtemos

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma}{2} \omega \cdot \underbrace{2 \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)}_{\sin[2(\omega t + \varphi)]} \right] \quad (4.2.3)$$

Para *amortecimento fraco*, $\gamma \ll \omega_0$, o fator $e^{-\gamma t}$ na (4.2.3) varia muito pouco durante um período de oscilação (ou mesmo durante vários períodos). Interessamos calcular o *valor médio* $\bar{E}(t)$ da energia instantânea durante um período, definido de forma análoga à (3.2.31):

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t') dt' \quad (4.2.4)$$

Note que $\bar{E}(t)$ continua dependendo de t através dos limites de integração.

Substituindo $E(t')$ pela (4.2.3), podemos, para $\gamma \ll \omega_0$, tomar $e^{-\gamma t'} \approx e^{-\gamma t}$ ou seja, tratar esse fator como constante dentro do intervalo de integração, retirando-o para fora da integral. Podemos depois utilizar os resultados

$$\overline{\cos^2(\omega t + \varphi)} = \overline{\sin^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\sin[2(\omega t + \varphi)]} = 0 \quad (4.2.5)$$

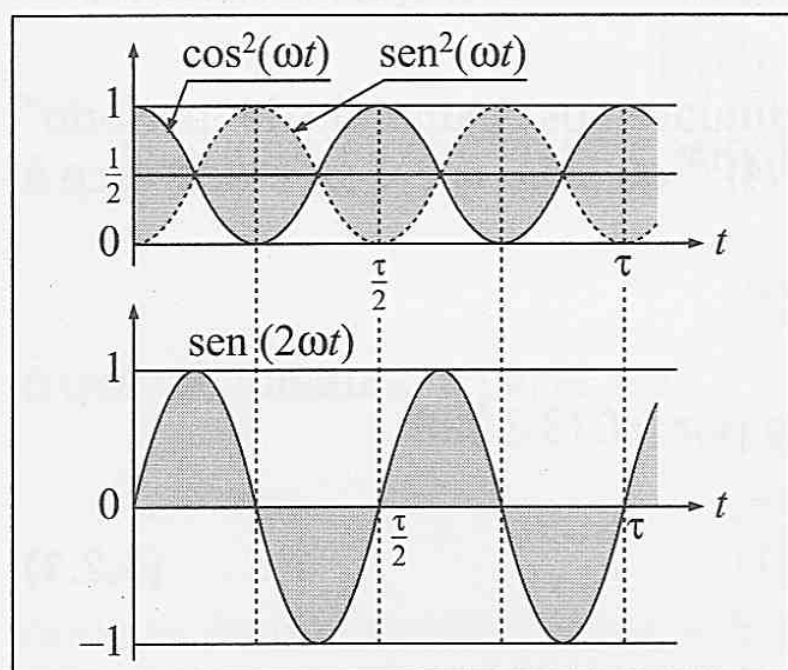


Figura 4.2 — Valores médios

cuja demonstração gráfica se encontra na Fig. 4.2 (onde tomamos $\varphi = 0$). As áreas das curvas situadas acima e abaixo do valor médio (sombreadas nas figuras) são iguais. É fácil dar também uma demonstração analítica (verifique!), usando as identidades

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (4.2.6)$$

as integrais

$$\left. \begin{aligned} \int \cos(2\omega t' + \varphi) dt' &= \frac{\sin(\omega t' + \varphi)}{2\omega} \\ \int \sin(2\omega t' + \varphi) dt' &= -\frac{\cos(2\omega t' + \varphi)}{2\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

e a periodicidade das funções trigonométricas. Também já utilizamos estes resultados para obter as (3.2.33).

Finalmente, o resultado da substituição da (4.2.3) na (4.2.4) é

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}(t) &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} \\ &= \bar{E}(0) e^{-\gamma t} \end{aligned} \right\} (\gamma \ll \omega_0) \quad (4.2.8)$$

mostrando que, para amortecimento fraco, a energia média do oscilador decai exponencialmente com o tempo.

A Fig. 4.3 mostra o gráfico de $\bar{E}(t)$ (linha cheia), bem como do valor instantâneo $E(t)$

(linha inter-rompida), que oscila em torno de $\bar{E}(t)$. Podemos caracterizar o tempo de decaimento τ_d (fig.) como aquele para o qual a energia média cai a $1/e \approx 1/2,7$ de seu valor inicial, o que dá

$$\tau_d = 1/\gamma \quad (4.2.9)$$

A (4.2.8) dá

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\gamma \bar{E} \quad (\gamma \ll \omega_0) \quad (4.2.10)$$

de modo que γ representa a taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo.

Fator de mérito

A energia dissipada em 1 ciclo de oscilação, de acordo com a (4.2.10), é

$$\Delta \bar{E} = -\frac{d\bar{E}}{dt} \cdot \tau = \gamma \bar{E} \tau \quad (4.2.11)$$

pois corresponde a um intervalo de tempo $\Delta T = \tau$. Na (4.2.11), \bar{E} representa a energia mecânica média ainda armazenada no oscilador no instante considerado.

Chama-se *fator de mérito* ou fator “Q” (= qualidade) do oscilador a grandeza

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{Energia armazenada no oscilador}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \right) \quad (4.2.12)$$

Pela (4.2.11),

$$Q = 2\pi \bar{E} / \Delta \bar{E} = \frac{2\pi}{\gamma \tau} = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (4.2.13)$$

que é $\gg 1$, pela hipótese do amortecimento fraco.

Quanto maior o fator Q, menor o amortecimento por oscilação. Pela (4.2.9), podemos também escrever

$$Q = 2\pi \tau_d / \tau \quad (4.2.14)$$

ou seja, o fator Q é proporcional à razão do tempo de decaimento para o período. Este fator é empregado como fator de mérito nas oscilações da voltagem ou corrente em circuitos elétricos, que, conforme será visto mais tarde, são inteiramente análogas às oscilações mecânicas.

(b) Amortecimento supercrítico ($\gamma/2 > \omega_0$)

Neste caso, podemos utilizar diretamente as (4.1.8), (4.1.6), que dão

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (ae^{\beta t} + be^{-\beta t}) \quad (4.2.15)$$

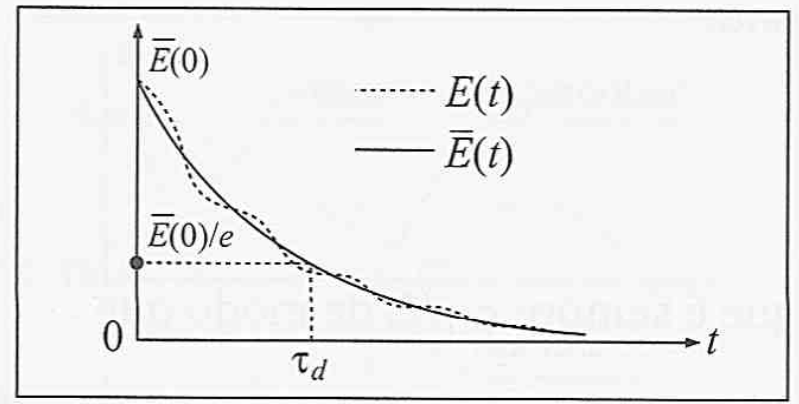


Figura 4.3 — Tempo de decaimento

onde

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (4.2.16)$$

que é sempre $< \gamma/2$, de modo que

$$x(t) = a \exp \left[-\underbrace{\left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right)}_{>0} t \right] + b \exp \left[-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) t \right]$$

é sempre a soma de duas exponenciais decrescentes.

Aquela que tem $\gamma/2 + \beta$ no expoente decai mais rapidamente do que a outra, de modo que, para tempos grandes, o decaimento é como

$$\exp \left[-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right) t \right]$$

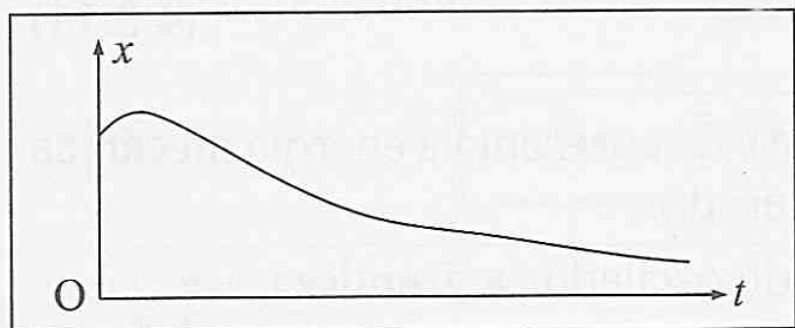


Figura 4.4 — Amortecimento supercrítico

De qualquer forma, o movimento não é mais periódico, prevalecendo o amortecimento. A Fig. 4.4 dá uma idéia do comportamento de $x(t)$ quando $x_0 > 0$, $v_0 > 0$.

(c) Amortecimento crítico ($\gamma/2 = \omega_0$)

Como $\beta = 0$ neste caso, as duas soluções independentes na (4.2.15) se reduzem a uma única. Entretanto, para $\beta > 0$, a combinação linear

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta} \right)$$

é solução. Para $\beta \rightarrow 0$, o fator entre parênteses tende a

$$\left[\frac{d}{d\beta} (e^{\beta t}) \right]_{\beta=0} = t$$

de modo que

$$x_1(t) = t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (4.2.17)$$

deveria ser solução da (4.1.2) quando $\omega_0 = \gamma/2$. Isto pode ser comprovado por substituição direta (verifique!).

A solução geral para amortecimento crítico é então

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a + bt) \quad (4.2.18)$$

que decai *mais rapidamente*, para tempos grandes, que a (4.2.15), onde o termo em e^{bt} , como vimos, reduz o decaimento. A Fig. 4.5, que compara as soluções dos três tipos para as mesmas condições iniciais, mostra que a *solução com amortecimento crítico é aquela que retorna ao equilíbrio mais rapidamente*. Por isto, este tipo de amortecimento é empregado quando desejamos amortecer o movimento o mais depressa possível, como acontece em galvanômetros ou balanças de precisão, para tornar mais rápida a leitura do instrumento.

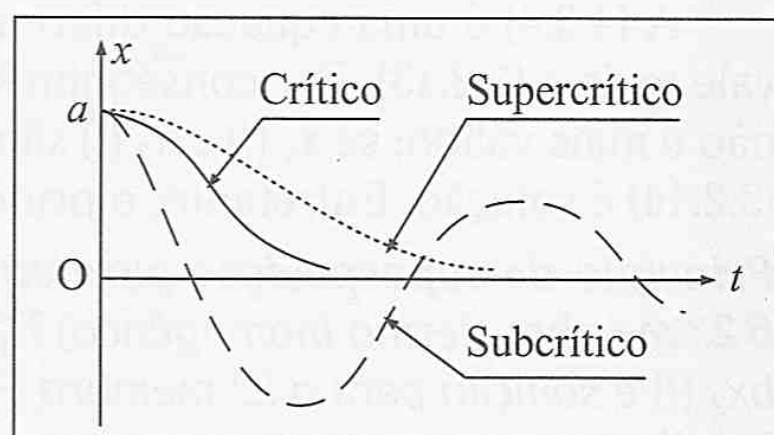


Figura 4.5 — Comparação de amortecimentos

4.3 — Oscilações forçadas. Ressonância

Até agora, consideramos apenas *oscilações livres*, em que o oscilador recebe uma certa energia inicial (através de seu deslocamento e velocidade iniciais) e depois é solto, evoluindo livremente. O período de oscilação é determinado pela própria natureza do oscilador, ou seja, por sua inércia e pelas forças restauradoras que atuam sobre ele. A oscilação é amortecida pelas forças dissipativas atuantes (ou, no caso limite em que as desprezamos, persiste indefinidamente).

Vamos estudar agora o efeito produzido sobre o oscilador por uma *força externa periódica*. O período desta força não coincidirá em geral com o período próprio do oscilador, de modo que as oscilações por ela produzidas chamam-se *oscilações forçadas*. A força externa supre continuamente energia ao oscilador, compensando a dissipação.

Alguns exemplos de oscilações forçadas são: as oscilações do diafragma de um microfone ou do tímpano de nosso ouvido sob a ação das ondas sonoras; as oscilações de uma pessoa sentada num balanço sob a ação de empurrões periódicos; as oscilações elétricas, produzidas num circuito detector de rádio ou televisão sob o efeito do sinal eletromagnético captado; as oscilações dos elétrons em átomos ou moléculas de um meio material sob a ação de uma onda eletromagnética, como a luz, que se propaga nesse meio.

Nesta Seção, vamos considerar o caso limite de um oscilador *não-amortecido*.

(a) Solução estacionária

Seja

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (4.3.1)$$

a força externa, de frequência angular ω . A equação de movimento é então [cf. (3.1.4)]:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (4.3.2)$$

Vamos chamar de ω_0 a *frequência própria* ou *frequência natural* (abreviando para “frequência” a expressão “frequência angular”, o que faremos muitas vezes) das oscilações livres:

$$\omega_0^2 = k / m \quad (4.3.3)$$

A (4.3.2) dá então

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (4.3.4)$$

A (4.3.4) é uma equação diferencial de 2.^a ordem *inomogênea* [cf. (3.2.12)], ou seja, não vale mais a (3.2.13). Por conseguinte, o princípio de superposição sob a forma da Seção 3.2 não é mais válido: se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, não é mais verdade que a combinação linear (3.2.14) é solução. Entretanto, o princípio continua valendo no seguinte sentido:

Princípio de superposição para equações lineares inomogêneas: Se $x_1(t)$ é solução para o 2.^o membro (termo inomogêneo) $F_1(t)$, e $x_2(t)$ para o 2.^o membro $F_2(t)$, então $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ é solução para o 2.^o membro $F(t) = aF_1(t) + bF_2(t)$. A verificação a partir da (3.2.12) é imediata.

Em particular, tomando $F_2(t) = 0$, vemos que, somando a uma solução da equação inomogênea uma solução da equação homogênea, obtemos ainda uma solução da mesma equação inomogênea.

A solução geral, tratando-se de uma equação diferencial de 2.^a ordem, continua dependendo de duas constantes arbitrárias (necessárias para o ajuste às condições iniciais). Se já conhecemos a solução geral da equação homogênea (como acontece no caso atual), contendo duas constantes arbitrárias, o resultado acima mostra que basta obter *uma solução particular* da equação inomogênea: a *solução geral da equação inomogênea obtém-se somando à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação inomogênea*.

A solução geral da equação homogênea corresponde neste caso às *oscilações livres*. Na presença de dissipação (que sempre existe na prática), sabemos que as oscilações livres são *amortecidas*, ou seja, tendem a zero para $t \rightarrow \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que τ_d , o tempo de decaimento. Por outro lado, a força externa (4.3.1) continua suprindo energia indefinidamente, de modo que as oscilações forçadas devem persistir e, para $t \gg \tau_d$, devem sobreviver apenas as oscilações forçadas, correspondendo à solução particular da equação inomogênea.

Dizemos por isto que a solução particular é a *solução estacionária*, ao passo que a parte de oscilações livres é um *transiente*, ou seja, tem um *efeito transitório*, dependente das condições iniciais, que desaparece para $t \gg \tau_d$. Em geral, nas oscilações forçadas, interessa-nos apenas a solução estacionária.

Embora a (4.3.2) corresponda ao caso limite ideal em que desprezamos a dissipação, continuaremos empregando a mesma linguagem. A *solução estacionária*, que desejamos obter, é então uma *solução particular* da equação inomogênea.

Para obter esta solução, vamos empregar a notação complexa. Se

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (4.3.5)$$

a (4.3.4) é a parte real da equação complexa

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (4.3.6)$$

de modo que basta achar uma solução particular desta equação, e depois tomar sua parte real.

É de se esperar que a oscilação produzida pela força externa tenha a mesma frequência que esta força. Isso nos leva a procurar uma solução particular da forma

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad (4.3.7)$$

o que dá [cf.(3.4.37)]

$$\dot{z} = i\omega z \left\{ \ddot{z} = -\omega^2 z \right\} \quad (4.3.6) \quad (\omega_0^2 - \omega^2)z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

ou seja,

$$z(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (4.3.8)$$

Temos [cf. (3.4.41), (3.4.42)]

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = A e^{i\varphi} \quad (4.3.9)$$

onde

$$A = \frac{F_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (4.3.10)$$

e podemos tomar

$$\varphi = 0 \quad (\omega < \omega_0), \quad \varphi = -\pi \quad (\omega > \omega_0) \quad (4.3.11)$$

Isto significa apenas que o número real (4.3.9) é positivo para $\omega < \omega_0$ e negativo para $\omega > \omega_0$. Como $-1 = e^{\pm i\pi}$ (3.4.26), poderíamos também ter tomado $\varphi = +\pi$ para $\omega > \omega_0$.

Tomando a parte real da (4.38), obtemos, como na (3.4.43),

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.3.12)$$

de modo que esta solução particular (solução estacionária) corresponde a uma *oscilação de mesma frequência que a força externa, amplitude A e defasagem φ em relação à força externa*, onde A e φ são dados pelas (4.3.10) e (4.3.11), respectivamente.

(b) Interpretação física

(i) *Limite de baixas frequências*, $\omega \ll \omega_0$. Neste caso, a aceleração associada à (4.3.12),

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4.3.13)$$

é muito menor do que aquela associada à força restauradora, que corresponde ao termo $\omega_0^2 x$ na (4.3.4), de modo que temos aproximadamente

$$\omega_0^2 x \approx \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \left\{ x \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t), \quad \omega \ll \omega_0 \right. \quad (4.3.14)$$

ou seja, o deslocamento é no mesmo sentido da força externa ($\varphi = 0$), que equilibra a força restauradora na (4.3.2), ($-kx + F(t) \approx 0$). Diz-se que o movimento é *dominado pela força restauradora*, e a situação se aproxima do limite de equilíbrio estático ($\omega \rightarrow 0$).

(ii) *Limite de altas frequências*, $\omega \gg \omega_0$: Neste caso, é a aceleração $-\omega_0^2 x$ associada à força restauradora que é desprezível em confronto com a (4.3.13), de modo que temos aproximadamente

$$-\omega^2 x \approx \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \left\{ x \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t), \quad (\omega \gg \omega_0) \right. \quad (4.3.15)$$

ou seja, o deslocamento está em oposição de fase com a força externa ($\varphi = -\pi$). Isto se explica por ser a aceleração fornecida quase totalmente pela força externa (kx é desprezível em confronto com o termo de inércia $m\ddot{x}$ na (4.3.2)), e a aceleração está em oposição de fase com o deslocamento no MHS. Diz-se que o movimento é dominado pela inércia.

Comparando as (4.3.14) e (4.3.15), vemos que $|x|$ é muito menor para $\omega \gg \omega_0$ que para $\omega \ll \omega_0$, e $x \rightarrow 0$ para $\omega \rightarrow \infty$. A inércia do oscilador não lhe permite acompanhar oscilações excessivamente rápidas da força externa: a amplitude da resposta é muito pequena.

(iii) **Ressonância**, $\omega \rightarrow \omega_0$: Pela (4.3.10), à medida que a frequência ω da força externa se aproxima da frequência ω_0 das oscilações livres, a amplitude A da resposta vai crescendo, e $A \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow \omega_0$.

O crescimento da resposta quando ω se aproxima de ω_0 corresponde ao fenômeno da **ressonância**. Um exemplo familiar de ressonância ocorre quando procuramos impulsionar uma pessoa sentada num balanço. A amplitude de oscilação aumenta fortemente quando a frequência de transmissão dos impulsos se aproxima da frequência de oscilação livre.

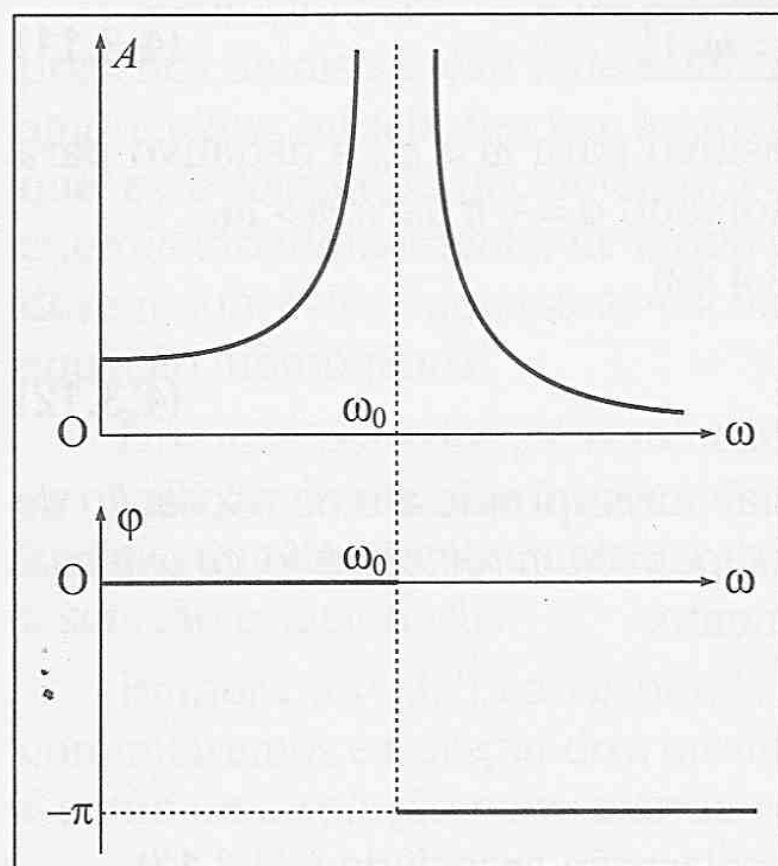


Figura 4.6 — Solução estacionária

Os gráficos da Fig. 4.6 resumem a discussão precedente. Note a descontinuidade brusca da defasagem, que passa de 0 a $-\pi$ na ressonância. Tanto esta descontinuidade quanto a divergência da amplitude para $\omega = \omega_0$ indicam apenas que o modelo empregado deixa de valer nesta situação. Por um lado, a dissipação, por menor que seja, não pode ser desprezada para $\omega \approx \omega_0$ (veremos mais adiante que a presença de dissipação elimina tanto a divergência como a descontinuidade). Por outro lado, se a amplitude cresce suficientemente, a aproximação de pequenas oscilações, que leva às equações lineares consideradas, deixa de valer: efeitos não-lineares entram em jogo.

Há vários exemplos dos efeitos catastróficos que podem ser produzidos pela ressonância. Um deles é o desabamento de pontes que entram em ressonância com a marcha cadenciada de uma tropa de soldados ao atravessá-las. Outro é o da voz de uma cantora induzindo vibrações tão fortes num cálice de cristal que acabam por parti-lo. Em ambos os casos, é óbvio que aproximações lineares do tipo da lei de Hooke deixam de valer.

(c) Efeito das condições iniciais

Como vimos, a *solução geral* da (4.3.2) é a soma da solução particular encontrada (4.3.12) com a solução geral do problema das oscilações livres:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) + B \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.3.16)$$

onde as constantes arbitrárias B e φ_0 são determinadas pelas condições iniciais.

Consideremos como exemplo o caso particular em que o oscilador se encontra inicial-

mente em repouso na posição de equilíbrio:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.3.17)$$

Substituindo na (4.3.16), obtemos:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B \cos \varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) &= -\omega_0 B \sin \varphi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \varphi_0 = 0 \quad B = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Levando este valor de B na (4.3.16), resulta

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)} \left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega_0 - \omega} \right] \quad (4.3.18)$$

o que corresponde em geral à superposição de dois MHS de frequências diferentes (livre e forçada) discutida na Seção 3.5 (b), podendo levar a batimentos para ω próximo de ω_0 .

No limite da ressonância exata, a expressão entre colchetes na (4.3.18) tende a

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0} \right] = \left[\frac{d}{d\omega} \cos(\omega t) \right]_{\omega = \omega_0} = -t \sin(\omega_0 t) \quad (4.3.19)$$

de modo que a (4.3.18), para $\omega = \omega_0$, fica

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (\omega = \omega_0) \quad (4.3.20)$$

É fácil ver diretamente (verifique!) que a (4.3.20) satisfaz a equação diferencial (4.3.4) com $\omega = \omega_0$ e as condições iniciais (4.3.17).

Conforme mostra o gráfico da (4.3.20) (Fig. 4.7), o efeito da ressonância é produzir um *crescimento linear com o tempo da amplitude de oscilação*, a partir das condições iniciais dadas. A amplitude cresce, na realidade, até que seja estabilizada por outros efeitos, tais como a presença de efeitos dissipativos ou não-lineares.

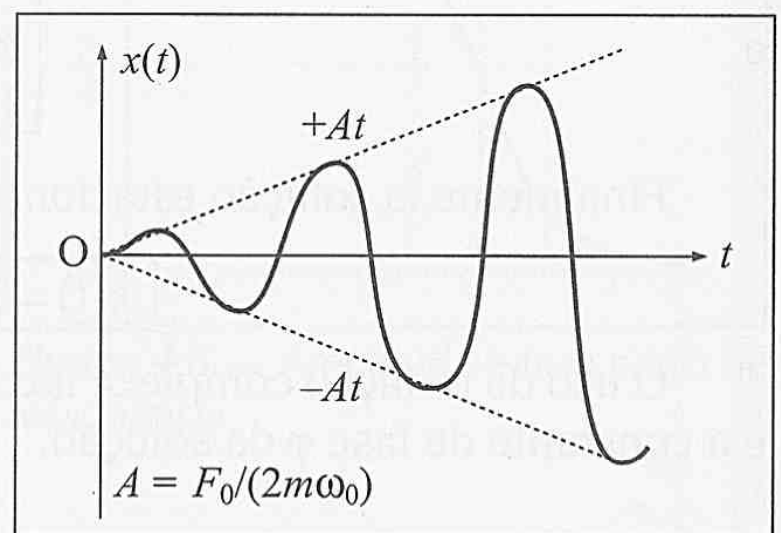


Figura 4.7 — Solução ressonante

4.4 — Oscilações forçadas amortecidas

Introduzindo uma força dissipativa proporcional à velocidade, a (4.3.2) fica

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (4.4.1)$$

ou, dividindo por m e usando as (4.1.3),

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (4.4.2)$$

(a) Solução estacionária

Procuremos novamente uma solução particular usando notação complexa, $x(t) = \text{Re } z(t)$,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \\ z(t) &= z_0 e^{i\omega t} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{z} &= i\omega z \\ \ddot{z} &= -\omega^2 z \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 = \frac{F_0}{m} \quad (4.4.3)$$

ou seja,

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4.4.4)$$

onde

$$A e^{i\varphi} = z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (4.4.5)$$

Para obter o módulo A e o argumento φ do número complexo z_0 , utilizamos as (3.4.28), (3.4.23) e (3.4.24), que dão

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= F_0 / m = r_1 \text{ (real)} \\ z_2 &= \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \right\} z_0 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_2}$$

onde $r_2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$, $\text{tg } \theta_2 = \gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$. Logo,

$$A^2(\omega) = \frac{(F_0)^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]} \quad (4.4.6)$$

e

$$\varphi(\omega) = -\text{tg}^{-1} \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4.4.7)$$

Finalmente, a solução estacionária é

$$x(t) = \text{Re } z(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (4.4.8)$$

O uso da notação complexa facilita bastante o cálculo, dando diretamente a amplitude A e a constante de fase φ da solução.

(b) Efeitos de ressonância

O caso mais interessante é o do *amortecimento fraco*, $\gamma \ll \omega_0$. No caso limite em que $\gamma \rightarrow 0$, as (4.4.6) e (4.4.7) reduzem-se às (4.3.10) e (4.3.11), que correspondem aos gráficos da pag. 80. Para $\gamma \ll \omega_0$, devemos esperar portanto que, na vizinhança de $\omega = \omega_0$, a amplitude seja máxima e a fase varie rapidamente.

Vamos tomar ω suficientemente próximo de ω_0 para que se tenha

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \quad (4.4.9)$$

Neste caso,

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{=2\omega_0 + \omega - \omega_0} (\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

e $\gamma\omega = \gamma(\omega_0 + \omega - \omega_0)$, de modo que as (4.4.6) e (4.4.7) ficam

$$A^2(\omega) \approx \frac{F_0^2}{m^2[4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2]}, \quad \varphi(\omega) \approx -\text{tg}^{-1}\left[\frac{\gamma\omega_0}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}\right]$$

ou seja,

$$A^2(\omega) \approx \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]} \quad (4.4.10)$$

$$\varphi(\omega) \approx -\text{tg}^{-1}\left[\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega)}\right] \quad (4.4.11)$$

A Fig. 4.8 mostra o andamento de A^2 e φ dados pelas (4.4.10), (4.4.11). A forma de A^2 é típica de um *pico de ressonância* associado a uma ressonância estreita. O valor máximo $A_{\text{máx}}^2$ é atingido para $\omega = \omega_0$ e A^2 cai à *metade do valor máximo* nos pontos $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$. A distância $\Delta\omega = \gamma$ entre eles chama-se *semilargura* do pico de ressonância, e $A^2(\omega)$ cai rapidamente fora da semilargura do pico. A defasagem $\varphi(\omega)$ entre o deslocamento e a força externa [cf. (4.4.1) e (4.4.8)] também varia rapidamente dentro da semilargura do pico, desde $\varphi \lesssim 0$ para ω abaixo de ω_0 até $\varphi \approx -\pi/2$ para ω acima de ω_0 [cf. (4.4.11)], passando por $\varphi = -\pi/2$ na ressonância, $\omega = \omega_0$ (Fig. 4.8).

A amplitude máxima $A_{\text{máx}}$ segundo a (4.4.10) é dada por

$$A_{\text{máx}} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \quad (4.4.12)$$

Para $\gamma \rightarrow 0$, vemos que $A_{\text{máx}} \rightarrow \infty$, e a transição de φ entre 0 e $-\pi$ torna-se descontínua: as curvas acima tendem às da pg. 80.

Podemos comparar $A_{\text{máx}}$ com o valor da amplitude $A(\omega)$ no limite de baixas frequências $\omega \ll \omega_0$, quando a (4.4.6) dá $A(\omega) \approx A(0) = F_0/(m\omega_0^2)$ [cf. (4.3.14)]. A (4.4.12) dá então

$$\frac{A(\omega_0)}{A(0)} = \frac{\omega_0}{\gamma} = Q \quad (4.4.13)$$

ou seja, o *fator de amplificação* produzido pela ressonância em relação à amplitude para $\omega \ll \omega_0$ é precisamente igual ao *fator Q* do oscilador, definido na (4.2.13). Quanto mais estreita a ressonância, mais “forte” ela é, ou seja, mais alto é o pico.

Vemos também, pela (4.2.9), que

$$\Delta\omega = \gamma = 1/\tau_d \quad (4.4.14)$$

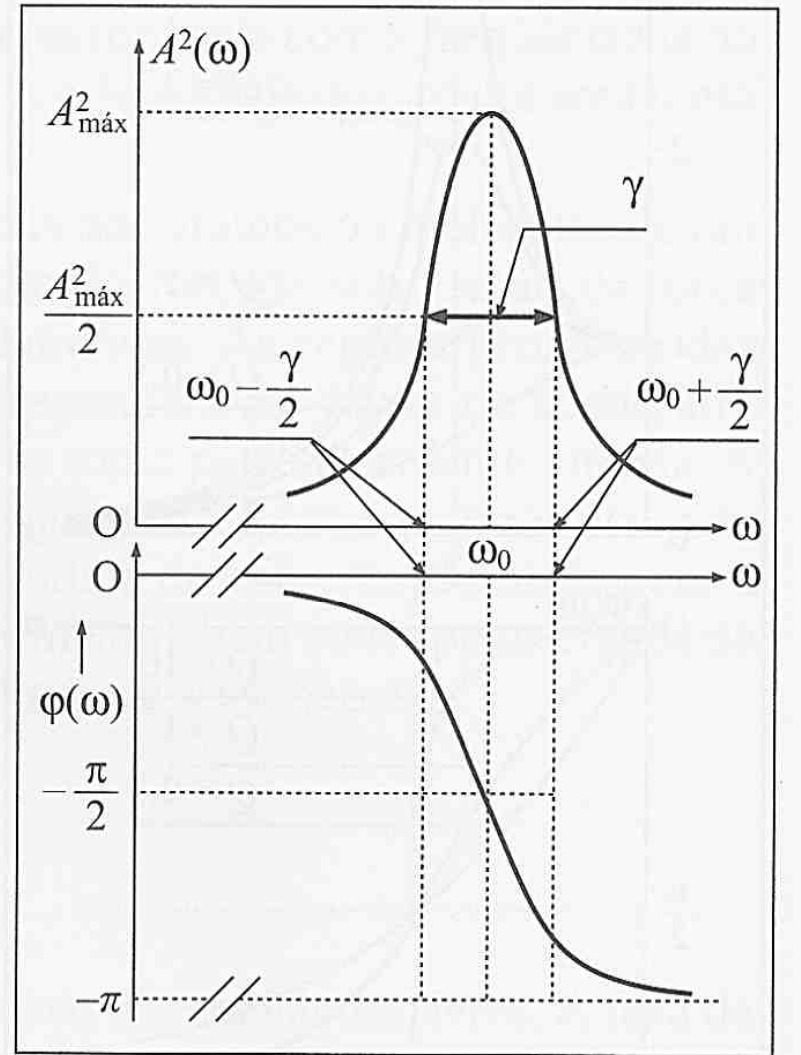


Figura 4.8 — Amplitude e fase perto de ressonância

ou seja, a semilargura do pico de ressonância nas oscilações forçadas é o inverso do tempo, de decaimento das oscilações livres. Esta relação extremamente importante é válida para qualquer ressonância estreita (amortecimento fraco), ou seja, para $Q \gg 1$.

Para valores mais baixos de Q , convém exprimir os resultados (4.4.6) e (4.4.7) em termos da variável adimensional

$$\alpha = \omega / \omega_0$$

(4.4.15)

o que dá

$$\frac{A(\alpha)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 / Q^2}}, \quad \varphi = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha / Q}{1-\alpha^2}\right)$$

(4.4.16)

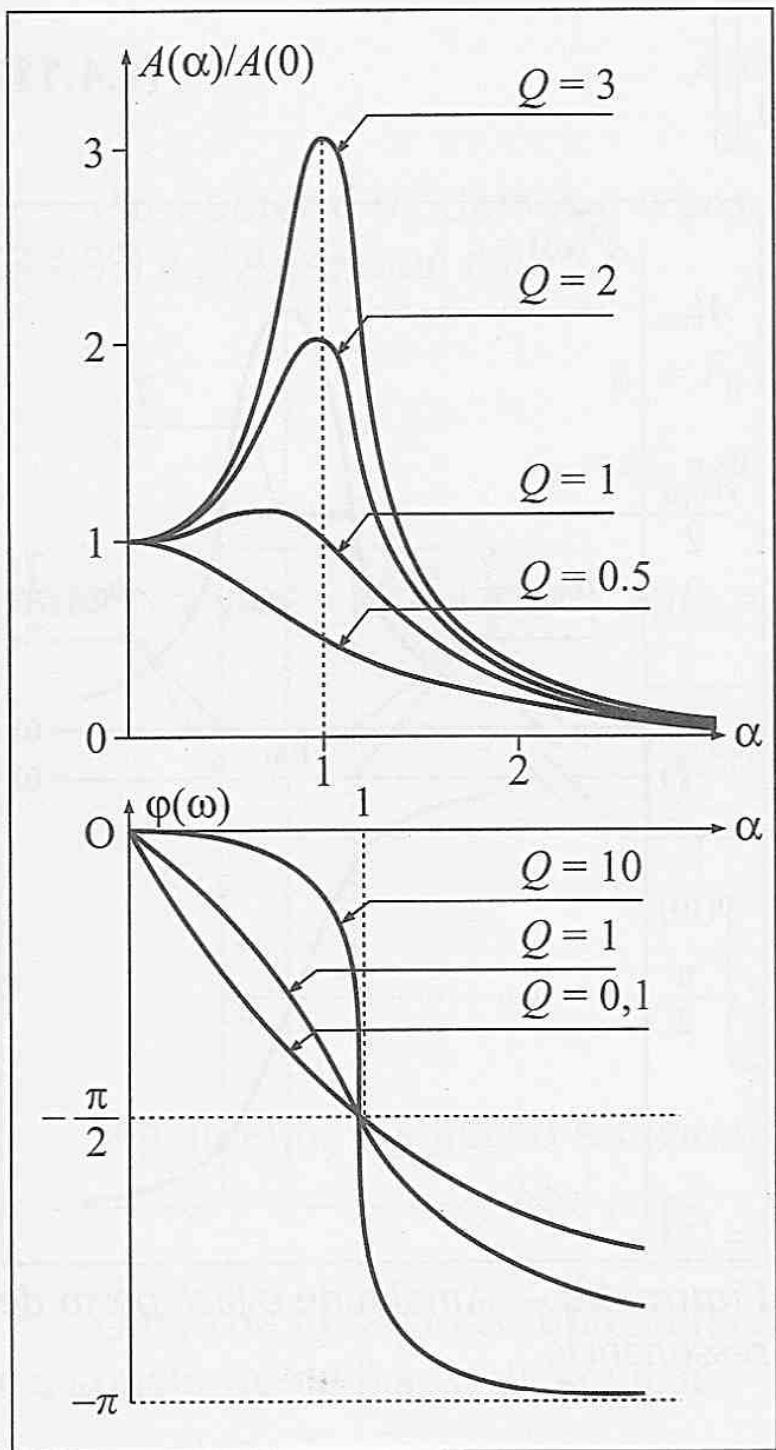


Figura 4.9 — Curvas em função de Q

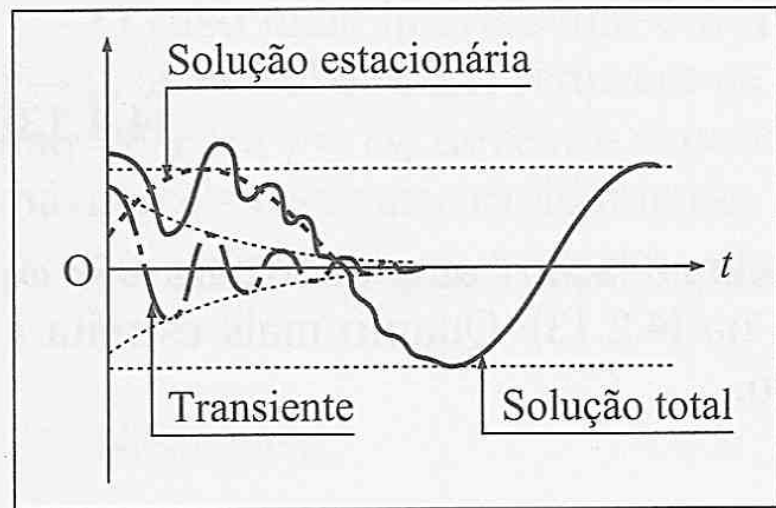


Figura 4.10 — Efeito do transiente

As curvas da Fig. 4.9 representam os resultados para alguns valores de Q . À medida que Q diminui, a ressonância torna-se cada vez menos acentuada (note que a posição do pico ocorre um pouco abaixo de $\alpha = 1$), até que desaparece completamente. Para $Q \gg 1$, a semilargura do pico, nestas unidades, é $\Delta\alpha = 1/Q$.

Para $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, ou seja, $|\alpha - 1| \gg 1/Q$, o termo de amortecimento $\gamma^2 \omega^2$ no denominador da (4.4.6) é desprezível, e recaímos na (4.3.10), cuja interpretação para baixas e altas frequências já foi discutida na Seção 4.3.

Como foi feito na Seção 4.3 (c), também aqui podemos completar a solução ajustando-a a condições iniciais dadas. A solução geral é a soma da solução estacionária (4.4.8) com a solução geral para oscilações livres [cf. (4.1.12) e (4.3.16)]

$$x_0(t) = B e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

(4.4.17)

onde B_0 e φ_0 são determinados pelas condições iniciais. Neste caso, a (4.4.17) representa de fato um *transiente*, que se torna desprezível para $t \gg \tau_d = 1/\gamma$. A Fig. 4.10 mostra um exemplo do efeito do termo transiente, com $\omega \ll \omega_0$. A solução é modulada pelo transiente, para tempos curtos, e se aproxima da solução estacionária para $t \gg \tau_d$.

Exemplos

Já foram citados alguns exemplos de efeitos de ressonância, e veremos outros mais adiante, em conexão com a acústica. Efeitos do mesmo gênero têm grande importância em todos os campos da física.

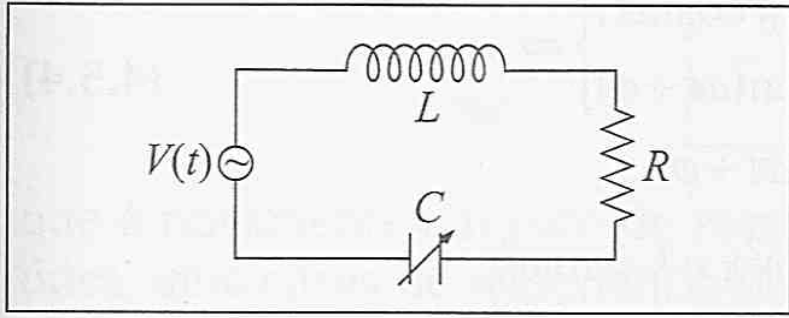


Figura 4.11 — Circuito ressonante

A Fig. 4.11 mostra um *circuito ressonante* constituído de uma bobina (indutância L), um resistor (resistência R) e um capacitor de capacitância C variável, alimentado por uma fonte de tensão alternada $V(t)$. Conforme será visto mais tarde, este é um sistema inteiramente análogo ao oscilador forçado amortecido. A tensão ou corrente num circuito LC tem uma frequência característica de

oscilação livre ω_0 , e a resistência R é o elemento dissipativo. A fonte de tensão desempenha o papel de força externa e pode representar um sinal de uma estação de rádio, captado por uma antena e amplificado. A capacitância variável C , acoplada ao botão de sintonização do aparelho receptor, permite ajustar ω_0 até que se obtenha ressonância com a frequência ω do sinal, o que corresponde a sintonizar a estação desejada. A seletividade do circuito será tanto maior quanto maior for o fator Q associado.

Conforme já foi mencionado na Seção 4.3, os elétrons dos átomos ou moléculas de um meio material em que se propaga a luz entram em oscilação forçada sob a ação da força elétrica associada ao campo eletromagnético da onda luminosa. As regiões próximas das ressonâncias com as oscilações livres dos elétrons correspondem às “faixas de absorção”, onde a interação entre os elétrons e o campo incidente se torna particularmente intensa. A variação da resposta dos elétrons em função da frequência ω incidente é responsável pelo fenómeno da *dispersão* da luz, ou seja, a variação do índice de refração do meio com a frequência da luz (o violeta sofre refração maior que o vermelho), bem como pelos efeitos de *absorção*, que ocorrem principalmente nas regiões próximas de ressonâncias.

4.5 — O balanço de energia

Já discutimos na Seção 4.2 o balanço de energia no caso das oscilações livres. A taxa de variação instantânea da energia mecânica $E(t)$ armazenada no oscilador no instante t (4.2.1) continua sendo dada por (pg. 73)

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \quad (4.5.1)$$

mas a equação de movimento é agora a (4.4.1), de modo que obtemos, em lugar da (4.2.2),

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -m\gamma\dot{x}^2 + P(t)} \quad (4.5.2)$$

onde

$$\boxed{P(t) = F(t)\dot{x}(t)} \quad (4.5.3)$$

é a *potência* fornecida pela força externa (1, Seção 7.6). O 2.º membro da (4.5.2) representa o balanço entre esta potência e a potência dissipada pela força resistente.

Regime estacionário

Vamos considerar o balanço de energia somente para a solução estacionária, desprezando os efeitos transientes, com $F(t)$ dado pela (4.4.1) e $x(t)$ pela (4.4.8):

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= F_0 \cos(\omega t) \\ x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \quad \{ \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(t) = -\omega F_0 A \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (4.5.4)$$

Para a solução estacionária, a (4.5.1) dá, como $\ddot{x} = -\omega^2 x$ e $k = m\omega_0^2$,

$$\frac{dE}{dt} = m(\omega_0^2 - \omega^2)x\dot{x} = m\omega(\omega^2 - \omega_0^2)A^2 \times \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi)}_{\frac{1}{2}\sin[2(\omega t + \varphi)]} \quad (4.5.5)$$

mostrando que a energia instantânea oscila com frequência angular 2ω . Na prática, interessamos a *média sobre um período* (ou, o que é equivalente, sobre um número inteiro de períodos). Pelas (4.5.5) e (4.2.5), obtemos para a média

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = 0 \quad (4.5.6)$$

como tinha de ser, no regime estacionário.

Pela (4.5.2), a (4.5.6) também se escreve

$$\boxed{\bar{P} = m\gamma \overline{\dot{x}^2}} \quad (4.5.7)$$

ou seja, *no regime estacionário, a potência média fornecida pela força externa é igual à potência média dissipada*. Em particular, para $\gamma \rightarrow 0$, vemos que a potência absorvida pelo oscilador não amortecido durante uma metade do ciclo tem de ser devolvida durante a outra metade.

Utilizando novamente a (4.2.5), temos

$$\overline{\dot{x}^2} = \omega^2 A^2 \overline{\sin^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \quad (4.5.8)$$

de modo que as (4.5.7) e (4.4.6) dão

$$\boxed{\bar{P}(\omega) = \frac{1}{2} \gamma m \omega^2 A^2 = \frac{\gamma F_0^2 \omega^2}{2m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}} \quad (4.5.9)$$

Em termos de $\alpha = \omega/\omega_0$ [cf. (4.4.15)], este resultado se escreve

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2mQ\omega_0} \cdot \frac{1}{\left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]} \quad (4.5.10)$$

o que passa por um máximo precisamente na ressonância ($\alpha = 1$), com

$$\boxed{\bar{P}(\omega_0) = \bar{P}_{\text{máx}} = Q \frac{F_0^2}{2m\omega_0}} \quad (4.5.11)$$

Para $Q \gg 1$ e ω suficientemente perto de ω_0 para que valha a (4.4.10), é fácil ver que a (4.5.9) pode ser aproximada por

$$\bar{P}(\omega) = \left(\frac{\gamma F_0^2}{8m} \right) \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (4.5.12)$$

que é novamente um pico de ressonância da forma (4.4.10), representado na Fig. 4.8. Na ótica, uma curva de ressonância deste tipo é conhecida como um *pico lorentziano*; na física nuclear, chama-se um *pico de Breit-Wigner*.

A (4.5.4) mostra que

$$\bar{P}(\omega) = -\omega F_0 A \left[\cos \varphi \underbrace{\overline{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}}_{=0} + \sin \varphi \underbrace{\overline{\cos^2(\omega t)}}_{=1/2} \right]$$

ou seja,

$$\bar{P}(\omega) = -\frac{\omega}{2} F_0 A \sin \varphi \quad (4.5.13)$$

O fator $|\sin \varphi|$, que relaciona a potência média fornecida pela força externa com a defasagem φ entre o deslocamento $x(t)$ e a força externa, chama-se *fator de potência*. Temos $-\pi \leq \varphi \leq 0$, e \bar{P} é máximo na ressonância, quando $\varphi = -\pi/2$.

É fácil entender por que isto acontece. Sabemos que, no MHS, a velocidade \dot{x} está *adiantada* em fase de $\pi/2$ em relação ao deslocamento x (pg. 62). Na ressonância, x está *atrasado* de $\pi/2$ em relação à força externa F . Logo, na ressonância, F está em fase com \dot{x} , o que, pela (4.5.3), explica por que a potência média é máxima.

A energia média armazenada no oscilador é, pela (4.2.1),

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \overline{\dot{x}^2} + \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_0^2}_{k} \overline{x^2} \quad (4.5.14)$$

$$\text{Temos} \quad \overline{x^2} = A^2 \overline{\cos^2(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} A^2 \quad (4.5.15)$$

e $\overline{\dot{x}^2}$ é dado pela (4.5.8), de modo que

$$\bar{E} = \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) A^2 \quad (4.5.16)$$

onde o termo em ω^2 provém da energia cinética média e o termo em ω_0^2 da energia potencial média; na ressonância, as duas contribuem igualmente.

Pelas (4.5.7) e (4.5.9), a energia média dissipada durante um período de oscilação τ é

$$\bar{P} \tau = \frac{2\pi}{\omega} \bar{P} = \pi \gamma m \omega A^2 \quad (4.5.17)$$

O fator Q de um oscilador *forçado* amortecido também pode ser definido por

$$Q = 2\pi \cdot \left(\frac{\text{Energia média armazenada}}{\text{Energia média dissipada por ciclo}} \right) \quad (4.5.18)$$

como na (4.2.12) para oscilações livres. Pelas (4.5.16) e (4.5.17), obtemos

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (4.5.19)$$

Em particular, na ressonância ($\omega = \omega_0$) obtemos $Q = \omega_0/\gamma$, o que coincide com o valor (4.2.13) para oscilações livres.

4.6 — Oscilações acopladas

Consideremos um sistema de dois pêndulos ligados por uma mola e sujeitos a oscilar no

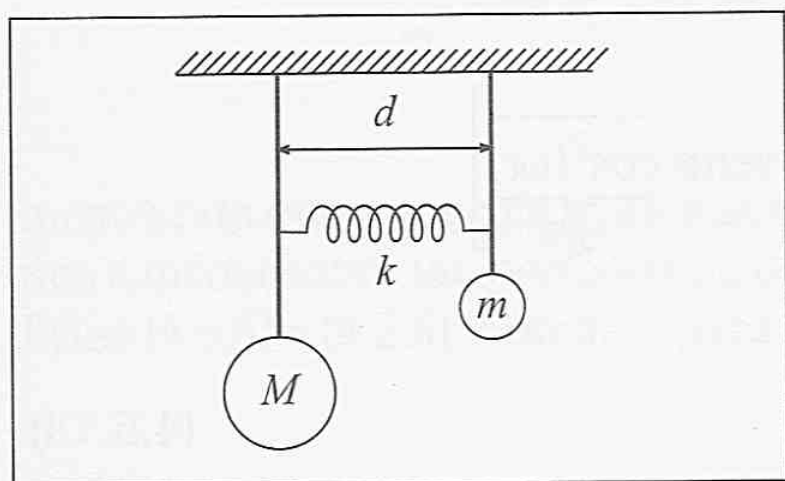


Figura 4.12 — Pêndulos acoplados

plano vertical definido pelas suas posições de equilíbrio (Fig. 4.12). A distância d entre os pêndulos, na posição de equilíbrio, é igual ao comprimento natural da mola, de modo que, nessa posição, ela não se encontra comprimida nem esticada; seja k a constante elástica da mola. Se a massa M suspensa de um dos pêndulos é muito maior que a massa m do outro, temos um típico problema de oscilações forçadas: as oscilações do pêndulo pesado, transmitidas através da mola, atuam sobre o pêndulo leve como uma força externa, forçando-o a oscilar com a frequência do pêndulo pesado.

O problema se torna mais interessante quando os pêndulos acoplados são idênticos, ou seja, têm mesmo comprimento l e mesma massa m . Terão portanto também a mesma frequência angular de oscilação livre, que, para pequenas oscilações, é dada pela (3.3.10):

$$\omega_0^2 = g / l \quad (4.6.1)$$

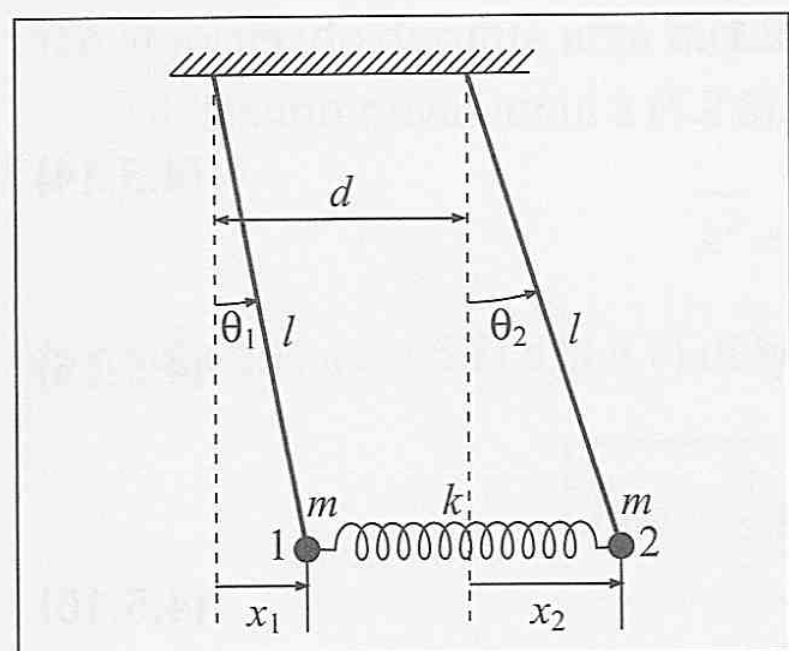


Figura 4.13 — Parâmetros do sistema

Sejam x_1 e x_2 os deslocamentos das duas partículas suspensas em relação à posição de equilíbrio (Fig. 4.13), supostos suficientemente pequenos para que possamos confundir os arcos descritos com as cordas: $x_1 \approx l\theta_1$, $x_2 \approx l\theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de desvio. A deformação da mola é $x_2 - x_1$ (> 0 na Fig., onde a mola está esticada), o que produz uma força $k(x_2 - x_1)$ (para a direita) sobre a partícula 1 e uma força restauradora igual e contrária $-k(x_2 - x_1)$ (para a esquerda) sobre a partícula 2.

Além disso, atuam sobre as partículas 1 e 2 as forças gravitacionais [cf. (3.3.6), (3.3.8)], de componentes tangenciais

$$\begin{aligned} -mg\theta_1 &\approx -mgx_1 / l = -m\omega_0^2 x_1 & \text{para 1} \\ -mg\theta_2 &\approx -mgx_2 / l = -m\omega_0^2 x_2 & \text{para 2} \end{aligned}$$

onde empregamos a (4.6.1). Logo, desprezando efeitos de amortecimento, as equações de movimento para as pequenas oscilações das duas partículas são

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (4.6.2)$$

ou, dividindo por m e introduzindo

$$\boxed{K = k / m} \quad (4.6.3)$$

obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = K(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -K(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (4.6.4)$$

O sistema tem 2 graus de liberdade (é descrito pelas 2 coordenadas x_1 e x_2). As (4.6.4) são um sistema de duas equações diferenciais lineares de 2.^a ordem *acopladas*, ou seja, a equação para x_1 depende de x_2 e vice-versa. A solução geral depende de $2 \times 2 = 4$ constantes arbitrárias, de que necessitamos para o ajuste às condições iniciais: podemos especificar arbitrariamente as posições e velocidades iniciais das duas partículas.

No caso particular da (4.6.4), é muito simples conseguir equações desacopladas. Somando membro a membro as (4.6.4), obtemos

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (4.6.5)$$

e, subtraindo membro a membro, vem

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 - x_2) = 2K(x_2 - x_1) \quad (4.6.6)$$

Se fizermos

$$\boxed{\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}} \quad (4.6.7)$$

as (4.6.5) e 4.6.6) ficam, respectivamente,

$$\boxed{\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0} \quad (4.6.8)$$

e

$$\boxed{\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0} \quad (4.6.9)$$

onde

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}} \quad (4.6.10)$$

As (4.6.8) e (4.6.9) são duas equações desacopladas de oscilações harmônicas simples, com as soluções gerais

$$\boxed{q_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)} \quad (4.6.11)$$

$$\boxed{q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (4.6.12)$$

Os valores de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ se obtêm imediatamente das (4.6.7):

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) &= q_1(t) - q_2(t) \end{aligned}} \quad (4.6.13)$$

o que corresponde à solução geral das (4.6.4), dependente das 4 constantes arbitrárias A_1 , φ_1 , A_2 , φ_2 , que devem ser determinadas pelas condições iniciais.

Interpretação física

Vemos que as soluções (4.6.13) não correspondem em geral a MHS para x_1 e x_2 : os deslocamentos são superposições de oscilações com frequências diferentes. Entretanto, existem duas novas coordenadas q_1 e q_2 , combinações lineares de x_1 e x_2 , as quais *oscilam harmonicamente*. Essas coordenadas chamam-se *coordenadas normais*. No presente caso, elas têm uma interpretação física simples: as (4.6.7) mostram que q_1 é o deslocamento do centro de massa, e $2q_2 = x_1 - x_2$ é o deslocamento relativo entre as duas partículas, correspondendo à deformação da mola. Nas coordenadas normais, o sistema se desacopla.

Para condições iniciais apropriadas (veremos logo quais são), podemos ter

$$A_2 = 0 \{x_1(t) = q_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = x_2(t)\} \quad (4.6.14)$$

ou

$$A_1 = 0 \{x_1(t) = q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = -x_2(t)\} \quad (4.6.15)$$

Em ambos os casos, as duas partículas oscilam com a mesma frequência, e estão sempre em fase ou em oposição de fase. Cada solução com estas características chama-se um *modo normal de vibração*, e para um sistema de dois graus de liberdade temos dois modos normais de vibração.

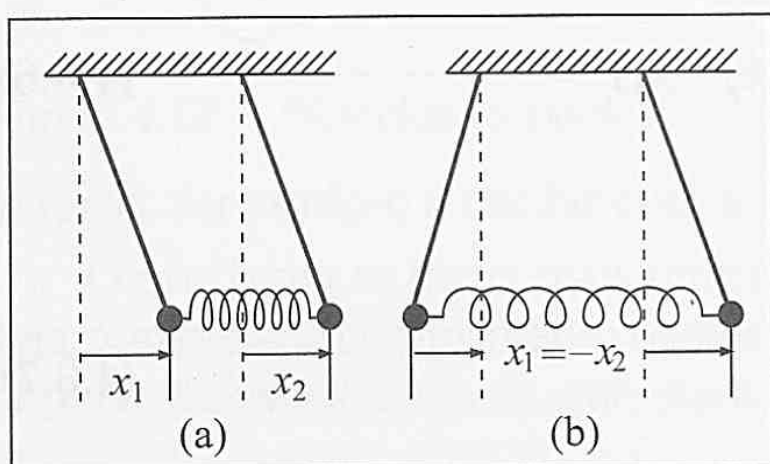


Figura 4.14 — Modos normais

No primeiro modo, que corresponde à (4.6.14), temos $x_1(t) = x_2(t)$ ou seja, os deslocamentos dos dois pêndulos são iguais, de forma que ele é chamado de *modo simétrico* (Fig. 4.14(a)). Como a mola não é comprimida nem esticada, sua deformação e força restauradora se anulam: é como se ela não existisse, e por isso cada pêndulo oscila com sua frequência livre ω_0 .

No segundo modo, correspondente à (4.6.15), temos sempre $x_1(t) = -x_2(t)$: os deslocamentos dos dois pêndulos são iguais e contrários, de forma que ele é chamado de *modo antissimétrico* (fig. 4.14(b)). A força restauradora da mola soma-se neste caso à força restauradora da gravidade, de modo que a frequência de oscilação é mais elevada [cf. (3.2.22)]: pela (4.6.10), é $\omega_2 > \omega_0$.

A solução geral (4.6.13) pode ser considerada como uma *superposição dos modos normais de vibração*, excitados com amplitudes e fases que dependem das condições iniciais.

Ajuste das condições iniciais

É fácil ver que as condições iniciais para o modo simétrico (4.6.14) são

$$x_{10} = x_{20}; \quad \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} \quad (4.6.16)$$

ou seja, as partículas têm o mesmo deslocamento inicial e a mesma velocidade inicial, ao passo que para o modo antissimétrico (4.6.15) são

$$x_{10} = -x_{20}; \quad \dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20} \quad (4.6.17)$$

ou seja, os deslocamentos e velocidades iniciais são iguais e contrários. Em particular, se os dois pêndulos são soltos em repouso, oscilam no modo simétrico para deslocamentos iniciais iguais e no antissimétrico para deslocamentos iniciais opostos.

É interessante examinar a situação em que os pêndulos partem do repouso, mas somente um deles é deslocado da posição de equilíbrio:

$$x_{10} = a; \quad x_{20} = 0; \quad \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0 \quad (4.6.18)$$

Para as coordenadas normais (4.6.7), isto corresponde às condições iniciais

$$q_{10} = q_{20} = a/2; \quad \dot{q}_{10} = \dot{q}_{20} = 0 \quad (4.6.19)$$

As (4.6.11) e (4.6.12), (3.2.24) a (3.2.27), dão então: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $A_1 = A_2 = a/2$, ou seja, substituindo nas (4.6.13),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a}{2} [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) &= \frac{a}{2} [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

que são superposições de dois MHS de mesma amplitude e frequências diferentes.

Pelas (3.5.8) a (3.5.11),

$$x_1(t) = a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\bar{\omega} t) \quad (4.6.21)$$

onde

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_0) \\ \Delta\omega = \omega_2 - \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K} - \omega_0 \end{cases} \quad (4.6.22)$$

Para $x_2(t)$ a única diferença é que o 1.º co-seno, na linha seguinte à (3.5.10), troca de sinal, o que dá

$$x_2(t) = a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\bar{\omega} t) \quad (4.6.23)$$

Consideremos, em particular, o caso de *acoplamento fraco*, em que a força restauradora da mola que une os dois pêndulos é pequena, de modo que seja [cf. (4.6.22)]

$$K \ll \omega_0^2 \quad \{\Delta\omega \ll \bar{\omega}\} \quad (4.6.24)$$

Temos então [cf. (3.5.12)] a situação típica de batimentos, modulados por $a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$

para x_1 , e por $a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$ para x_2 , ou seja, a *modulação das duas amplitudes está em quadratura* (Fig. 4.15): máximos de uma correspondem a zeros da outra. No instante inicial, o 1.º pêndulo está no deslocamento máximo e o 2.º em repouso. À medida que a amplitude de oscilação do 1.º vai diminuindo, a do 2.º vai crescendo, até que o 1.º pêndulo pára, quando o 2.º oscila com amplitude máxima. A seguir, o processo se repete em sentido inverso, e assim por diante.

Este processo de transferência alternativa de energia entre os dois pêndulos pode ser interpretado

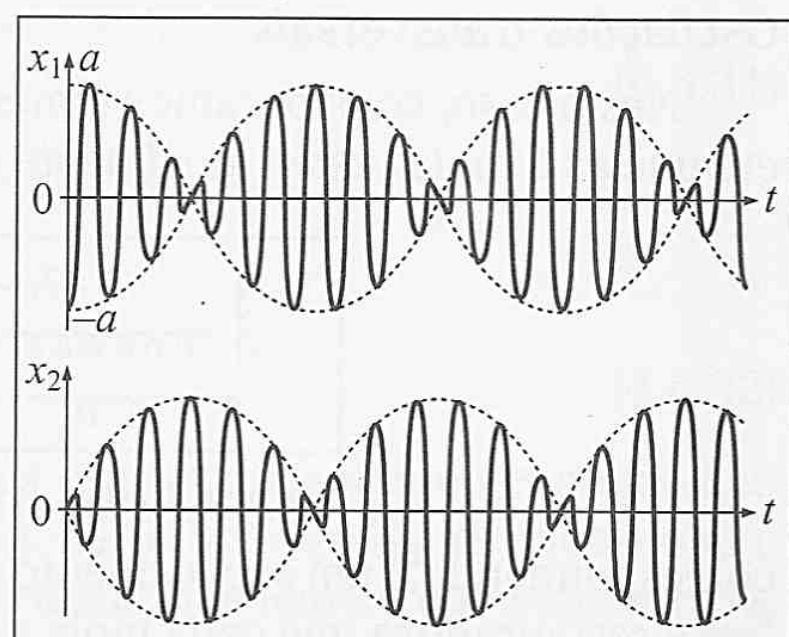


Figura 4.15 — Batimentos acoplados

em termos de oscilações forçadas. A oscilação do pêndulo 1, transferida para o pêndulo 2 através da mola, atua sobre este como uma força externa, colocando-o em oscilação forçada. Como os dois pêndulos têm a mesma frequência de oscilação livre ω_0 , o processo é ressonante: devido à ressonância, a amplitude de oscilação do pêndulo 2 cresce rapidamente (Fig. 4.7). Como a energia total se conserva, a amplitude de oscilação do pêndulo 1 tem de ir diminuindo, o que limita o crescimento da amplitude de 2, e acaba levando aos batimentos em quadratura.

Outros exemplos de osciladores acoplados

Oscilações longitudinais:

Um sistema muito semelhante ao que acabamos de estudar é o que está representado na

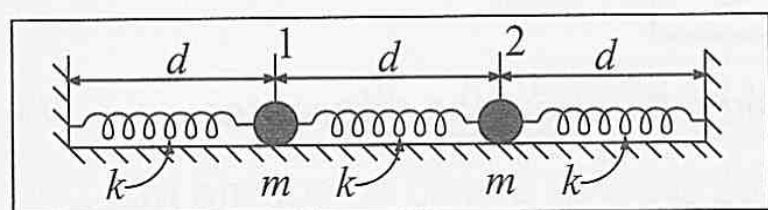


Figura 4.16 — Oscilações longitudinais

Fig. 4.16, onde, na posição de equilíbrio, d representa o comprimento natural das molas (sem deformação).

Novamente, há dois modos normais de vibração. Num deles (modo simétrico), os deslocamentos x_1 e x_2 das duas partículas das respectivas posições de equilíbrio são iguais: $x_1 = x_2$.

Logo (Fig. 4.17), a mola do meio não sofre deformação, e é como se não existisse acoplamento: as partículas 1 e 2 oscilam com a frequência livre ω_0 , onde

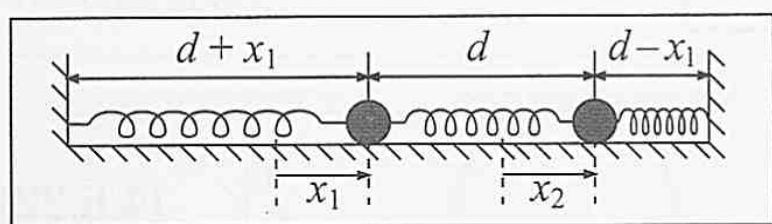


Figura 4.17 — Modo simétrico

$$\omega_0^2 = k / m \quad (4.6.25)$$

e estamos tomando as 3 molas idênticas (mesma constante k).

No outro modo (antissimétrico), temos $x_1 = -x_2$, de modo que a mola do meio sofre uma deformação $2x_1$ (Fig. 4.18), e a equação de movimento (p. ex., para a partícula 1) fica

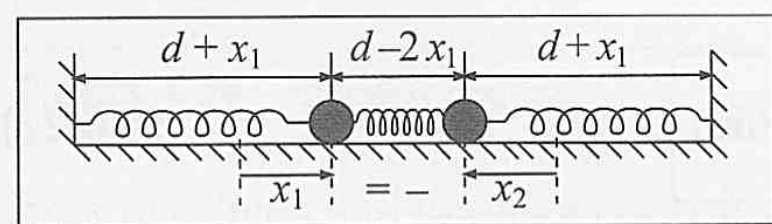


Figura 4.18 — Modo antissimétrico

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - 2kx_1 = -3kx_1$$

de modo que a frequência ω_2 deste modo é dada por

$$\omega_2^2 = 3k / m = 3\omega_0^2 \quad (4.6.26)$$

Comparando com a (4.6.10), vemos que o caso anterior se reduz a este para $K = \omega_0^2$.

Oscilações transversais

Neste caso, consideramos o mesmo sistema, mas partimos de uma posição de equilíbrio em que as 3 molas estão igualmente esticadas,

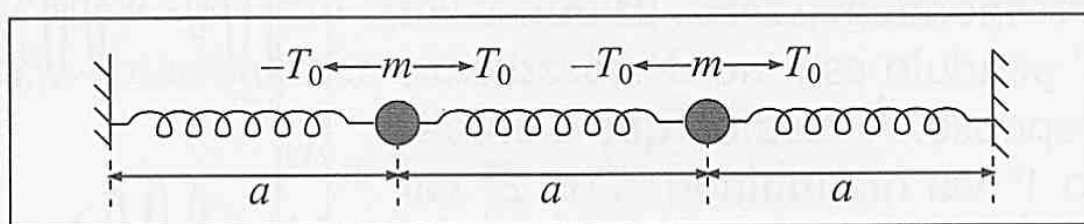


Figura 4.19 — Posição de equilíbrio

correspondendo a um espaçamento a . Se d é o comprimento natural da mola, a magnitude da força restauradora que cada mola exerce sobre cada partícula é

$$T_0 = k(a - d) \quad (4.6.27)$$

e cada partícula está em equilíbrio sob a ação de duas forças iguais e contrárias, T_0 e $-T_0$.

Chamaremos T_0 de *tensão das molas*.

Vamos considerar *pequenas oscilações transversais* do sistema, num dado plano vertical

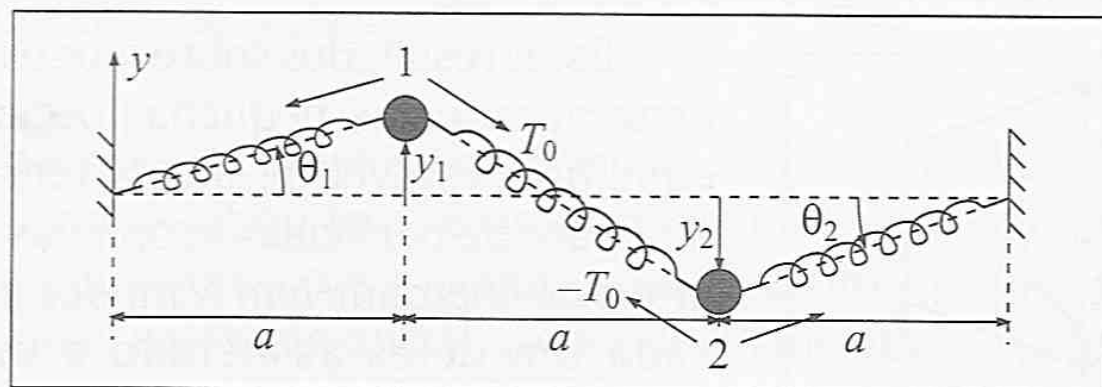


Figura 4.20 — Oscilação transversal

(que tomamos como plano xy).

Supomos portanto $|y_1| \ll a$, $|y_2| \ll a$, onde y_1 e y_2 são os deslocamentos verticais das duas partículas em relação à posição de equilíbrio (na Fig. 4.20, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$).

Nestas condições, o *comprimento* das molas sofre uma variação desprezível, de modo que a tensão continua tendo *magnitude* $\approx T_0$, mas a *direção* passa a ter uma componente vertical, e é a resultante dessas componentes verticais que atua como força restauradora sobre cada partícula. Assim, a mola da esquerda exerce sobre a partícula 1 a força restauradora vertical

$$F_1 = -T_0 \sin \theta_1 \approx -T_0 \tan \theta_1 = -T_0 y_1 / a \quad (4.6.28)$$

onde θ_1 é o ângulo entre a mola e a horizontal, que é muito pequeno por hipótese, de modo que $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1$.

Analogamente, a mola da extrema direita exerce sobre a partícula 2 a força restauradora vertical

$$F_2 \approx -T_0 \tan \theta_2 = -T_0 y_2 / a \quad (4.6.29)$$

que é dirigida para cima, porque $y_2 < 0$, no caso da figura. A mola do meio exerce uma força restauradora F_{12} sobre a partícula 1 e $-F_{12}$ sobre a partícula 2, onde, analogamente,

$$F_{12} \approx -T_0 (y_1 - y_2) / a \quad (4.6.30)$$

Note que, no caso da Fig. 4.20, $y_1 - y_2 = y_1 + |y_2|$.

Por conseguinte, as equações de movimento são

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = F_1 + F_{12} = -\frac{T_0}{a} [y_1 + (y_1 - y_2)] \\ m\ddot{y}_2 = F_2 - F_{12} = -\frac{T_0}{a} [y_2 - (y_1 - y_2)] \end{cases} \quad (4.6.31)$$

que são da forma (4.6.4), com $x \rightarrow y$, e

$$\boxed{\omega_0^2 = T_0 / ma = K} \quad (4.6.32)$$

Os modos normais de vibração estão representados esquematicamente (as molas não foram desenhadas) na Fig. 4.21. No modo simétrico (Fig. 4.21(a)), é $y_1 = y_2$, de modo que a mola do meio é horizontal, desacoplando as oscilações verticais, que têm a frequência livre ω_0 (pela (4.6.32), ω_0^2 é a força restauradora vertical por unidade de deslocamento e massa).

No *modo antissimétrico* (Fig. 4.21(b)), é $y_1 = -y_2$, e as (4.6.31) mostram que a frequência

é

$$\omega_0^2 = 3T_0 / ma = 3\omega_0^2 \quad (4.6.33)$$

como no caso das oscilações longitudinais (4.6.26).

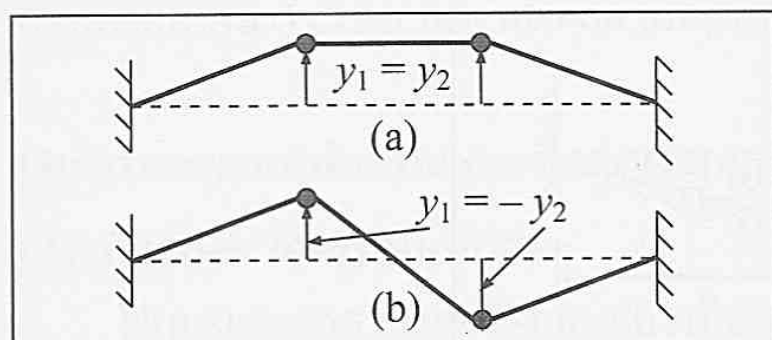


Figura 4.21 — Modos normais

Assim, para 2 partículas acopladas, cada uma podendo deslocar-se em 3 dimensões, há 6 graus de liberdade. Destes, 2 correspondem aos modos longitudinais da pg. 92 (direção x) e 4 aos modos transversais (2 na direção y , que acabamos de considerar, e 2 na direção z).

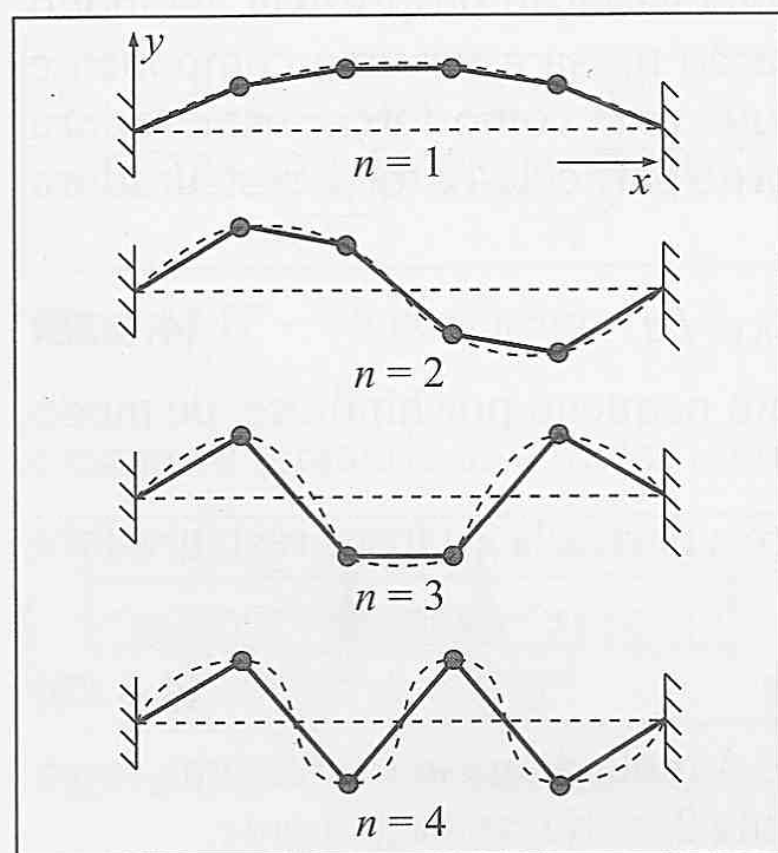


Figura 4.22 — Modos transversais de 4 partículas

Estes resultados sobre modos normais podem ser generalizados às pequenas oscilações em torno de equilíbrio estável de um sistema com um número qualquer de partículas acopladas. Um sistema com N graus de liberdade tem N modos normais de vibração, cada um deles associado a uma frequência de oscilação comum de todas as partículas. A solução geral é a superposição de todos os modos normais.

A Fig. 4.22 ilustra os 4 modos de vibração transversal na direção y de um sistema de 4 partículas idênticas acopladas por molas também iguais, que generalizam os modos de 2 partículas considerados na pg. anterior. Os modos foram numerados ($n = 1, 2, 3$ e 4) em ordem de frequência crescente. Conforme vemos pelas (4.6.28) a (4.6.30), quanto maiores os ângulos formados pelas molas com o eixo horizontal, maior a força restauradora por unidade de deslocamento e massa, o que justifica a afirmação de que os modos da fig. ao lado estão ordenados segundo frequências crescentes.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4

1. Verifique que a (4.2.17) é solução da (4.1.2) para $\omega_0 = \gamma/2$, e que a (4.3.20) satisfaz a equação diferencial (4.3.4) e as condições iniciais (4.3.17).
2. Um oscilador harmônico amortecido tem um fator $Q = 10$. Partindo da posição de equilíbrio, é-lhe comunicada uma velocidade inicial de 5 m/s. Verifica-se que a energia total do oscilador diminui numa taxa, por segundo, igual a 4 vezes sua energia cinética instantânea. Calcule o deslocamento x do oscilador (em m) em função do tempo t (em s).
3. Seja r a razão entre dois máximos consecutivos do deslocamento de um oscilador livre fracamente amortecido ($\gamma \ll \omega_0$). O parâmetro $\delta = |\ln r|$ chama-se *decremento logarítmico*. (a) Relacione δ com a constante de amortecimento γ e com o período τ do oscilador. (b) Se n é o número de períodos necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial, ache δ .

4. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0 . Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo. (a) Qual é o valor de v_0 ? (b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0 , qual seria o valor de x no instante t ?
5. Uma partícula de massa m move-se na direção z no interior de um fluido, cuja resistência de atrito é da forma $-\rho \dot{z}$ ou seja, é proporcional à velocidade ($\rho > 0$). A força peso é desprezível em confronto com a resistência de atrito durante o intervalo de tempo considerado. Dadas a posição inicial z_0 e a velocidade inicial v_0 , ache $z(t)$.
6. Para pequenas partículas em queda livre na atmosfera, a resistência do ar é proporcional à velocidade, ou seja, orientando o eixo z verticalmente para baixo, é da forma $-\rho \dot{z}$ ($\rho > 0$). Considere a queda livre de uma tal partícula a partir de uma posição inicial z_0 e velocidade inicial v_0 , levando em conta a força peso (ao contrário do Problema 5). Ache $z(t)$. *Sugestão:* Usando o método da Seção 4.3 (a), procure uma solução particular da equação diferencial de movimento, que é inhomogênea. Para isto, leve em conta que, para tempos grandes, a partícula tende a cair com velocidade constante (por quê?), que se chama *velocidade terminal*.
7. Um oscilador não amortecido de massa m e frequência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \sin(\omega t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.
8. Um oscilador não amortecido de massa m e frequência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \exp(-\beta t)$, onde $\beta > 0$ é uma constante. Inicialmente, o oscilador encontra-se em repouso na posição de equilíbrio. Ache o deslocamento $x(t)$. *Sugestão:* Use o método da Seção 4.3 (a), procurando uma solução particular da equação diferencial inhomogênea de comportamento análogo ao de F .
9. Um bloco cúbico de 10 cm de aresta e densidade 8 g/cm^3 está suspenso do teto por uma mola de constante elástica 40 N/m e comprimento relaxado de 0,5 m, e mergulhado dentro de um fluido viscoso de densidade $1,25 \text{ g/cm}^3$. Na situação considerada, a resistência do fluido é proporcional à velocidade, com coeficiente de proporcionalidade $\rho = 2 \text{ N.s/m}$. Inicialmente em equilíbrio, o bloco é deslocado de 1 cm para baixo e solto a partir do repouso. Com origem no teto e eixo z vertical orientado para baixo (fig. P.1), determine a coordenada z da extremidade superior do bloco em função do tempo.
10. Para um oscilador de massa m , frequência livre ω_0 e constante de amortecimento γ , sujeito à força externa $F = F_0 \cos(\omega t)$, calcule: (a) O valor exato de ω para o qual a amplitude de oscilação estacionária A é máxima, e o valor máximo de A ; (b) O valor exato de ω para o qual a velocidade tem amplitude ωA máxima, e o valor do máximo.

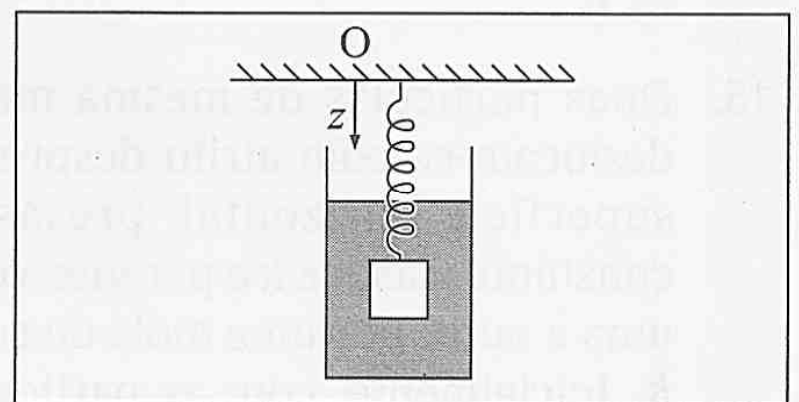


Figura P.1

11. Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m . Na outra extremidade B , há uma massa de $0,5 \text{ kg}$ suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (fig. P.2), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1 s . (a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$. (b) Calcule a força total $F(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$.

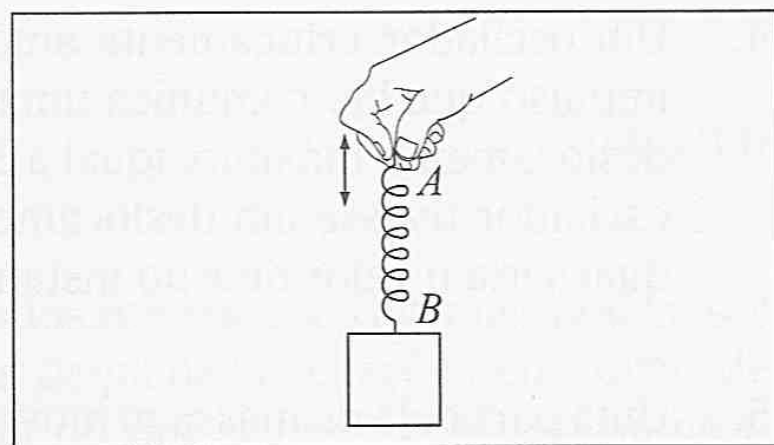


Figura P.2

12. Um bloco de 1 kg , ligado a uma parede vertical por uma mola de massa desprezível e constante elástica 100 N/m , inicialmente relaxada, pode deslocar-se sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito (estático e cinético) $\mu = 0,25$. No instante $t = 0$, o bloco é deslocado de $24,5 \text{ cm}$ para a direita e solto a partir do repouso. Descreva o movimento subsequente. *Observação:* Como a força de atrito tem sinal oposto ao da velocidade, é preciso tratar separadamente cada semiperíodo de oscilação.

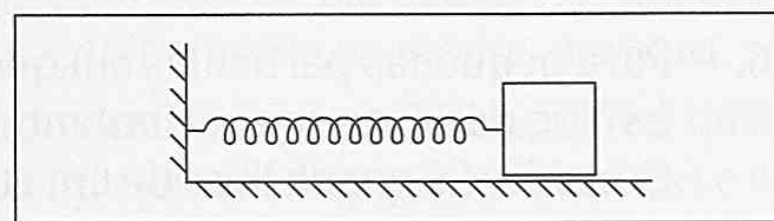


Figura P.3

13. Seja $x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ a solução estacionária para o movimento de um oscilador amortecido sob a ação da força $F = F_0 \cos(\omega t)$. Mostre que somente a componente em quadratura contribui para a potência média \bar{P} . Calcule \bar{P} .
14. Duas partículas de mesma massa, igual a 250 g , estão suspensas do teto por barras idênticas, de $0,5 \text{ m}$ de comprimento e massa desprezível, e estão ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica 25 N/m . No instante $t = 0$, a partícula 2 (fig. P.4) recebe um impulso que lhe transmite uma velocidade de 10 cm/s . Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das posições de equilíbrio das duas partículas (em cm) para $t > 0$.

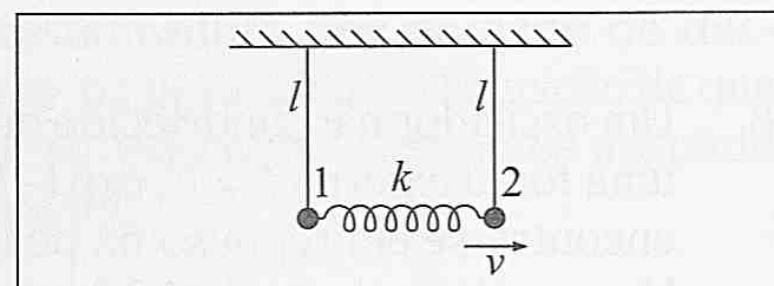


Figura P.4

15. Duas partículas de mesma massa m (fig. P.5) deslocam-se com atrito desprezível sobre uma superfície horizontal, presas por molas de constante elástica k a paredes verticais e ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica K . Inicialmente, com as partículas em repouso na posição de equilíbrio, comunica-se uma velocidade v à partícula 2 através de um impulso. Ache os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas das respectivas posições de equilíbrio, para $t > 0$.

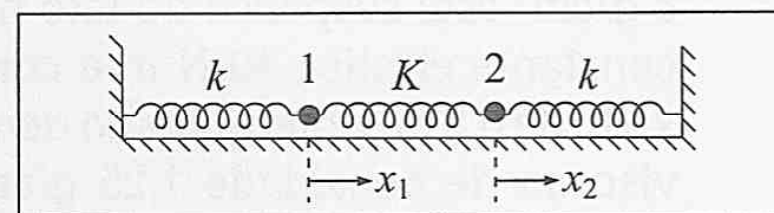


Figura P.5

16. Dois pêndulos idênticos, formados por partículas de massa m suspensas por barras de massa desprezível e comprimento l , estão ligados um ao outro por uma mola de massa desprezível e constante elástica k , inicialmente relaxada, com os pêndulos na posição vertical de equilíbrio (Fig. P.4). Aplica-se à partícula 2 uma força $F = F_0 \cos(\omega t)$. (a) Obtenha a solução estacionária para os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas. (b) Trace gráficos representando o andamento das amplitudes de oscilação das duas partículas em função de ω .

17. Um modelo clássico para a molécula de CO_2 é constituído por duas partículas idênticas de massa M ligadas a uma partícula central de massa m por molas idênticas de constante elástica k e massa desprezível. Sejam x_1 , x_2 e x_3 os deslocamentos das três partículas a partir das respectivas posições de equilíbrio (fig. P.6). (a) Escreva as equações de movimento para x_1 , x_2 e x_3 e verifique que o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. (b) Obtenha as equações de movimento para as coordenadas relativas, $x_2 - x_1 = \xi$ e $x_3 - x_2 = \eta$. (c) A partir de (b), calcule as frequências angulares de oscilação associadas aos dois modos normais de vibração do sistema. Interprete fisicamente estes dois modos, caracterizando os tipos de oscilação das massas a eles associados. (d) Aplique este modelo à molécula de CO_2 , calculando a razão entre as duas frequências de modos normais de vibração para esta molécula. Tome as massas do carbono e oxigênio como 12 e 16, respectivamente, em unidades de massa atômica.

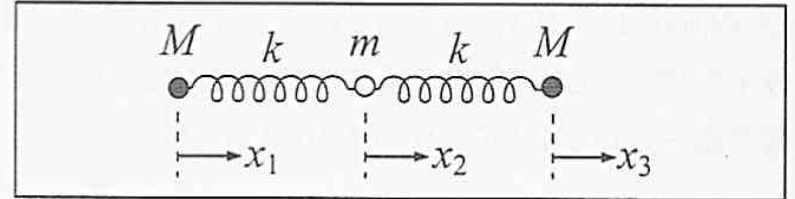


Figura P.6

18. Uma partícula de massa m está ligada por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a outra partícula de mesma massa, suspensa do teto por uma mola idêntica à anterior (Fig. P.7). Inicialmente o sistema está em equilíbrio. Sejam z_1 e z_2 deslocamentos, a partir das respectivas posições de equilíbrio, das partículas 1 e 2, com o eixo dos z orientado verticalmente para baixo. (a) Escreva as equações de movimento para z_1 e z_2 . (b) Obtenha os modos normais de oscilação vertical do sistema. Para isto, considere uma nova coordenada q , combinação linear de z_1 e z_2 : $q = \alpha z_1 + \beta z_2$. Escreva a equação de movimento para q e procure determinar os coeficientes α e β de tal forma que esta equação para q se reduza à equação de movimento de um oscilador harmônico simples. Você obterá duas soluções, q_1 e q_2 , que se chamam as *coordenadas normais* (Seção 4.6). Calcule as frequências angulares de oscilação ω_1 e ω_2 associadas aos dois modos normais do sistema.

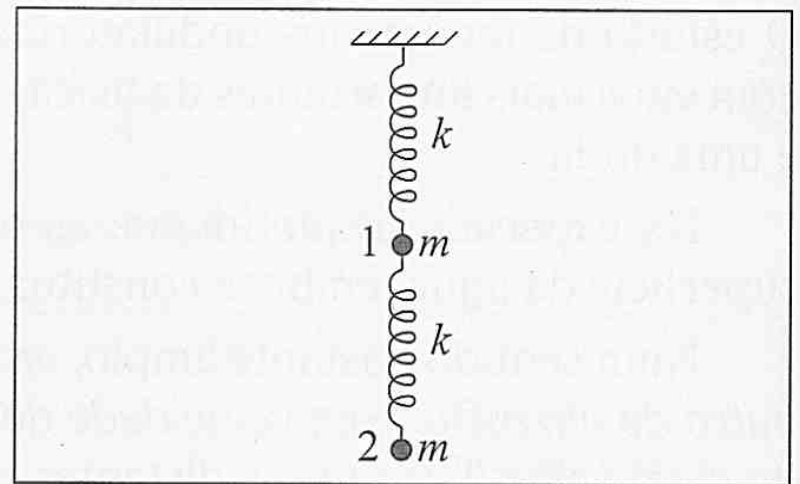


Figura P.7

Capítulo 5

ONDAS

5.1 — O conceito de onda

O estudo de fenômenos ondulatórios, que vamos abordar agora, está ligado a alguns dos conceitos mais importantes da física. Um dos mais fundamentais é o próprio conceito do que é uma onda.

Na experiência quotidiana, as ondas mais familiares são provavelmente as ondas na superfície da água, embora constituam um dos tipos mais complicados de onda.

Num sentido bastante amplo, *uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida*. Em geral, fala-se de onda quando a transmissão do sinal entre dois pontos distantes ocorre *sem que haja transporte direto de matéria* de um desses pontos ao outro.

Assim, para uma onda na superfície da água, podemos associar o sinal, por exemplo, com uma crista, onde a elevação da água é máxima. A onda transporta energia e momento: uma onda provocada por uma lancha, deslocando-se sobre a superfície tranqüila de um lago, sacode um barco distante ao atingi-lo. Entretanto, não existe transporte direto de uma dada

massa de água da lancha até o barco. Um pequeno objeto flutuante mostra como se move a superfície da água na passagem da onda: para cima e para baixo, para a frente e para trás, mas permanecendo em média na mesma posição: é a *forma* da onda (no caso, a crista) que se propaga de um ponto a outro sobre a superfície.

Outro exemplo está ilustrado na Fig. 5.1: uma fileira de dominós inicialmente colocados em pé é atingida por um impulso aplicado ao primeiro dominó (Fig. 5.1(a)); eles vão caindo sucessivamente (Figs. 5.1(b) até (f)), e o impulso se propaga como uma onda ao longo da fileira, do primeiro até o último dominó, sem que cada um deles praticamente saia do lugar.

A Fig. 5.2 ilustra a propagação de uma *onda de compressão* ao longo de uma mola, que está em equilíbrio na Fig. 5.2(a) e tem a extremidade subitamente comprimida em (b). Note que logo após as espiras comprimidas há algumas “rarefeitas”, ou seja, com espaçamento maior que na posição de equilíbrio.

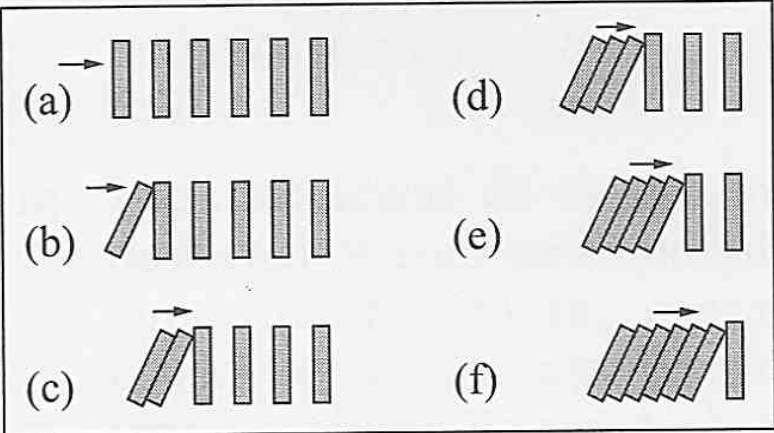


Figura 5.1 — Exemplo de onda

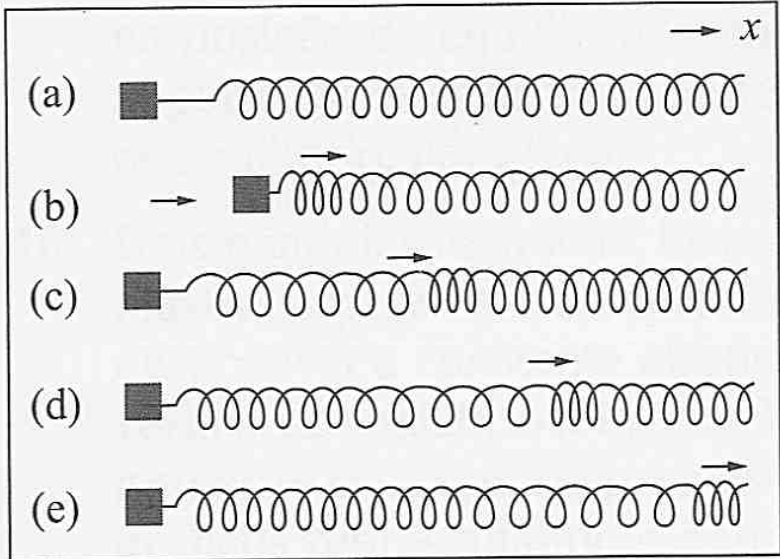


Figura 5.2 — Onda longitudinal

Assim, a onda de compressão é seguida por outra de rarefação. Se acompanharmos o movimento de uma dada espira (por exemplo, a primeira), vemos que ela se desloca para a direita e depois para a esquerda, retornando à posição de equilíbrio (movimento na direção x da Fig. 5.2).

Este é um exemplo de uma *onda longitudinal*, em que a *perturbação* transmitida pela onda (compressão ou rarefação) tem lugar *ao longo da direção de propagação* (x) da onda. As *ondas sonoras* na atmosfera, que estudaremos mais adiante, são ondas longitudinais deste tipo, em que a perturbação consiste em compressões e rarefações da atmosfera.

Na Fig. 5.3, está representada uma corda esticada, a cuja extremidade se aplica um impulso, sacudindo-a para cima e para baixo (Figs. 5.3(a) e (b)). O pulso se propaga como uma onda ao longo da corda, na direção x (Figs. 5.3(b) a (d)). Cada ponto da corda oscila para cima e para baixo, ou seja, a perturbação é um deslocamento na direção y , *perpendicular à direção de propagação da onda*. Uma onda com esta propriedade chama-se uma *onda transversal*.

Um exemplo extremamente importante de ondas transversais são as *ondas eletromagnéticas*, em que os campos elétrico E e magnético B em cada ponto oscilam mantendo-se sempre perpendiculares à direção de propagação (Fig. 5.4). As ondas de luz, da mesma forma que as de rádio, são ondas eletromagnéticas. O meio onde as ondas se propagam, neste caso, não precisa ser um meio material: pode ser o vácuo.

As *ondas sísmicas*, que se propagam no interior da Terra, são mais complicadas: há ondas de compressão, como as ondas sonoras num fluido, que são longitudinais; mas também há ondas associadas a tensão tangenciais (cisalhamento), que são ondas transversais, e os dois tipos de ondas se propagam com velocidades diferentes. As ondas na superfície da água não são nem longitudinais nem transversais: partículas na vizinhança da superfície descrevem trajetórias aproximadamente circulares, com componentes tanto na direção de propagação como perpendiculares a ela.

5.2 — Ondas em uma dimensão

Vamos iniciar o estudo das ondas abordando o caso mais simples, em que as ondas se propagam apenas ao longo de uma direção. É o caso das ondas transversais em uma corda.

(a) Ondas progressivas

O *perfil* da onda na corda num dado instante t é a forma da corda nesse instante, que é dada pela função $y(x, t)$. A Fig. 5.5(a) ao lado dá o perfil $y(x, 0)$ para $t = 0$, e a Fig. 5.5(b) dá o perfil no instante t . A perturbação é uma *onda progressiva* (ou *onda caminhante*), que se desloca como um todo para a direita, sem mudar de forma, com velocidade v .

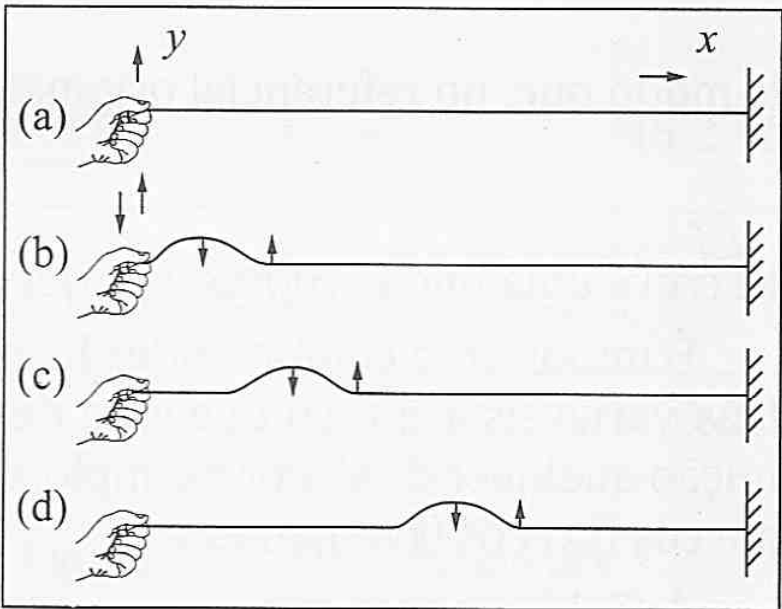


Figura 5.3 — Onda transversal

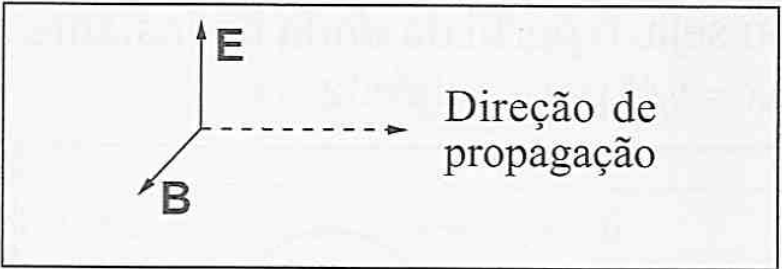


Figura 5.4 — Onda eletromagnética

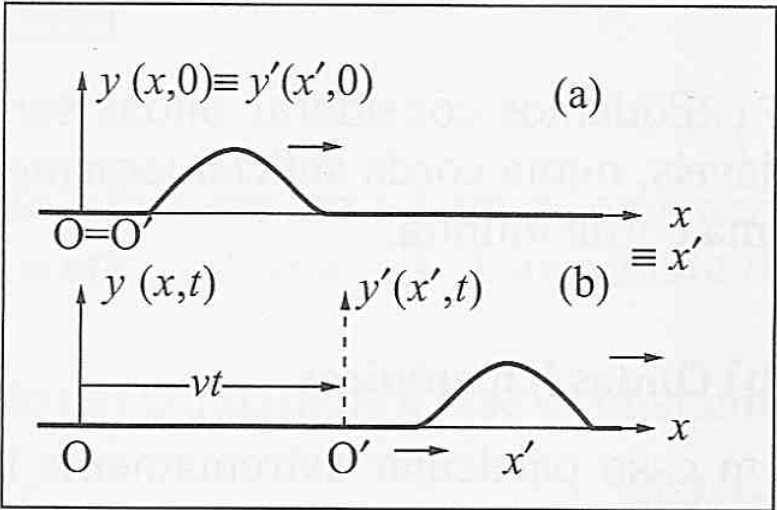


Figura 5.5 — Onda progressiva para a direita

Por conseguinte, se acompanharmos a onda em outro referencial inercial $O'x'y'$, que coincide com Oxy para $t = 0$, mas se desloca (Fig. 5.5) com a velocidade v da onda ao longo de Ox , o perfil da onda não muda com o tempo nesse novo referencial, ou seja,

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x') \quad (5.2.1)$$

é uma função somente de x' .

A relação entre os dois referenciais é dada por uma transformação de Galileu (1, Seção 13.1)

$$x' = x - vt, \quad y' = y \quad (5.2.2)$$

de modo que, no referencial original,

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (5.2.3)$$

descreve uma *onda progressiva*, que se propaga para a direita com velocidade v .

É importante compreender bem o significado da (5.2.3). Ela significa que y , função das duas variáveis x e t , só depende dessas variáveis através de $x' = x - vt$, podendo ser uma função qualquer de x' . Por exemplo, $\cos(kx') = \cos[k(x - vt)]$ é uma função desse tipo, ao passo que $\cos(kx) \cos(kvt)$ não é.

A (5.2.3) implica que

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t) \quad \text{para} \quad \Delta x = v\Delta t \quad (5.2.4)$$

ou seja, o perfil da onda no instante $t + \Delta t$ é o perfil no instante t , deslocado de uma distância $\Delta x = v\Delta t$ para a direita.

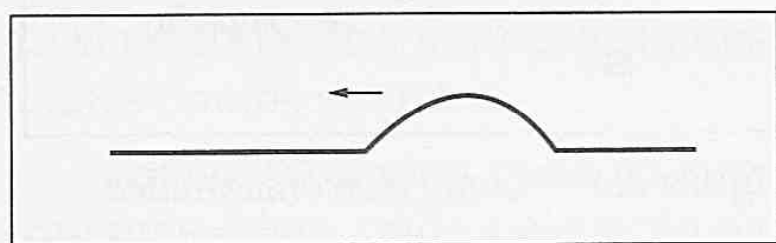


Figura 5.6 — Onda progressiva para a esquerda

Podemos igualmente descrever uma onda progressiva que se propaga para a esquerda (Fig. 5.6), bastando para isso trocar $v \rightarrow -v$:

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad (5.2.5)$$

Nesta expressão, novamente, $g(x'')$ representa uma função arbitrária de seu argumento $x'' = x + vt$, que descreve o perfil da onda num dado instante.

Numa corda, podemos ter ondas progressivas propagando-se somente num sentido (para a direita ou para a esquerda) enquanto tais ondas não atingem as extremidades da corda. Ao atingir uma extremidade, conforme discutiremos mais adiante, uma onda progressiva num sentido é geralmente *refletida*, gerando outra onda progressiva em sentido oposto. Por conseguinte, numa corda finita, teremos em geral, simultaneamente, ondas progressivas propagando-se nos dois sentidos, para a direita e para a esquerda, ou seja,

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (5.2.6)$$

Podemos considerar ondas somente num sentido, durante intervalos de tempo apreciáveis, numa corda suficientemente longa, ou para qualquer tempo no caso limite ideal de uma corda infinita.

(b) Ondas harmônicas

Um caso particular extremamente importante é o de *ondas harmônicas*, assim chamadas porque a perturbação, num dado ponto x , corresponde a uma oscilação harmônica simples. O perfil da onda é uma função senoidal:

$$f(x') = A \cos(kx' + \delta) \quad (5.2.7)$$

onde x' é dado pela (5.2.2) para uma onda progressiva que se propaga para a direita:

$$y(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \delta] \quad (5.2.8)$$

Comparando com a (3.2.16), vemos que a *freqüência angular* de oscilação, num dado ponto x , é

$$\omega = kv = 2\pi\nu = 2\pi / \tau \quad (5.2.9)$$

onde ν é a *freqüência* e τ é o *período temporal*.

Substituindo na (5.2.8), vemos que

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (5.2.10)$$

Podemos gerar uma onda deste tipo, como mostra a Fig. 5.7, fazendo oscilar a extremidade da corda com MHS. ($y(0, t)$ está representado como função do tempo no gráfico, Fig 5.8.) A Fig. 5.7 mostra o perfil da onda nos instantes t e $t + \Delta t$, quando terá sofrido um deslocamento para a direita de $\Delta x = v\Delta t$.

Como função de x , vemos que o perfil é senoidal, ou seja, periódico, com *período espacial*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.2.11)$$

que se chama o *comprimento de onda* e representa, por exemplo, a distância entre duas cristas de onda (ou dois vales) consecutivos.

Substituindo a (5.2.11) na 5.2.9.), obtemos

$$\lambda = v\tau \quad (5.2.12)$$

o que exprime o fato óbvio de que a onda se desloca de $\Delta x = \lambda$ durante um período $\Delta t = \tau$.

Da mesma forma que a freqüência $\nu = 1/\tau$ dá o número de oscilações por unidade de tempo,

$$\sigma = 1/\lambda$$

dá o número de comprimentos de onda por unidade de comprimento, e chama-se *número de onda*. O análogo espacial da freqüência angular é $\omega = 2\pi\nu$ é $k = 2\pi\sigma = 2\pi/\lambda$, que seria o *número de onda angular*. Entretanto, é comum chamar k simplesmente de *número de onda* (σ não é muito usado), e adotaremos essa terminologia.

O argumento do co-seno na (5.2.10)

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \delta \quad (5.2.13)$$

chama-se *fase* da onda, e δ é a *constante de fase*. Medindo a fase em rad e λ em m, o número de onda k se mede em rad/m (ou simplesmente m^{-1}) e ω em rad/s (ou s^{-1}). A amplitude de oscilação A na (5.2.10) chama-se *amplitude da onda*.

Se acompanharmos o deslocamento com o tempo de um ponto onde a fase é constante,

$$\phi(x, t) = \phi_0 = \text{constante} \quad (5.2.14)$$

teremos, derivando a (5.2.14) em relação ao tempo,

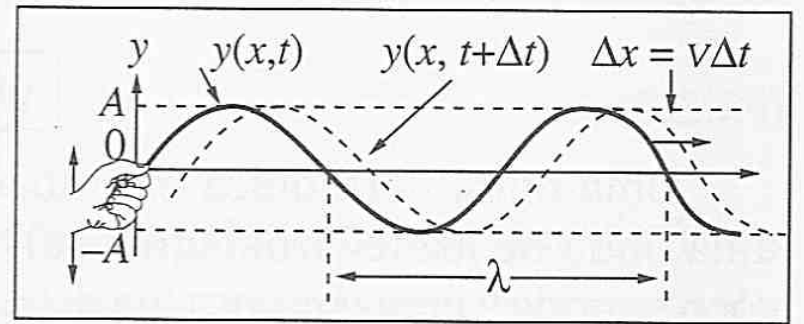


Figura 5.7 — Onda harmônica

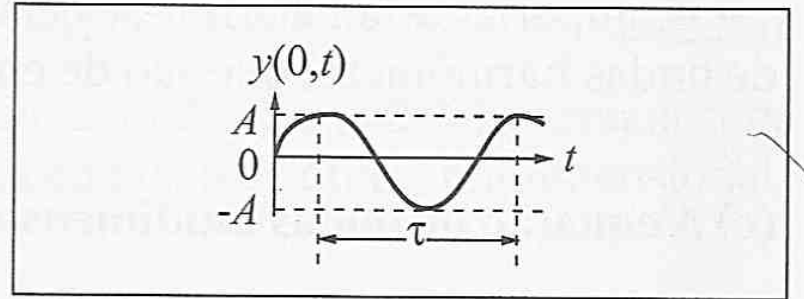


Figura 5.8 — Período temporal

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad (5.2.15)$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v = v\lambda} \quad (5.2.16)$$

Um ponto onde a fase é constante (correspondendo, por exemplo, a uma dada crista de onda, como $\varphi = 2\pi$), desloca-se portanto com a velocidade v da onda; por isto, v é chamado de *velocidade de fase*.

Podemos também escrever a expressão (5.2.10) de uma onda harmônica usando notação complexa (3.4.43), como

$$\boxed{y(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}]} \quad (5.2.17)$$

Uma onda harmônica é também conhecida como *onda monocromática*, porque, para uma onda de luz (eletromagnética), uma frequência ou comprimento de onda determinado corresponde a uma cor pura (na decomposição espectral da luz solar por um prisma, diferentes cores estão associadas a comprimentos de onda distintos).

É importante familiarizar-se bem com todas as relações entre os parâmetros característicos de ondas harmônicas, que são de emprego muito freqüente.

(c) A equação de ondas unidimensional

Consideremos a expressão geral (5.2.3) de uma onda progressiva que se propaga para a direita:

$$y(x, t) = f(x'), \quad x' = x - vt \quad (5.2.18)$$

Para associar uma equação de movimento com a propagação da onda, vamos calcular a *aceleração* num dado ponto x . A velocidade e a aceleração em x se obtêm fixando x e derivando em relação ao tempo, o que corresponde a tomar *derivadas parciais*. No caso da corda, por exemplo, a velocidade com que o ponto x se desloca verticalmente na direção y no instante t é

$$\text{velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \quad (5.2.19)$$

e a aceleração é

$$\text{aceleração} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) \quad (5.2.20)$$

Pela (5.2.18), y só depende de t através da variável $x' = x - vt$ (função de função), de modo que as derivadas se calculam pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'} \quad (5.2.21)$$

onde usamos $\partial x' / \partial t = \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = -v$. Analogamente,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left(\frac{df}{dx'} \right) \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v}$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (5.2.22)$$

Por outro lado, como $\partial x' / \partial x = \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1$, temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \right. \quad (5.2.23)$$

Comparando as (5.2.22) e (5.2.23), vemos que $y(x, t)$ satisfaz a equação

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0} \quad (5.2.24)$$

que se chama *equação de ondas unidimensional* e é uma das equações fundamentais da física.

Se tomarmos, em lugar da (5.2.18), uma onda progressiva que se propaga para a esquerda, como a (5.2.5),

$$y(x, t) = g(x''), \quad x'' = x + vt \quad (5.2.25)$$

isto equivale a trocar $v \rightarrow -v$ e $x' \rightarrow x''$ na (5.2.21), mas as (5.2.22) e (5.2.23) permanecem válidas, com $x' \rightarrow x''$. Logo, a (5.2.25) também é solução da equação de ondas unidimensional, e é imediato que o mesmo vale para a (5.2.6).

A equação de ondas unidimensional é uma *equação a derivadas parciais linear de 2ª ordem*. Antes de discutir suas soluções de forma mais detalhada, vamos mostrar que as oscilações transversais de uma corda vibrante são realmente governadas por esta equação.

5.3 — A equação das cordas vibrantes

(a) Equação de movimento

Vamos considerar vibrações transversais de uma *corda distendida*, como as que encontramos em instrumentos musicais de cordas (violino, piano, violão, harpa, ...).

Tomaremos a posição de equilíbrio horizontal da corda como direção Ox (Fig. 5.9); nesta situação, a porção da corda à esquerda de um ponto qualquer dado exerce sobre a porção da direita uma força $-T$ dirigida para a esquerda, e equilibrada pela força T com que a porção da direita atua sobre a da esquerda. Isto define a *tensão T* de equilíbrio, constante ao longo da corda, que é suposta *uniforme*.

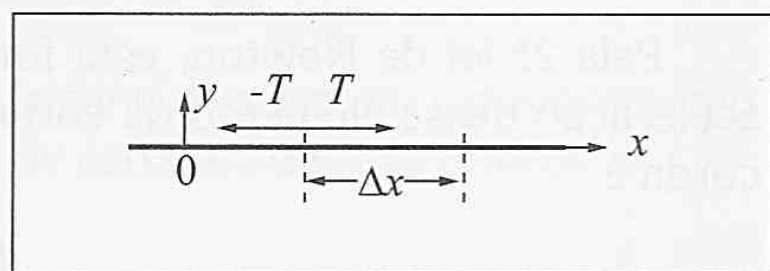


Figura 5.9 — Tensão da corda

Seja μ a *densidade linear de massa* da corda: um elemento de comprimento infinitésimo Δx da corda possui então a massa

$$\Delta m = \mu \Delta x \quad (5.3.1)$$

Um deslocamento transversal de um ponto da corda teria geralmente duas componentes (y e z), mas vamos limitar a deslocamentos num dado plano, que podemos tomar como plano Oxy .

O deslocamento de um ponto x da corda de sua posição de equilíbrio será então $y(x, t)$. Podemos pensar na corda como um caso limite de um sistema de partículas acopladas por molas (que transmitem a tensão), análogo aos que foram considerados na Seção 4.6. Vamos limitar a pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio, de tal forma que, como no exemplo da pg. 93, a variação de comprimento da corda é desprezível, e a magnitude da tensão permanece igual a T , com muito boa aproximação. Como naquele caso, as forças que atuam sobre um elemento Δx da corda serão devidas à variação de direção da tensão, que introduz uma componente transversal de força restauradora na direção y .

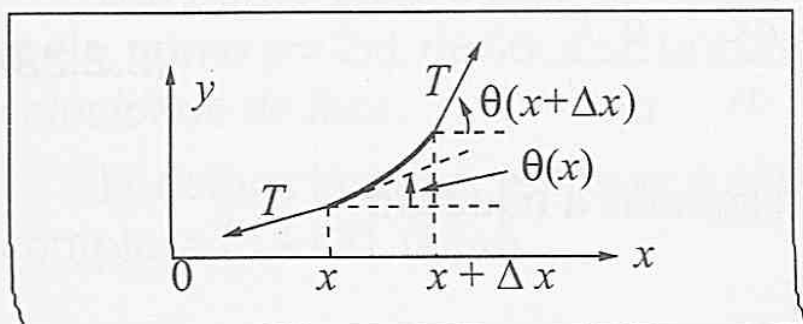


Figura 5.10 — Variação de direção da tensão

Conforme mostra a Fig. 5.10, a componente y da tensão no ponto $x + \Delta x$, devida à porção da corda à direita de $x + \Delta x$, é dada por

$$T \sin \theta \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x} \quad (5.3.2)$$

onde θ é o ângulo entre a tangente à corda e o eixo Ox e, como no caso da pg. 93, a aproximação de pequenos deslocamentos implica $\theta \ll 1$, de modo que $\sin \theta \approx \tan \theta$, que é o coeficiente angular do perfil da corda, dado por $\partial y / \partial x$.

Na (5.3.2), todas as grandezas são calculadas no ponto $x + \Delta x$ da corda. No ponto x , conforme mostra a Fig. 5.10, temos uma força análoga mas de sinal contrário, devida à porção da corda à esquerda de x . Logo a força vertical resultante sobre o elemento Δx da corda é dada por

$$T \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = T \Delta x \left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right] \quad (5.3.3)$$

onde o 1.º termo é a força (5.3.2) no ponto $x + \Delta x$ e o 2.º termo é a força análoga no ponto x .

Para Δx infinitésimo, lembrando a definição de derivada parcial (1, Seção 7.4), a expressão entre colchetes na (5.3.3) pode ser substituída por $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t)$, de modo que obtemos

$$\text{Força vertical sobre } \Delta x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x \quad (5.3.4)$$

Pela 2.ª lei de Newton, esta força é o produto da massa de Δx , dada pela (5.3.1), pela aceleração desse elemento da corda, dada pela (5.2.20). Logo, a equação de movimento da corda é

$$\underbrace{\mu \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)}_{\text{aceleração vertical}} = \underbrace{T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x}_{\text{força vertical sobre } \Delta x}$$

ou seja,

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (5.3.5)$$

o que equivale à equação de ondas unidimensional (5.2.24), com

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \quad (5.3.6)$$

como expressão da *velocidade de propagação*.

A (5.3.5) é a célebre *equação das cordas vibrantes*, obtida por Euler e D'Alembert por volta de 1750. A velocidade de onda (5.3.6) é tanto maior quanto maior a tensão e menor a inércia (massa por unidade de comprimento) como seria de esperar. Para uma corda com $\mu = 10\text{g/m} = 10^{-2}\text{ kg/m}$ e $T = 100\text{ N}$, obtemos $v = 100\text{ m/s}$.

Podemos também obter a expressão da velocidade de onda por outro método, admitindo que já se conheça a possibilidade de propagação de ondas progressivas de velocidade v sobre a corda e procurando determinar v .

Suponhamos que um pulso, cuja forma podemos aproximar por um pequeno arco de círculo de raio r e abertura angular $2\Delta\theta \ll 1$, se propaga para a *direita* com velocidade v , o resto da corda permanecendo em equilíbrio, no referencial inercial S considerado.

Como vimos à pg. 99, se passarmos para outro referencial S' , que se desloca para a direita com velocidade v em relação a S , veremos o pulso “congelado” sempre na mesma posição em S' , e é a corda que “escorrega através” do pulso, deslocando-se com velocidade $-v$, para a esquerda (Fig. 5.11). Como as forças não se alteram pela transformação de Galileu (1, Seção 13.1), a força resultante sobre o elemento Δl $= 2r\Delta\theta$ da corda continua sendo vertical (voltada para o centro O do arco de círculo na Fig.) e dada por

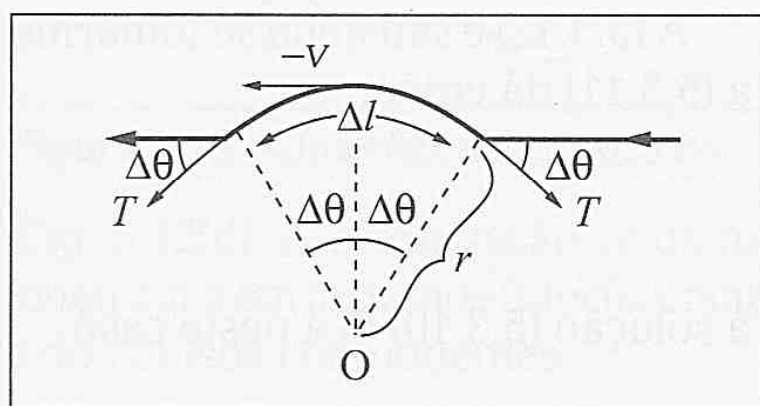


Figura 5.11 — Pulso na corda

$$T \sin(\Delta\theta) + T \sin(\Delta\theta) \approx 2T\Delta\theta = 2T \cdot \frac{\Delta l}{2r} \quad (5.3.7)$$

Em S' , o elemento Δl descreve um movimento circular uniforme de velocidade v (Fig.), de modo que tem uma aceleração centrípeta v^2/r , e a 2.^a lei de Newton se escreve, com a força dada pela (5.3.7),

$$T \frac{\Delta l}{r} = \Delta m \frac{v^2}{r} = \mu \Delta l \frac{v^2}{r} \quad (5.3.8)$$

o que dá $v^2 = T/\mu$, concordando com a (5.3.6).

(b) Solução geral

As *condições iniciais* para a equação de movimento da corda consistem em dar o *deslocamento inicial* $y(x, 0)$ e a *velocidade inicial* [cf. (5.2.19)] $\partial y / \partial t(x, 0)$ de cada um de seus pontos

$$\boxed{\begin{aligned} y(x, 0) &= y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= y_1(x) \end{aligned}} \quad \text{Condições iniciais} \quad (5.3.9)$$

onde $y_0(x)$ e $y_1(x)$ são duas funções que podemos escolher arbitrariamente. Logo, devemos esperar que a *solução geral da equação de ondas unidimensional dependa de duas funções arbitrárias*.

A (5.2.6) é solução e depende das duas funções arbitrárias f e g . Logo, deve representar a *solução geral*:

$$\boxed{y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)} \quad (5.3.10)$$

ou seja, a solução geral da equação de ondas unidimensional é a superposição de ondas progressivas propagando-se nos dois sentidos (para a direita e para a esquerda). Esta solução é devida a D'Alembert.

Exemplo: Suponhamos que a corda sofra um deslocamento inicial $y_0(x)$, mas seja solta em repouso, ou seja, $y_1(x) = 0$ nas (5.3.9). Substituindo a (5.3.10) nas (5.3.9), obtemos então, com o auxílio da (5.2.21),

$$y(x, 0) = f(x) + g(x) = y_0(x) \quad (5.3.11)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = -v \frac{d}{dx} f(x) + v \frac{d}{dx} g(x) = v \frac{d}{dx} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (5.3.12)$$

A (5.3.12) é satisfeita se tomarmos $g(x) = f(x)$ (somar uma constante não altera a solução), e a (5.3.11) dá então:

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2} y_0(x) \quad (5.3.13)$$

e a solução (5.3.10) fica neste caso

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [y_0(x - vt) + y_0(x + vt)] \quad (5.3.14)$$

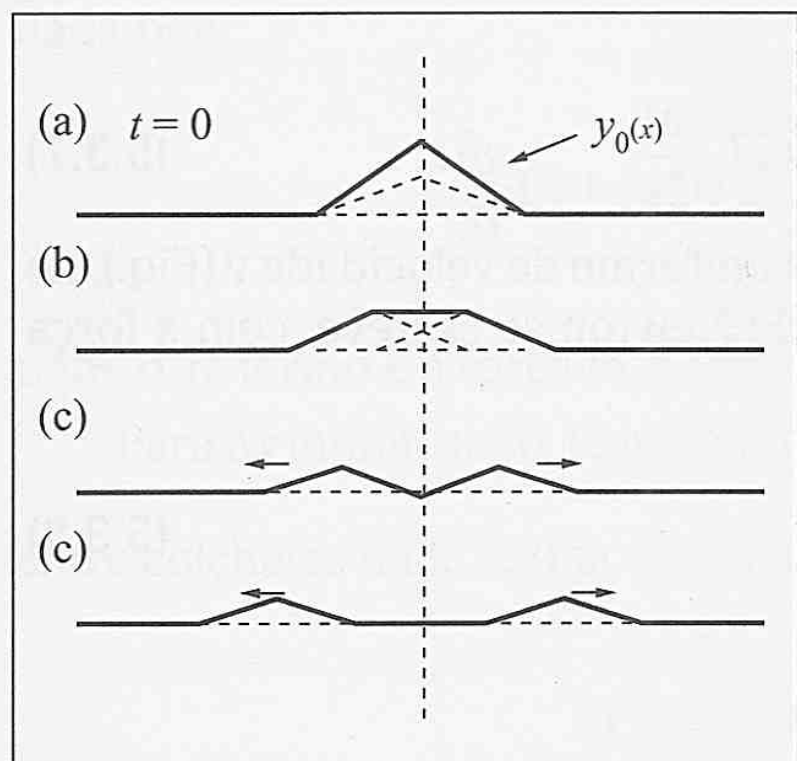


Figura 5.12 — Pulso triangular

Um exemplo específico, em que $y_0(x)$ é um pulso de forma triangular, está ilustrado na Fig. 5.12(a) a (d), que mostram a evolução temporal a partir de $t = 0$. O pulso inicial se descompõe em 2 pulsos idênticos (cada um com a metade da amplitude), que se propagam com velocidade v em sentidos opostos, de conformidade com a (5.3.14). Esta solução permanece válida enquanto os pulsos não atingem as extremidades da corda.

(c) O princípio de superposição

Sejam $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ duas soluções quaisquer da equação de ondas unidimensional (5.2.24) e

$$y(x, t) = ay_1(x, t) + by_2(x, t) \quad (5.3.15)$$

uma combinação linear qualquer dessas soluções (a e b são constantes arbitrárias; [cf. (3.2.14)]).

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (ay_1 + by_2) &= a \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (ay_1 + by_2) &= a \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

é imediato que a (5.3.15) também é solução da (5.2.24), o que é consequência da linearidade dessa equação.

Vale portanto para a equação de ondas unidimensional o *princípio de superposição*: qualquer combinação linear de soluções também é solução. Esta propriedade é extremamente importante. Um exemplo imediato é a (5.2.6), que é combinação linear das (5.2.3) e (5.2.5).

A Fig. 5.13 mostra outro exemplo de aplicação do princípio de superposição. Em (a), dois pulsos triangulares iguais e contrários caminham em sentidos opostos. Em (b), os dois pulsos estão superpostos e se cancelam mutuamente: o perfil da corda coincide com a posição de equilíbrio. Em (c), um pulso ultrapassou o outro após a "colisão", prosseguindo como se nada tivesse acontecido. A situação (b) é um exemplo de *interferência destrutiva* entre dois pulsos.

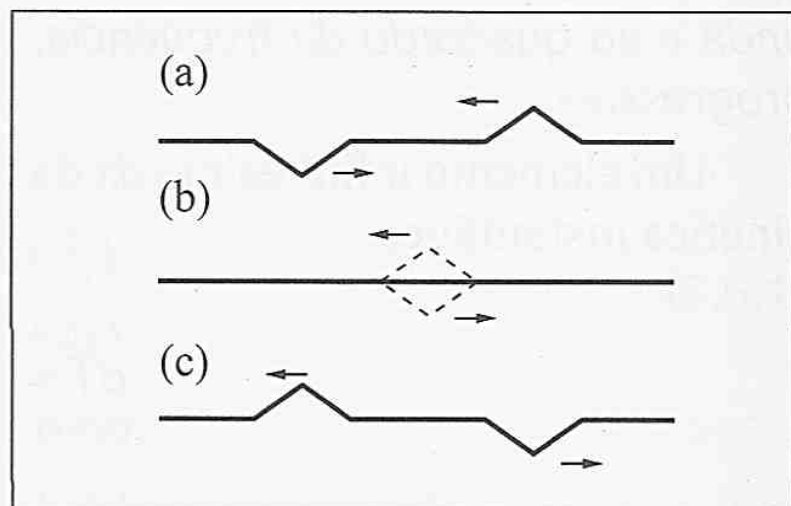


Figura 5.13 — Interferência destrutiva

Um exemplo de *interferência construtiva* se obtém invertendo o sentido de propagação dos dois pulsos na Fig. 5.12(d). A propagação se dá na sequência inversa: (d) → (b) → (c) → (a). Os pulsos se interpenetram e em (a) temos interferência construtiva: o pulso resultante tem o dobro da amplitude dos pulsos componentes.

5.4 — Intensidade de uma onda

Conforme foi mencionado na Seção 5.1, *uma onda progressiva transporta energia*. Para gerar a onda harmônica progressiva ilustrada na Fig. 5.7, é preciso realizar trabalho, para fazer oscilar a extremidade da corda com MHS. A energia correspondente é transmitida à corda e se propaga com a onda, podendo ser comunicada, por exemplo, a uma partícula colocada na outra extremidade da corda. Vamos calcular a energia transmitida pela onda, por unidade de tempo, através de um ponto x qualquer da corda.

Num dado instante t , a porção da corda à esquerda de x atua sobre um elemento da corda no ponto x (Fig. 5.14) com uma força transversal

$$F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \quad (5.4.1)$$

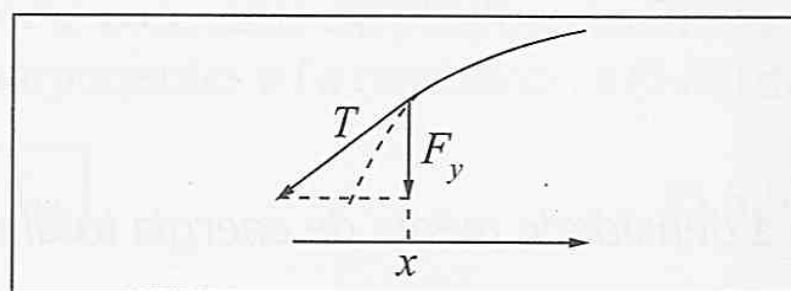


Figura 5.14 — Força transversal

O trabalho realizado sobre esse elemento por unidade de tempo (*potência instantânea*: 1, Seção 7.6), que corresponde à energia transmitida através de x por unidade de tempo, é o produto da força pela velocidade (5.2.19), ou seja,

$$P(x, t) = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (5.4.2)$$

Para a onda harmônica progressiva (5.2.10), temos $\partial y / \partial x = -kA \sin \varphi$, $\partial y / \partial t = +\omega A \sin \varphi$ onde φ é dado pela (5.2.13). Logo,

$$P(x, t) = \omega k T A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta) \quad (5.4.3)$$

que oscila com o tempo (e com x). Em geral não interessa o valor instantâneo, e sim a *média sobre um período*, que chamaremos de *intensidade* I da onda. Com o auxílio da (4.2.5), a (5.4.3) dá

$$I = \bar{P} = \omega k T A^2 \underbrace{\sin^2(kx - \omega t + \delta)}_{=1/2}$$

ou seja, lembrando que $T = \mu v^2$ pela (5.3.6), e que $kv = \omega$ pela (5.2.9),

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2} \quad (5.4.4)$$

Assim, a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade da onda e ao quadrado da frequência. Note que o resultado se aplica a uma onda harmônica progressiva.

Um elemento infinitésimo dx da corda no ponto x tem uma massa $dm = \mu dx$ e uma energia cinética instantânea

$$dT = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

o que corresponde a uma densidade linear de energia cinética (energia cinética por unidade de comprimento) instantânea

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (5.4.5)$$

Novamente, interessa-nos apenas o valor médio.

Como $(\partial y / \partial t)^2 = \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$, vem

$$\overline{\frac{dT}{dx}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \quad (5.4.6)$$

Como o elemento dx executa um MHS na direção y , a energia potencial média é igual à energia cinética média [cf. (3.2.33)], que deve ser comparada com a (5.4.6)). Logo, a densidade média de energia potencial é

$$\overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \quad (5.4.7)$$

e a densidade média de energia total da onda é

$$\boxed{\overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{dT}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2} \quad (5.4.8)$$

O valor médio da energia da onda contida num elemento Δx da corda é

$$\overline{\Delta E} = \overline{\frac{dE}{dx}} \Delta x \quad (5.4.9)$$

Como a onda percorre $\Delta x = v \Delta t$ durante um intervalo de tempo Δt , a potência média transportada é

$$\bar{P} = \frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \left(\overline{\frac{dE}{dx}} \right) \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \left(\overline{\frac{dE}{dx}} \right) \quad (5.4.10)$$

que deve ser igual à (5.4.4). Efetivamente, comparando as (5.4.4) e (5.4.8), vemos que a intensidade é igual ao produto da velocidade da onda pela densidade média de energia. Podemos dizer também que ela representa o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda.

5.5 — Interferência de ondas

Pelo princípio de superposição, uma combinação linear qualquer de ondas numa corda vibrante também é uma onda possível na corda. Consideremos, em particular, a superposição de duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência.

(a) Ondas no mesmo sentido

Sejam

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x, t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{cases} \quad (5.5.1)$$

as duas ondas, que se propagam ambas para a direita. Como

$$\cos(kx - \omega t + \delta) = \cos(\omega t + \varphi)$$

onde $\varphi = -kx - \delta$, podemos utilizar as (3.5.1) a (3.5.4) para obter a onda resultante:

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (5.5.2)$$

onde, pela (3.5.2),

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta_{12} \quad (5.5.3)$$

com

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1} \quad (5.5.4)$$

que é a *diferença de fase* entre as duas ondas.

Como a frequência é a mesma, a (5.4.4) mostra que a intensidade de cada onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude, com a mesma constante de proporcionalidade, de modo que, chamando de I_1 e I_2 as intensidades das componentes e I a resultante, a (5.53) dá

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_{12}} \quad (5.5.5)$$

Logo, a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam na mesma direção e sentido é outra onda do mesmo tipo, mas a *intensidade da resultante* é dada pela (5.5.5), e é geralmente *diferente da soma das intensidades das componentes*, dependendo da diferença de fase δ_{12} entre elas. Este fenômeno chama-se de *interferência*.

A intensidade resultante é *máxima (interferência construtiva)* para $\cos \delta_{12} = 1$, ou seja,

$$\boxed{\delta_{12} = 2m\pi \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow I = I_{\text{máx}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2} \quad (5.5.6)$$

e é *mínima (interferência destrutiva)* para $\cos \delta_{12} = -1$:

$$\boxed{\delta_{12} = (2m + 1)\pi \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow I = I_{\text{mín}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2} \quad (5.5.7)$$

Para valores intermediários de δ_{12} , a intensidade resultante, conforme mostra a Fig. 5.15, oscila entre os valores máximo e mínimo, como função de δ_{12} . Em particular, se $I_1 = I_2$, as (5.5.6) mostram que

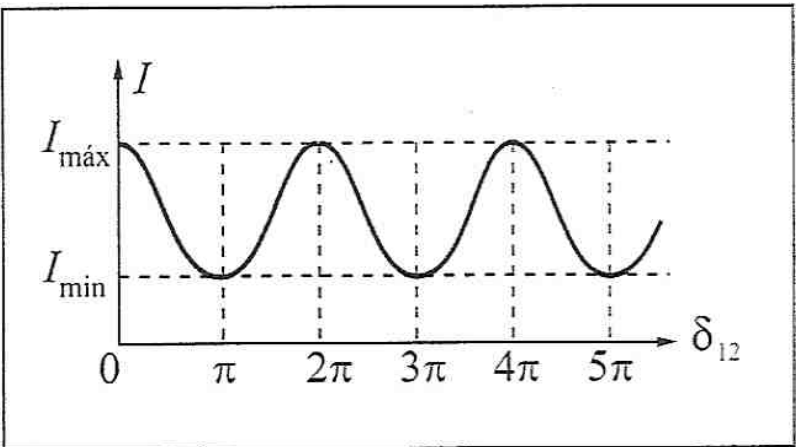


Figura 5.15 — Interferência

(b) Sentidos opostos; ondas estacionárias

Consideremos agora o caso em que as ondas se propagam em *sentidos opostos*. Para simplificar a discussão, vamos supor que tenham a mesma amplitude e constante de fase = 0, ou seja,

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A \cos(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) = A \cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

(5.5.9)

Temos então:

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$$

(5.5.10)

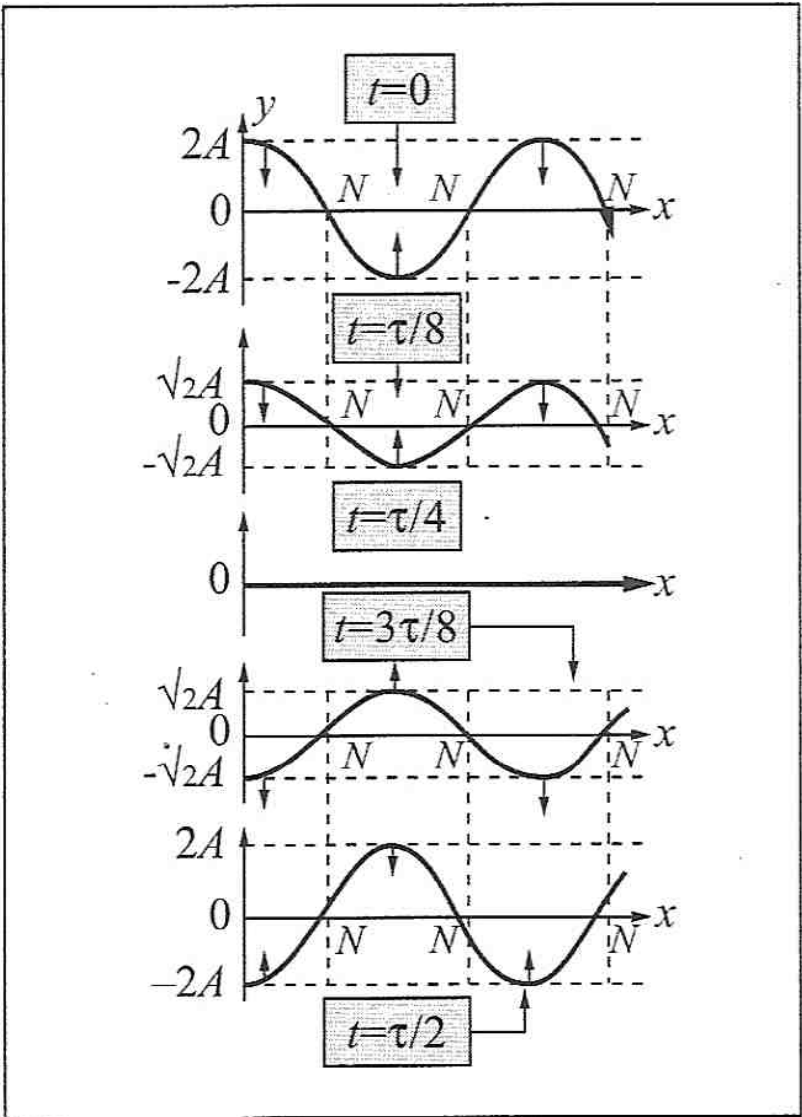


Figura 5.16 — Perfis instantâneos

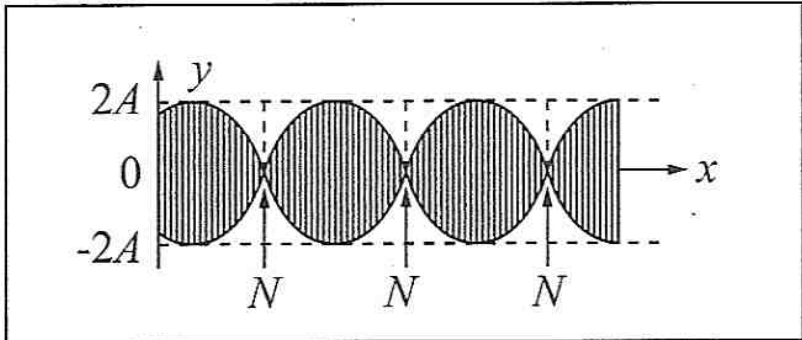


Figura 5.17 — Aspecto visual de onda estacionária

$$I_{\text{máx}} = 4I_1, \quad I_{\text{mín}} = 0 \quad (I_1 = I_2)$$

(5.5.8)

ou seja, no caso de interferência destrutiva, a intensidade se anula, e para interferência construtiva ela é 4 vezes maior que as intensidades (idênticas) das componentes (a amplitude é dupla).

Fenômenos de interferência, como estes, estão entre os efeitos mais característicos da propagação de ondas.

Como a resultante é o *produto* de uma função de x por uma função de t , *não há propagação*: a forma da corda permanece sempre semelhante, com o deslocamento mudando apenas de amplitude e, eventualmente, de sinal.

A Fig. 5.16 mostra uma série de “instantâneos” da (5.5.10) a intervalos de $\tau/8$. Para $t = \tau/4$, a corda passa pela posição de equilíbrio ($y = 0$), e depois os deslocamentos trocam de sinal, até atingir amplitude máxima para $t = \tau/2$; daí por diante, os gráficos seriam percorridos em sentido inverso (de baixo para cima, na Fig. 5.16), até voltar à configuração inicial para $t = \tau$.

Numa fotografia de tempo de exposição longo, a corda apareceria como na Fig. 5.17, que também é o seu aspecto visual quando a frequência de oscilação é elevada, pela persistência das imagens na retina.

Os pontos marcados N nas Figs. 5.16 e 5.17 permanecem sempre em repouso, e chamam-se *nodos*. Nos pontos a meio caminho entre os nodos, que se chamam *ventres* ou *antinodos*, a amplitude de oscilação é máxima a cada instante. Os nodos subdividem a corda numa série de segmentos, que oscilam separadamente.

Uma onda do tipo da (5.5.10), que não se propaga, chama-se uma *onda estacionária*. As ondas compo-

nentes (5.5.9), cuja interferência produz a (5.5.10), têm fluxos de energia iguais e contrários, que se cancelam na resultante, de modo que o fluxo *médio* de energia se anula neste caso.

(c) Batimentos; velocidade de grupo

Suponhamos agora que as ondas se propagam no mesmo sentido e têm mesma amplitude, mas têm frequências (e, por conseguinte, números de onda) ligeiramente diferentes:

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases} \quad (5.5.11)$$

onde [cf. (3.5.8) a (3.5.12)]

$$\begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (5.5.12)$$

supondo $\omega_1 > \omega_2$, $k_1 > k_2$. Temos então [cf. (3.5.10)]

$$y + y_1 + y_2 = A \left\{ \cos \left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] + \cos \left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] \right\} \quad (5.5.13)$$

ou seja,

$$y(x, t) = a(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (5.5.14)$$

onde

$$a(x, t) = 2A \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \quad (5.5.15)$$

Como na Seção 3.5, temos um fenômeno de *batimentos*: podemos considerar a (5.5.14) como uma onda de frequência $\bar{\omega}$ elevada cuja amplitude a é modulada por outra onda de frequência $\Delta\omega$ bem mais baixa (Fig. 5.18). Este é o exemplo mais simples de um *grupo de ondas*.

Podemos considerar a *fase* da (5.5.14) como sendo dada por $\varphi(x, t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$, de modo que, como na (5.2.16), a velocidade com que se desloca um ponto de fase constante (tal como F na Fig. 5.18) é a *velocidade de fase*

$$v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad (5.5.16)$$

Por outro lado, a velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade associada a um ponto da envoltória (tal como o ponto G, situado na crista na Fig. 5.18), onde a é constante. Esta velocidade chama-se *velocidade de grupo*, e a (5.5.15) mostra que é dada por

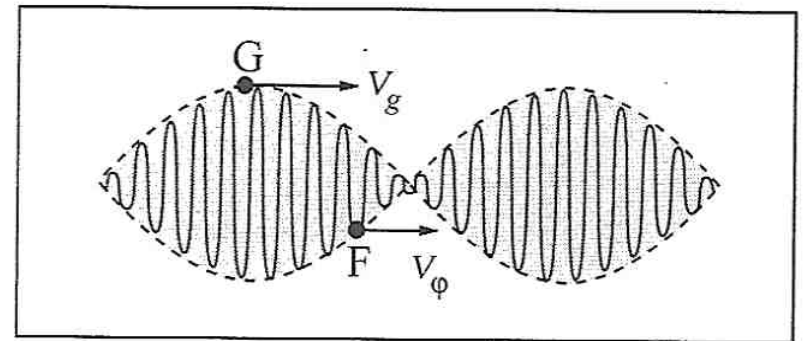


Figura 5.18 — Grupo de ondas

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.5.17)$$

tomando Δk suficientemente pequeno (a derivada deve ser calculada para $k = \bar{k}$)

Para ondas numa corda vibrante homogênea, temos (5.3.6)

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{T/\mu} = \text{constante} \quad (5.5.18)$$

de modo que as (5.5.16) e (5.5.17) dão

$$v_\phi = v_g = v \quad (5.5.19)$$

ou seja, as velocidades de fase e de grupo coincidem, e o grupo se propaga com a velocidade da onda.

Entretanto, para outros tipos de onda, sucede que a *velocidade de fase* v_ϕ varia com o comprimento de onda, ou, o que é equivalente, com o número de onda k :

$$\omega = kv_\phi(k) \quad (5.5.20)$$

e a (5.5.17) dá

$$v_g = d\omega/dk = v_\phi + kv_\phi/dk \neq v_\phi \quad (5.5.21)$$

ou seja, nesse caso a *velocidade de grupo* é diferente de *velocidade de fase*. Diz-se então que há *dispersão*. É o que ocorre, por exemplo, com ondas de luz num meio material: a velocidade de fase é diferente para o vermelho e para o violeta, correspondendo a índices de refração diferentes.

Quando há dispersão, as ondas individuais dentro da envoltória, na Fig. 5.18, deslocam-se em relação à mesma, mudando de amplitude gradualmente e podendo “desaparecer” para ser substituídas por outras. Este fenômeno pode ser observado facilmente para ondas na superfície da água (quando a profundidade da água é muito maior que o comprimento de onda). Neste caso, verifica-se que $v_g = \frac{1}{2}v_\phi$, de modo que as ondinhas individuais dentro de um grupo “nascem” em sua parte posterior e propagam-se dentro do grupo até a parte anterior, onde “desaparecem”. Pode-se mostrar também que a velocidade de grupo é a velocidade de propagação da energia, tendo assim um significado físico mais importante que a velocidade de fase.

5.6 — Reflexão de ondas

Consideremos um pulso que se propaga para a esquerda numa corda longa, cuja extremidade esquerda O é presa a um suporte, de modo a permanecer sempre *fixa* (Fig. 5.19). Que acontece quando o pulso atinge a extremidade O ?

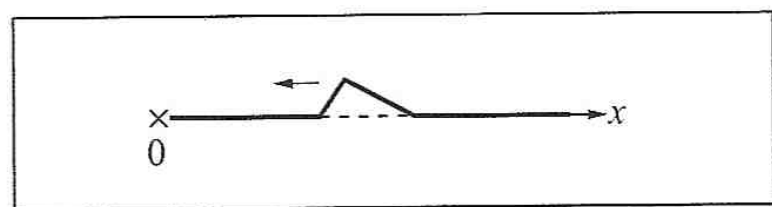


Figura 5.19 — Pulso numa corda com extremidade fixa

Seja $g(x + vt)$ a função que descreve o pulso incidente (triangular na Fig. 5.19), de modo que, antes de ser atingida a extremidade,

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad (5.6.1)$$

A condição de que a extremidade $x = 0$ permaneça sempre fixa se exprime por

$$y(0, t) = 0 \quad \text{para qualquer } t \quad (5.6.2)$$

Uma condição deste tipo, por ser dada no contorno (“periferia”) da corda, chama-se *condição de contorno*.

A solução geral da equação de ondas é dada pela (5.3.10),

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (5.6.3)$$

onde, pela (5.6.1), $f = 0$ antes que a extremidade seja atingida, e g é o pulso dado. Substituindo a (5.6.3) na (5.6.2), obtemos

$$y(0, t) = f(-vt) + g(vt) = 0 \Rightarrow f(-vt) = -g(vt) \quad \text{para qualquer } t$$

o que determina a função incógnita $f(x')$:

$$\boxed{f(x') = -g(-x')} \quad (5.6.4)$$

e, substituindo x' por $x - vt$,

$$f(x - vt) = -g(vt - x) \quad (5.6.5)$$

e a (5.6.5) dá a solução do problema:

$$\boxed{y(x, t) = g(vt + x) - g(vt - x)} \quad (5.6.6)$$

onde a função g é conhecida (pulso (5.6.1) dado). A (5.6.6) satisfaz a equação de ondas e a condição de contorno (5.6.2), como se verifica imediatamente.

O 2º termo da (5.6.6), que só aparece depois que o pulso incidente atinge a extremidade fixa, propaga-se para a direita e representa um *pulso refletido*. Podemos representar graficamente a solução (5.6.6) através do seguinte artifício: Imaginemos um prolongamento (fictício!) da corda para $x < 0$, em linha interrompida na Fig. 5.20. Para $t = 0$ (Fig. 5.20(a)), temos, para $x > 0$, o pulso incidente $g(x)$ (linha cheia), e representamos, no prolongamento fictício $x < 0$, o pulso refletido $f(x) = -g(-x)$ dado pela (5.6.4) (em linha interrompida na Fig. 5.20(a)).

Depois tratamos a corda e seu prolongamento como se fossem uma só corda ilimitada, em que o pulso incidente se propaga para a esquerda e o refletido para a direita. A (5.6.6) é a superposição dos dois pulsos para $x > 0$ (Figs. 5.20(b) e (c)). Depois de algum tempo (Fig. 5.20(c)), propaga-se na corda ($x > 0$) somente o pulso refletido.

Vemos que o pulso volta invertido após a reflexão: a reflexão numa extremidade fixa produz uma defasagem de 180° . A razão física deste resultado é que, ao atingir a origem, o pulso iria provocar um determinado deslocamento: para permanecer fixa, a extremidade tem de reagir (reação de suporte) produzindo um deslocamento igual e contrário, que gera a imagem invertida (pulso refletido).

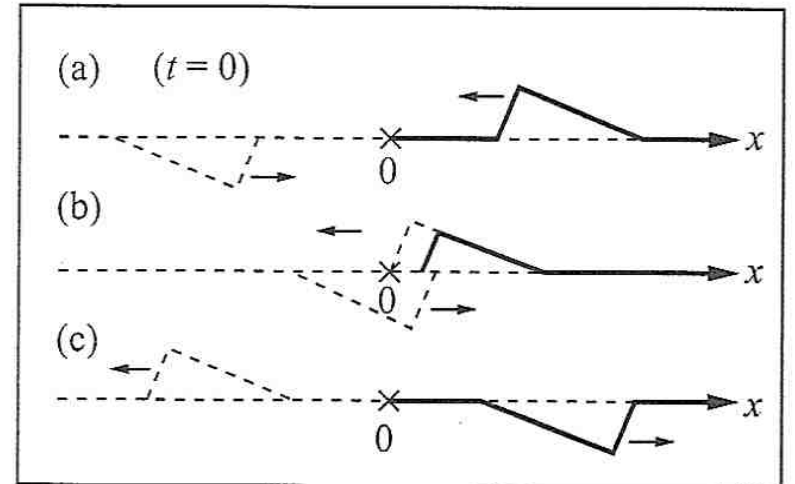


Figura 5.20 — Reflexão numa extremidade fixa

Extremidade livre: Também podemos considerar o que acontece quando a extremidade da corda é livre em lugar de ser fixa, ou seja, não atua sobre ela nenhuma força transversal. Entretanto, continua atuando a força de tensão T , que foi suposta uniforme ao longo de toda a corda, de modo que esta força tem de ser horizontal.

Pela (5.4.1), a condição de extremidade livre é portanto

$$\boxed{F_y(0, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0} \quad \text{para qualquer } T \quad (5.6.7)$$

o que significa que a tangente à corda na extremidade permanece sempre horizontal.

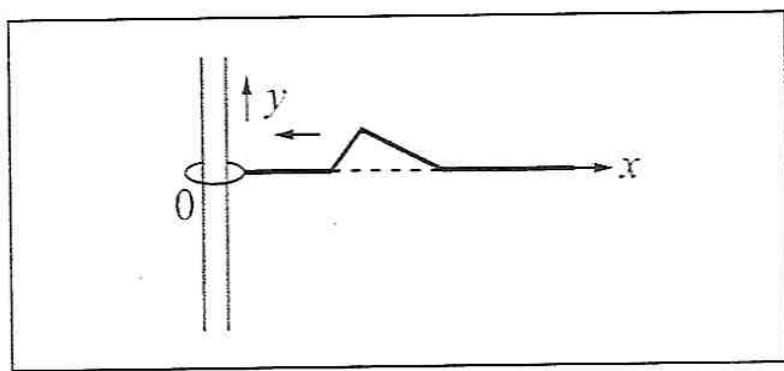


Figura 5.21 — Extremidade livre

A Fig. 5.21 mostra uma forma de realizar na prática esta condição: a extremidade da corda fica presa a um anel de massa desprezível, que desliza livremente (sem atrito!) sobre uma haste vertical, de modo que $F_y = 0$, embora a corda continue distendida com tensão T .

Consideremos agora o pulso (5.6.1) incidente sobre a extremidade livre. Substituindo a solução geral (5.6.3) na condição de contorno (5.6.7), vem

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = f'(-vt) + g'(vt) = 0 \quad \text{para qualquer } t \quad (5.6.8)$$

onde f' indica a derivada de f em relação ao argumento. Para que a (5.6.8) seja satisfeita, basta tomar a função incógnita $f(x')$ dada por

$$f(x') = g(-x') \quad (5.6.9)$$

Com efeito, derivando ambos os membros em relação a x' , isto dá

$$f'(x') = -g'(-x')$$

o que satisfaz a (5.6.8).

Substituindo por $x' - vt$ e levando na (5.6.3), obtemos a solução do problema:

$$y(x, t) = g(vt + x) + g(vt - x) \quad (5.6.10)$$

que só difere da (5.6.6) pelo sinal do 2º termo: numa extremidade livre, um pulso é refletido sem mudança de fase.

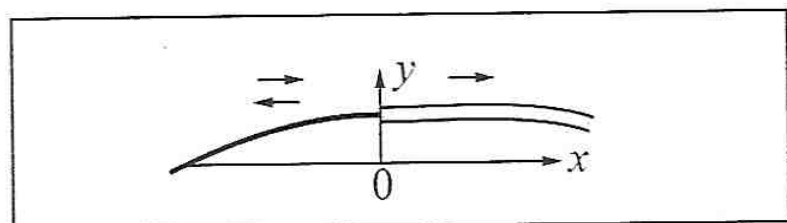


Figura 5.22 — Junção de duas cordas

Podemos considerar também o que acontece quando uma onda atinge a junção entre duas cordas diferentes. Podemos ter, por exemplo, duas cordas de densidades diferentes, $\mu_1 \neq \mu_2$, sujeitas à mesma tensão T , que se juntam em $x = 0$ (Fig. 5.22). Pela (5.3.6), as velocidades de propagação de ondas nas duas cordas

serão diferentes. Se uma onda incide sobre a junção vindo da esquerda, temos neste caso uma *onda refletida* na corda da esquerda, mas também uma *onda transmitida* na corda da direita. Fenômenos deste tipo (reflexão e transmissão parciais) ocorrem sempre que uma onda encontra uma *descontinuidade* no meio em que se propaga. As amplitudes das ondas refletida e transmitida para uma dada onda incidente, no exemplo acima, podem ser obtidas a partir das condições de contorno para $x = 0$, que exprimem a continuidade do deslocamento e da força de retorno nesse ponto.

5.7 — Modos normais de vibração

Vamos considerar agora uma corda vibrante de comprimento finito l , presa em ambas as extremidades. Em lugar de analisar o movimento da corda em termos de ondas progressivas que se refletem nas extremidades fixas, é mais conveniente descrevê-lo em termos de ondas estacionárias, que correspondem aos modos normais (veremos depois a relação entre as duas descrições).

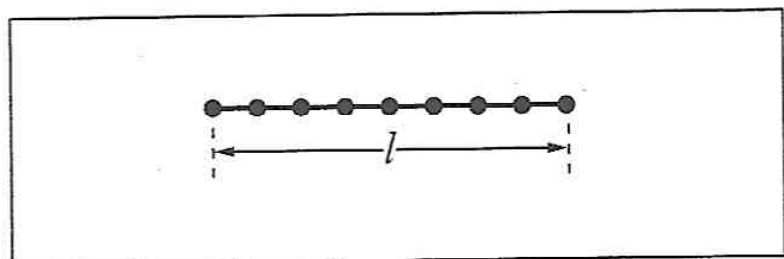


Figura 5.23 — Corda como limite de osciladores acoplados

Os modos normais de vibração da corda consti-

tuem uma generalização dos modos normais de osciladores acoplados, discutidos na Seção 4.6. De fato, como foi mostrado por Lagrange em 1759, podemos considerar a corda como caso limite de um sistema de N osciladores acoplados (Fig. 5.23), de massas $\mu l/N$ e comprimento total l , igualmente espaçados, quando $N \rightarrow \infty$. Os modos normais de vibração deste sistema tendem aos da corda, neste limite.

A condição de que as duas extremidades da corda permaneçam fixas se exprime pelas condições de contorno

$$\boxed{y(0, t) = y(l, t) = 0} \quad \text{para qualquer } t \quad (5.7.1)$$

Como acontece para sistemas de N partículas (Seção 4.6), um modo normal se caracteriza pelo fato de que todos os elementos da corda oscilam com a mesma frequência ω e mesma constante de fase δ , ou seja, têm a mesma dependência temporal, da forma $\cos(\omega t + \delta)$. Cada ponto x oscila com amplitude $A(x)$ característica do modo, ou seja, y é o produto de uma função de x por uma de t ,

$$\boxed{y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta)} \quad (5.7.2)$$

o que corresponde a uma onda estacionária (Seção 5.5).

Como $y(x, t)$ deve ser solução da equação de ondas (5.2.24), obtemos, substituindo a (5.7.2),

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \delta)$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}} \quad (5.7.3)$$

A solução geral da (5.7.3) é (cf. 3.2.15)

$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (5.7.4)$$

Entretanto, para que a (5.7.2) satisfaça as condições de contorno (5.7.1), é preciso que se tenha

$$A(0) = A(l) = 0 \quad (5.7.5)$$

Pela (5.7.4), a primeira destas condições dá

$$A(0) = a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x) = b \sin(kx) \end{array} \right. \quad (5.7.6)$$

e a segunda condição dá então

$$A(l) = b \sin(kl) = 0 \quad (5.7.7)$$

Como $b \neq 0$ (caso contrário $y \equiv 0$), esta condição só pode ser satisfeita para valores discretos k_n da variável k , dados por

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)} \quad (5.7.8)$$

(Note que $n = 0$ também daria $y \equiv 0$, e $n = -1, -2, \dots$ não dão nada de novo; y apenas troca de sinal, o que pode ser absorvido pela constante de fase na (5.7.2): $\delta \rightarrow \delta + \pi$.)

Os valores correspondentes de ω [cf. (5.7.3)] são as frequências dos modos normais de vibração:

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l} v \quad (5.7.9)$$

Levando nas (5.7.6) e (5.7.2), obtemos finalmente as expressões dos *modos normais de vibração*

$$y_n(x, t) = b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.7.10)$$

Vemos que são ondas estacionárias, análogas às que foram consideradas na Seção. 5.5(b). O comprimento de onda λ_n , associado ao modo n é

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.7.11)$$

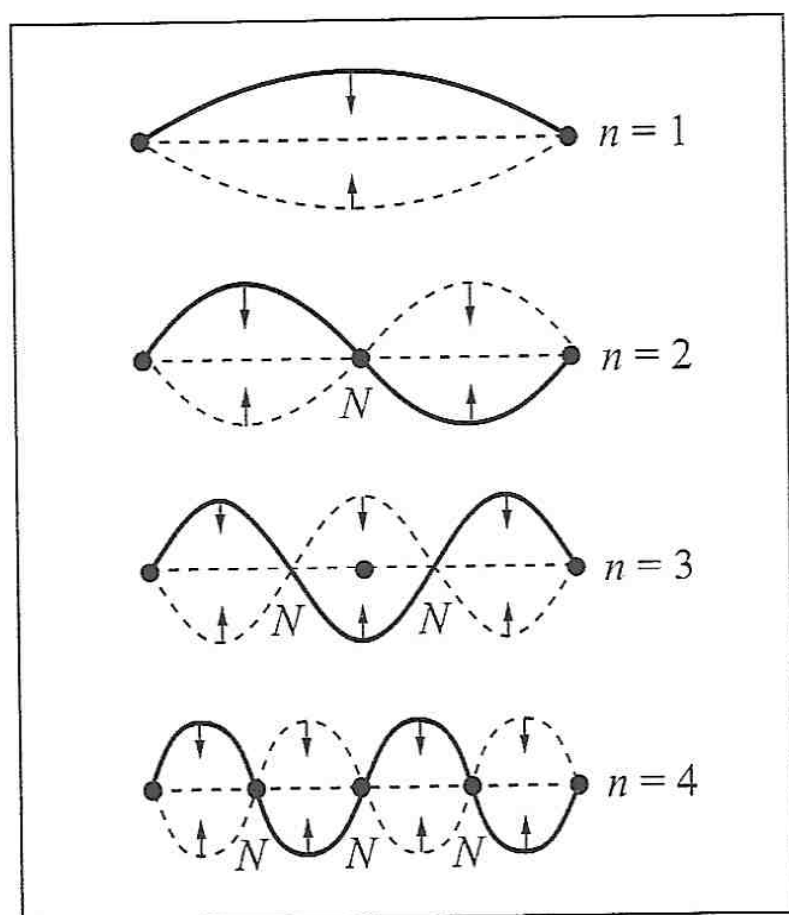


Figura 5.24 — Modos normais de vibração

Os modos de vibração mais baixos estão ilustrados na Fig. 5.24. O modo de ordem n contém precisamente n semicomprimentos de onda e tem $(n - 1)$ nodos (pontos N) além dos extremos fixos. A Fig. 5.24 deve ser comparada com as 4.21 e 4.22, que podem ser consideradas como aproximações dos modos mais baixos pelos modos de um sistema de um número finito de osciladores acoplados: para 2 osciladores, obtemos aproximações dos 2 modos mais baixos; para 4, temos 4 modos, que aproximam os com $n = 1$ até 4 da corda contínua (aproximando melhor os 2 primeiros que com 2 osciladores), e assim por diante.

Para N osciladores acoplados, há N modos normais de vibração transversal na direção y . A corda contínua corresponde ao limite $N \rightarrow \infty$, de forma que se obtêm *infinitos* modos normais (infinitude discreta: $n = 1, 2, 3, \dots$). A frequência ν_n , do modo n é

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{v}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.7.12)$$

Por conseguinte, utilizando a (5.3.6),

$$\nu_n = n \nu_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.7.13)$$

$$\nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{T/\mu}$$

As frequências são *múltiplos inteiros* da frequência ν_1 do modo mais baixo, que se chama o *modo fundamental*. A frequência $\nu_n = n \nu_1$ do modo n chama-se o *n -ésimo harmônico* da frequência ν_1 .

A expressão (5.7.13) de ν_1 engloba as *leis das cordas vibrantes*, descobertas experimentalmente por Mersenne em 1636: A frequência fundamental é: (i) inversamente proporcional ao comprimento da corda; (ii) proporcional à raiz quadrada da tensão; (iii) inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear de massa da corda.

Estes resultados têm aplicações importantes em todos os instrumentos musicais de cordas, conforme veremos mais adiante.

O fato de que *ondas confinadas numa região limitada do espaço só podem oscilar em frequências bem definidas, que formam um conjunto discreto* (embora haja infinitas frequências possíveis) é uma característica geral, extremamente importante, do movimento ondulatório: os modos normais de vibração de uma corda presa nos extremos constituem o exemplo mais simples deste resultado.

5.8 — Movimento geral da corda e análise de Fourier

Quando analisamos os modos normais para dois osciladores acoplados, vimos que o movimento geral do sistema, dado pela (4.6.13), é uma superposição dos modos normais, com amplitudes e fases determinadas pelas condições iniciais. Conforme foi mencionado, o mesmo vale para N osciladores acoplados: neste caso, há N modos transversais na direção y , cada um dependente de duas constantes arbitrárias, o que permite satisfazer as $2N$ condições iniciais.

Como vemos pela (5.7.10), cada modo normal da corda vibrante depende de duas constantes arbitrárias, b_n e δ_n . Considerando a corda contínua como limite de N osciladores acoplados para $N \rightarrow \infty$, é de se esperar que o *movimento geral de uma corda vibrante presa nos extremos seja uma superposição de todos os modos normais*, ou seja, uma *série infinita*

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right) \quad (5.8.1)$$

Pelo *princípio de superposição* (Seção 5.3), a (5.8.1), como combinação linear de soluções da equação de ondas, é solução da equação de ondas, desde que a série seja convergente. Supondo que seja lícito derivar a série termo a termo, obtemos a expressão da velocidade,

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} v\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right) \quad (5.8.2)$$

Para satisfazer as condições iniciais, cuja expressão geral é dada pela (5.3.9), é preciso ajustar as constantes b e δ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) de tal forma que seja

$$\begin{aligned} y(x, 0) = y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \end{aligned} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (5.8.3)$$

onde, pelas (5.8.1) e (5.8.2),

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \cos \delta_n \\ d_n &= -\frac{n\pi v}{l} b_n \sin \delta_n \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

e o deslocamento inicial da corda $y_0(x)$ e sua velocidade inicial $y_1(x)$ são duas funções “arbitrárias” no intervalo $0 \leq x \leq l$.

Pelas (5.8.4), a determinação de b_n e δ_n , é equivalente à de c_n e d_n (verifique!), de modo que o problema se reduz ao obter os *coeficientes de expansão* c_n e d_n , nas expansões em série

(5.8.3) das funções dadas pelas condições iniciais. Como ambas estas expansões são do mesmo tipo, basta discutir uma delas, por exemplo, a de $y_0(x)$.

O resultado “físico” a que somos levados a partir do tratamento de N osciladores acoplados, quando passamos ao limite $N \rightarrow \infty$, é que deve ser possível expandir qualquer função $y_0(x)$, dada para $0 \leq x \leq l$, numa série do tipo (5.8.3). Diversos grandes matemáticos do século 18, como Euler, Bernoulli e Lagrange, não ousaram formular uma conclusão tão geral, em parte, devido às limitações que tinha naquela época o próprio conceito de função. A primeira formulação geral do resultado é devida a Fourier, que o enunciou em 1807. Este problema desempenhou um papel central na história da matemática.

Uma série do tipo (5.8.3) chama-se *série de Fourier* ou *série trigonométrica*. Fourier mostrou que é possível calcular explicitamente os *coeficientes de Fourier* c_n em termos da função $y_0(x)$ que se está expandindo. A fórmula explícita, que não poderemos demonstrar aqui, é a seguinte:

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.8.5)$$

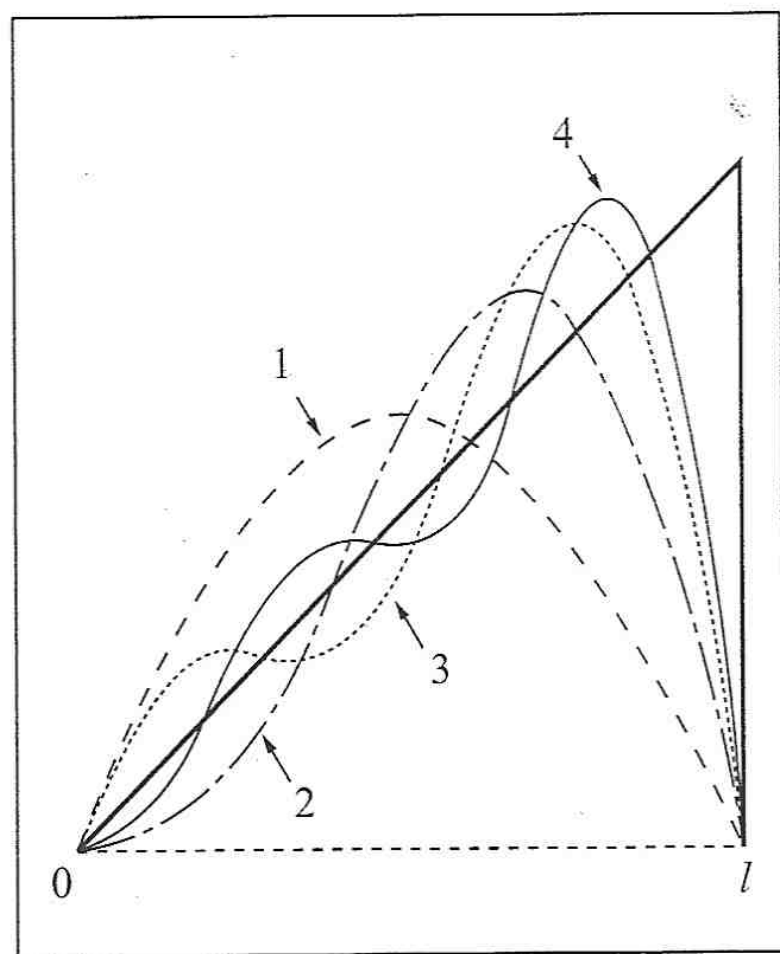


Figura 5.25 — Aproximações de Fourier de uma função triangular

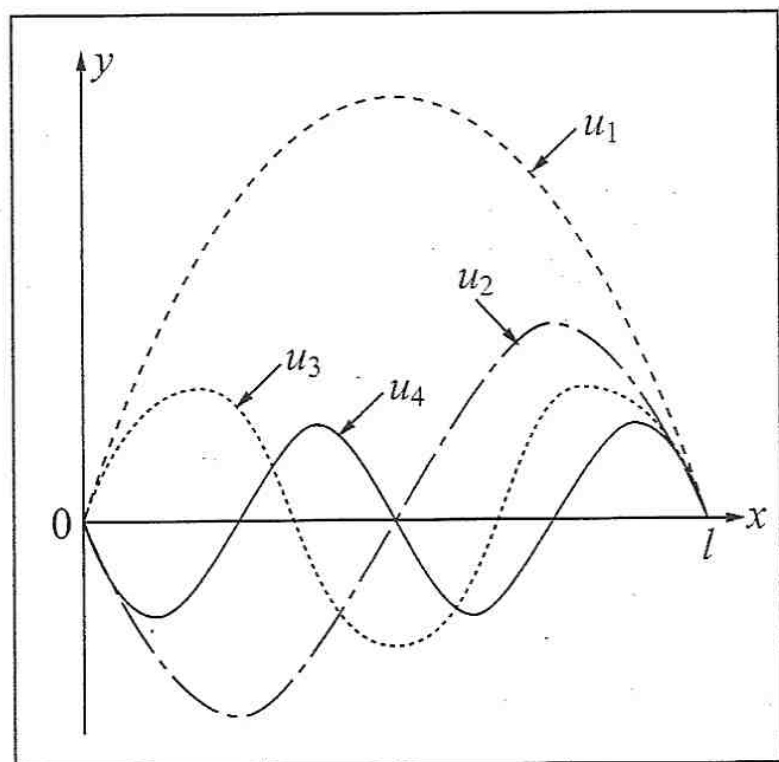


Figura 5.26 — Componentes de Fourier na Fig. 5.25

e analogamente para d_n em termos de $y_1(x)$.

É possível expandir em série de Fourier mesmo funções que têm descontinuidades, embora a convergência da série seja mais lenta e irregular num ponto de descontinuidade. A Fig. 5.25 mostra um exemplo, uma função “triangular” $y = x$ ($0 \leq x \leq l$) com uma descontinuidade em $x = l$, onde cai a zero (em linha cheia). Vemos também na Fig. a aproximação de y pelo 1.º termo u_1 da série de Fourier (curva 1), pelas somas $u_1 + u_2$ dos dois primeiros termos (curva 2), $u_1 + u_2 + u_3$ dos 3 primeiros termos (curva 3) e $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ dos 4 primeiros termos (curva 4).

A Fig. 5.26 mostra os gráficos de u_1 , u_2 , u_3 e u_4 .

Quando maior o número de termos da série, melhor a aproximação, mas a convergência é mais lenta e complicada no ponto de descontinuidade.

Pode-se mostrar [cf. (5.4.8)] que a energia contida no modo n na (5.8.1) é proporcional a b_n^2 , ou seja, ao quadrado da amplitude do modo. Além disso, a energia total de oscilação da corda no movimento geral (5.8.1) é a soma das energias distribuídas pelos diferentes modos, ou seja, cada modo oscila “na sua”, sem termos de interferência. Não podemos demonstrar aqui estes resultados, que dependem de um conhecimento mais aprofundado da teoria das séries de Fourier.

As expansões em série de Fourier constituem uma das ferramentas centrais da física teórica. O problema da corda vibrante presa nos extremos é um dos exemplos mais simples de um “problema de contorno”, e expansões em termos de conjuntos infinitos de modos normais são tipicamente encontradas na resolução desses problemas.

Voltando à (5.8.1), fixemos nossa atenção agora no deslocamento de um dado ponto x_0 da corda como função do tempo, que é dado por

$$y(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(2\pi v_n t + \delta_n) \quad (5.8.6)$$

onde v_n é a frequência do modo n , dada pela (5.7.11), e

$$B_n = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \quad (5.8.7)$$

são coeficientes constantes, uma vez fixado x_0 .

A (5.8.6) também é uma expansão de Fourier na variável tempo t , que, ao contrário de x , não se restringe a um intervalo finito. Entretanto, a (5.8.6) não representa uma função arbitrária de t : representa uma *função periódica do tempo*, com período

$$\tau_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{2l}{v} \quad (5.8.8)$$

que é o período do *modo fundamental* da corda (5.7.12). Com efeito, como $v_n = nv_1$, temos

$$2\pi v_n(t + \tau_1) = 2\pi v_n t + 2\pi v_n \tau_1 = 2\pi v_n t + 2\pi n$$

de forma que o período τ_1 é comum a todos os termos da (5.8.6). Os valores da (5.8.6) fora do intervalo $0 \leq t \leq \tau_1$, são portanto a repetição periódica dos valores assumidos nesse intervalo.

Por que motivo o movimento de um ponto qualquer da corda é periódico, com período τ_1 ? Podemos compreender este resultado analisando as ondas estacionárias que constituem um modo normal como resultantes da interferência de ondas progressivas em sentidos opostos (Seção. 5.5(b)). A (5.7.10) pode ser escrita

$$y_n(x, t) = \frac{1}{2} b_n \sin[k_n(x - vt) - \delta_n] + \frac{1}{2} b_n \sin[k_n(x + vt) + \delta_n] \quad (5.8.9)$$

Substituindo esta expressão do modo n na (5.8.1), vemos que a solução geral é da forma (5.3.10), como deveria ser.

Suponhamos que se tenha uma dada condição inicial na corda; por exemplo, que a situação seja a do exemplo da pg. 106. Conforme mostra a Fig. 5.12, o pulso triangular inicial decompõe-se em dois, que viajam em sentidos opostos. Quando um destes pulsos atinge uma extremidade da corda, temos uma reflexão nesse extremo fixo. Como vimos na Seção 5.6, a onda refletida é uma imagem especular invertida do pulso incidente inicial. Esta imagem se propaga em sentido inverso até atingir a outra extremidade da corda, onde será novamente refletida. A segunda reflexão inverte novamente a imagem, ou seja, *recompõe o pulso inicial, propagando-se no sentido original*. Daí por diante, tudo se repete periodicamente.

Vemos portanto que o *movimento geral da corda é periódico no tempo*, e que o período temporal é igual ao tempo que uma onda progressiva leva para percorrer uma distância igual ao dobro do comprimento da corda, ou seja, é dado por $2l/v = \tau_1$, como na (5.8.8). Isto explica o resultado obtido.

Outras propriedades importantes do movimento ondulatório, incluindo a propagação de ondas em mais de uma dimensão, serão discutidas no próximo capítulo, em conexão com as ondas sonoras.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 5

1. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima. (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda. (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade. (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.
2. A mesma corda descrita no Problema 1 está com uma extremidade amarrada num poste. A outra, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio, é deslocada de 10 cm para cima, com velocidade uniforme, entre $t = 0$ e $t = 0,5$ s. A seguir, é deslocada para baixo, com a magnitude da velocidade reduzida à metade da anterior, entre $t = 0,5$ s e $t = 1,5$ s, quando retorna à posição de equilíbrio. (a) Desenhe a forma da corda no instante $t = 1,7$ s. (b) Desenhe a forma da corda no instante $t = 2,6$ s.
3. Mede-se a velocidade v de propagação de ondas transversais num fio com uma extremidade presa a uma parede, que é mantido esticado pelo peso de um bloco suspenso da outra extremidade através de uma polia. Depois (Fig. P.1), mergulha-se o bloco na água até os $2/3$ da altura e verifica-se que a velocidade de propagação cai para 95,5% da anterior. Qual é a densidade do bloco em relação à água?
4. (a) Mostre, diferenciando a expressão para a velocidade de propagação de ondas numa corda, que a variação percentual de velocidade $\Delta v/v$ produzida por uma variação percentual $\Delta T/T$ da tensão na corda é dada por $\Delta v/v = \frac{1}{2} \Delta T/T$. (b) Um afinador de pianos faz soar a nota lá de um diapasão, de frequência $\nu = 440$ Hz, para compará-la com a nota lá da escala média de um piano. Com ambas soando simultaneamente, ele ouve batimentos cuja intensidade máxima se repete a intervalos de 0,5 s. Que ajuste percentual ele deve fazer na tensão da corda do piano para afiná-la?
5. Desprezando efeitos de tensão superficial, pode-se mostrar que ondas na superfície da água, com comprimento de onda λ muito menor que a profundidade da água, propagam-se com velocidade de fase v_ϕ dada por $v_\phi = \sqrt{(g\lambda)/(2\pi)}$ onde g é a aceleração da gravidade.

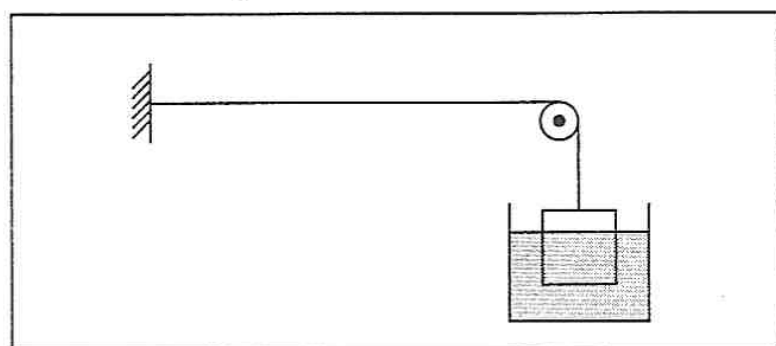


Figura P.1

- Mostre que a velocidade de grupo correspondente é $v_g = \frac{1}{2} v_\phi$.
6. Duas ondas transversais de mesma frequência $\nu = 100 \text{ s}^{-1}$ são produzidas num fio de aço de 1 mm de diâmetro e densidade 8 g/cm^3 , submetido a uma tensão $T = 500 \text{ N}$. As ondas são dadas por

$$y_1 = A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y_2 = 2A \sin(\omega t - kx)$$

onde $A = 2 \text{ mm}$. (a) Escreva a expressão da onda harmônica progressiva resultante da superposição dessas duas ondas. (b) Calcule a intensidade da resultante. (c) Se fizemos variar a diferença de fase entre as duas ondas, qual é a razão entre os valores máximo e mínimo possíveis da intensidade da resultante?

7. A corda mi de um violino tem uma densidade linear de 0,5 g/m e está sujeita a uma tensão de 80 N, afinada para uma frequência $\nu = 660$ Hz. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Para tocar a nota lá da escala seguinte, de frequência 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual é o valor de f ?
8. Uma corda de comprimento l está distendida, com uma extremidade presa a um suporte e a outra extremidade livre. (a) Ache as frequências ν_n dos modos normais de vibração da corda. (b) Desenhe a forma da corda associada aos três modos de vibração mais baixos (em ordem de frequência crescente). A velocidade de ondas na corda é v .
9. Considere novamente a corda do problema 8, com um extremo fixo e outro livre e de comprimento l . No instante $t = 0$, um pequeno pulso de forma triangular está-se propagando para a direita na corda. Depois de quanto tempo a corda voltará à configuração inicial?
10. Uma corda vibrante de comprimento l , presa em ambas as extremidades, está vibrando em seu n -ésimo modo normal, com deslocamento transversal dado pela (5.7.10). Calcule a energia total de oscilação da corda. *Sugestão:* Considere um instante em que a corda esteja passando pela posição de equilíbrio, de modo que sua energia total de oscilação esteja em forma puramente cinética. Calcule a densidade linear de energia cinética e integre sobre toda a corda.
11. Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares diferentes μ_1 e μ_2 , estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo dos x e a origem O no ponto de junção, sendo y o deslocamento transversal da corda (Fig. P.2). Uma onda harmônica progressiva, $y_i = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$, viajando na corda 1 ($x < 0$), incide sobre o ponto de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular ω . Isto produz na corda 2 ($x > 0$) uma onda progressiva de mesma frequência, $y_t = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$ (onda transmitida), e dá origem na corda 1, a uma onda que viaja em sentido contrário, $y_r = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$ (onda refletida). Dada a onda incidente y_i , de amplitude A_1 , desejam-se obter a amplitude de reflexão $\rho = B_1/A_1$, e a amplitude de transmissão $\tau = A_2/A_1$. (a) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2 . O deslocamento total na corda 1 é $y_i + y_r$, e na corda 2 é y_t . (b) Mostre que, no ponto de junção $x = 0$, deve-se ter $y_i + y_r = y_t$. (c) Aplicando a 3ª lei de Newton ao ponto de junção $x = 0$, mostre que, nesse ponto, deve-se ter também $(\partial/\partial x)(y_i + y_r) = (\partial/\partial x) y_t$. (d) A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão ρ e τ em função das velocidades v_1 e v_2 . Discuta o sinal de ρ .
12. No problema 11, a refletividade r da junção é definida como a razão da intensidade da onda refletida para a intensidade da onda incidente, e a transmissividade t como a razão da intensidade transmitida para a incidente. (a) Calcule r e t . (b) Mostre que $r + t = 1$, e interprete esse resultado.

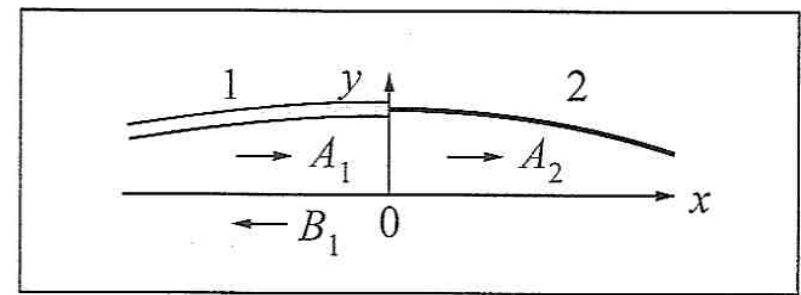


Figura P.2

6.1 — Natureza do som

O fato de que corpos em vibração produzem sons é familiar na experiência cotidiana. Para que o efeito atinja nossos ouvidos, ele precisa ser transmitido através de um meio material. O som de uma campainha tocando dentro de um recipiente no qual se produz o vácuo deixa de ser ouvido, conforme observado por Robert Boyle em 1660.

O som se propaga em fluidos, tanto na atmosfera como em líquidos: sons continuam audíveis debaixo da água. Também se propaga em sólidos: colando o ouvido à terra, pode-se detectar um tropel de cavalos distante.

Oscilações harmônicas podem produzir sons audíveis pelo ouvido humano somente num intervalo limitado de frequência, aproximadamente entre 20 Hz e 20 KHz (um bom aparelho de som deve ser capaz de reprodução fiel dentro dessa faixa).

O fato de que o som se propaga através de um meio material, sem que haja transporte de matéria de um ponto a outro, já é uma indicação de sua *natureza ondulatória*. A *velocidade finita de propagação* do som é evidenciada pelo intervalo de tempo decorrido entre o clarão de um relâmpago e o ruído do trovão que o acompanha. A *reflexão* do som também é um efeito familiar, manifestado na produção de ecos.

Efeitos tipicamente ondulatórios obtidos com o som incluem efeitos de *interferência*, tais como os *batimentos*, e também de *difração*, conforme veremos mais adiante.

Podemos inferir dessas observações que a transmissão do som através da atmosfera corresponde à *propagação de ondas*. Qual é a natureza destas ondas?

Um fluido como a atmosfera não pode transmitir tensões tangenciais, de modo que as ondas sonoras na atmosfera são *ondas longitudinais*, associadas a *variações de pressão*, ou seja, a *compressões e rarefações*, como as ondas ao longo de uma mola consideradas na p. 98.

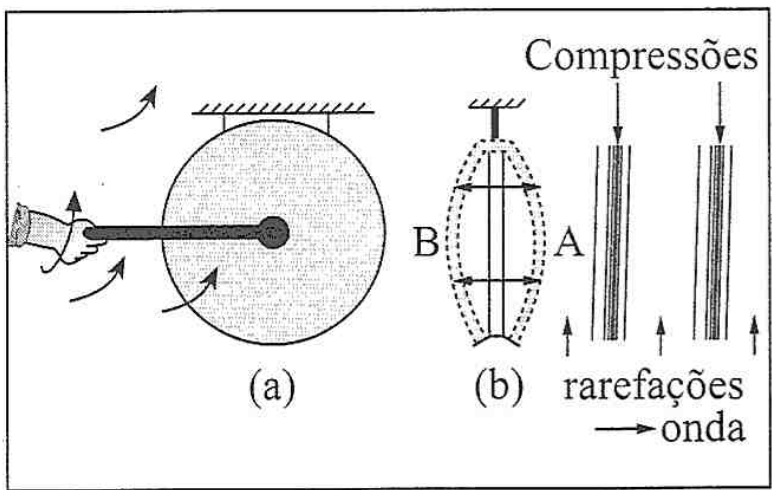


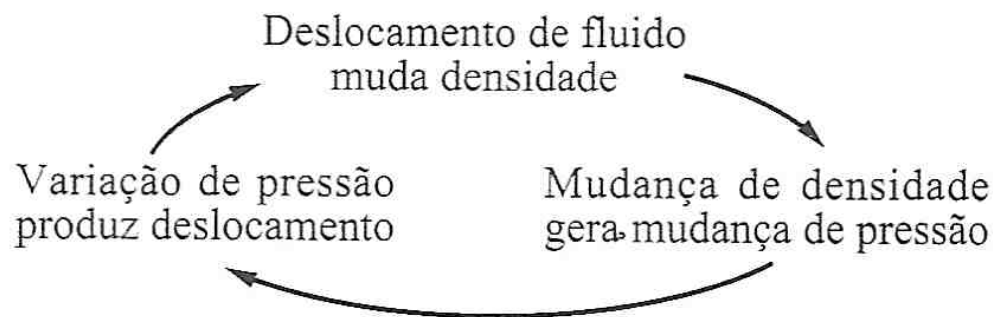
Figura 6.1 — Gongo percutido

Em geral, conforme vamos ver, essas variações são *extremamente pequenas* quando comparadas com a pressão atmosférica (valor de equilíbrio).

Podemos obter uma idéia intuitiva do mecanismo de propagação de uma onda sonora considerando o que acontece quando se golpeia um gongo (Fig. 6.1(a)). A Fig. 6.1(b) mostra, numa vista lateral, como o gongo se deforma, vibrando entre as posições extremas A e B (as deflexões da placa estão grandemente exageradas na figura).

Quando o gongo está na posição A, ele comprime as porções adjacentes da atmosfera, e a compressão vai-se transmitindo sucessivamente de cada camada às camadas adjacentes (onda de compressão). Quando o gongo retorna para trás, passando à posição B, cria-se uma zona de rarefação, e o ar da região contígua se desloca para preenchê-la, e assim sucessivamente, produzindo uma onda de expansão. A onda sonora resulta da propagação das camadas de condensação e de rarefação alternadas.

O deslocamento de ar provocado pelo gongo muda a densidade do ar na camada adjacente (condensação ou rarefação), o que provoca uma mudança de pressão (compressão ou descompressão). Por sua vez, a variação de pressão produz o deslocamento da camada de ar contígua, e assim por diante. O mecanismo dinâmico de propagação da onda pode portanto ser sintetizado no seguinte ciclo:



Vamos agora traduzir esta descrição qualitativa num tratamento quantitativo do processo.

6.2 — Ondas sonoras

(a) Relação densidade — pressão

Para uma dada mudança de densidade, qual é a mudança de pressão correspondente?

Geralmente, para uma dada massa de fluido M ocupando um volume V , um *acréscimo* de pressão ($\Delta P > 0$) provoca uma *diminuição* ($\Delta V < 0$) de volume. A *magnitude* da *variação percentual* de volume correspondente é $-\Delta V/V$, e a razão (para variações infinitesimais)

$$K = -\frac{\Delta V / V}{\Delta P} \quad (6.2.1)$$

chama-se o *módulo de compressibilidade* do fluido. Quanto mais compressível ele for, maior a variação percentual de volume provocada por uma dada variação de pressão, e por conseguinte maior será o valor de K .

O *inverso* B de K chama-se *módulo de elasticidade volumétrico*:

$$B = \frac{1}{K} = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} \quad (6.2.2)$$

A *densidade* ρ do fluido é

$$\rho = M / V \quad (6.2.3)$$

de modo que a variação de densidade correspondente é, por diferenciação,

$$\Delta \rho = -M \frac{\Delta V}{V^2} = -\rho \frac{\Delta V}{V} \quad (6.2.4)$$

Assim, a (6.2.2) se escreve

$$B = \rho \left(\frac{\Delta P}{\Delta \rho} \right) \quad (6.2.5)$$

Numa onda sonora, as *variações de pressão e densidade* são extremamente pequenas em relação aos valores de equilíbrio dessas grandezas, ou seja, a onda constitui uma pequena perturbação.

Se chamarmos de p_0 e ρ_0 os valores não perturbados (de equilíbrio) da pressão e da densidade, respectivamente, e de P e ρ os valores na presença da onda, temos então

$$\boxed{\begin{array}{l} P = p_0 + p \\ \rho = \rho_0 + \delta \end{array}} \quad (6.2.6)$$

onde

$$\boxed{|p| \ll p_0, \quad |\delta| \ll \rho_0} \quad (6.2.7)$$

Assim, a variação de pressão máxima que nosso ouvido pode tolerar sem provocar sensação de dor, numa onda sonora, é inferior a um milésimo da pressão atmosférica: $|p/p_0| < 10^{-3}$.

Podemos portanto, com excelente aproximação, escrever

$$\boxed{\frac{p}{\delta} = \frac{P - p_0}{\rho - \rho_0} = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0} \quad (6.2.8)$$

onde o índice 0 indica que a derivada é calculada em torno dos valores de equilíbrio. A razão pela qual escrevemos uma derivada parcial é que a pressão depende não só da densidade, como também da temperatura.

A relação entre a pressão P , a densidade ρ (ou o volume V) e a temperatura T , num fluido em equilíbrio, é dada pela *equação de estado* do fluido. Para um *gás ideal*, por exemplo, temos a bem conhecida *lei dos gases perfeitos* (Sec. 9.1) como equação de estado:

$$PV = nRT \quad (6.2.9)$$

onde n é a massa de gás em moles e R é a constante universal dos gases, conforme veremos mais adiante (Termodinâmica). Para um *processo isotérmico* (ou seja, a temperatura constante) num gás ideal, portanto, a pressão P é diretamente proporcional à densidade ρ :

$$\boxed{P = a\rho} \quad (\text{isotérmico}) \quad (6.2.10)$$

onde a é proporcional a T , e por conseguinte é constante num processo isotérmico. Logo,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = a = \frac{P}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T,0} = \frac{P_0}{\rho_0} \right\} \quad (\text{isotérmico}) \quad (6.2.11)$$

onde, o índice T significa que a *temperatura é mantida constante* durante o processo de compressão ou expansão.

Para que a temperatura de uma dada massa de gás se mantenha constante durante um tal processo, é preciso que haja trocas de calor com o meio ambiente externo. Se tais trocas não se realizam, seja porque o gás está termicamente isolado, seja porque a compressão ou expansão é relativamente rápida e não dá tempo para haver trocas de calor, a temperatura varia. Assim por exemplo, quando se enche a câmara de ar de um pneu de bicicleta, bombeando rapidamente, a temperatura aumenta.

Num *processo adiabático*, em que não há trocas de calor, veremos mais adiante (Cap. 9, (9.4.9)) que a relação entre P e ρ é

$$\boxed{P = b\rho^\gamma} \quad (\text{adiabático}) \quad (6.2.12)$$

onde b e γ são constantes. Conforme veremos, γ é a razão do calor específico do gás a pressão constante ao seu calor específico a volume constante; geralmente é $\gamma > 1$: por exemplo, para o ar, $\gamma \approx 1,4$. A (6.2.12) dá

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = b\gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho \quad (6.2.13)$$

onde o índice S significa que o processo é *adiabático e reversível* [cf. (10.7.11)]. Logo, em equilíbrio,

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s,0} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \quad (\text{adiabático}) \quad (6.2.14)$$

Como $\gamma > 1$, vemos por comparação da (6.2.14) com a (6.2.11) que, para produzir uma dada elevação de densidade $\Delta\rho$, é preciso uma elevação maior de pressão ΔP no caso adiabático que no caso isotérmico, o que se explica pelo fato de que ΔP também produz uma elevação de temperatura no primeiro caso.

Identificando $\Delta P/\Delta\rho$ com $\partial P/\partial\rho$ na (6.2.5) e comparando com as (6.2.11) e (6.2.14), obtemos os valores correspondentes do módulo de elasticidade volumétrica do gás:

$$B_T = P_0 = 1/K_T; \quad B_S = \gamma P_0 = 1/K_S \quad (6.2.15)$$

onde os índices T indicam os módulos isotérmicos e os índices S os módulos adiabáticos. Vemos que o módulo de elasticidade isotérmico de um gás é igual à pressão do gás.

(b) Relação deslocamento — densidade

Qual é a relação entre variações de densidade e deslocamento do fluido?

Para discutir mais este elo no ciclo indicado na pg. 123, vamo-nos limitar a uma *onda unidimensional*, propagando-se dentro de um tubo cilíndrico cuja secção transversal tem área A . Vamos tomar o eixo Ox ao longo do eixo do tubo, que coincide com a direção de propagação da onda.

Seja $u(x, t)$ o *deslocamento* sofrido pelas partículas do fluido na secção transversal de coordenada x no instante t . O volume original (antes do deslocamento) do fluido compreendido entre as secções x e $x + \Delta x$ é

$$V = A[(x + \Delta x) - x] = A\Delta x \quad (6.2.16)$$

Após o deslocamento, o volume passa a ser (Fig. 6.2), tomando Δx infinitésimo,

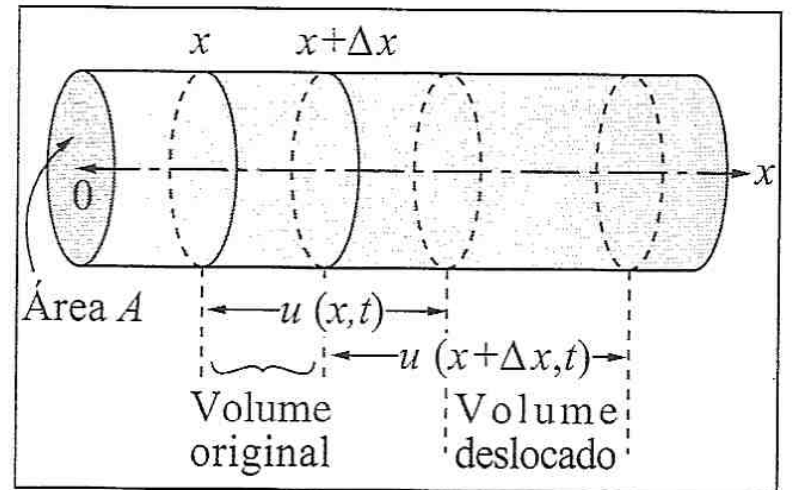


Figura 6.2 — Variação de volume

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= A\{[(x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t)] - [x + u(x, t)]\} \\ &= A\{\Delta x + [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]\} \\ &= A\Delta x \left\{ 1 + \underbrace{\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}}_{\approx \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)} \right\} \approx A\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

o que dá

$$\Delta V = A \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (6.2.17)$$

Dividindo membro a membro pela (6.2.16), obtemos

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (6.2.18)$$

Levando em conta as (6.2.4) e (6.2.6), a variação de densidade correspondente é

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{\delta}{\rho} \approx \frac{\delta}{\rho_0}$$

de modo que, finalmente,

$$\boxed{\delta = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)} \quad (6.2.19)$$

é a variação de densidade associada à onda de deslocamento.

O sinal da (6.2.19) se explica de imediato: se o deslocamento cresce com x ($\partial u / \partial x \geq 0$), produz-se uma rarefação ($\delta < 0$), conforme deveria ser.

(c) Relação pressão — deslocamento

Completando o ciclo da pág. 123, vejamos finalmente de que forma variações de pressão produzem deslocamentos no fluido.

Consideremos novamente o elemento de volume do cilindro (Fig. 6.2) compreendido entre as secções x e $x + \Delta x$, cuja massa é

$$\Delta m = \rho \Delta V \approx \rho_0 A \Delta x \quad (6.2.20)$$

A pressão $P(x, t)$ sobre a face esquerda desse elemento produz uma força

$$\Delta F_1 = P(x, t) A$$

e a face direita está sujeita a uma força

$$\Delta F_2 = -P(x + \Delta x, t) A$$

dirigida para a esquerda.

A força resultante sobre Δm é

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = [P(x, t) - P(x + \Delta x, t)] A = -\underbrace{A \Delta x}_{\Delta V} \cdot \left[\underbrace{\frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x}}_{\approx \partial P / \partial x} \right]$$

ou seja, como $\partial P / \partial x = \partial p / \partial x$ pela (6.2.6),

$$\boxed{\Delta F = -\Delta V \frac{\partial p}{\partial x}(x, t)} \quad (6.2.21)$$

A aceleração do elemento de volume considerado no instante t é $\partial^2 u / \partial t^2(x, t)$. Logo, pela 2.ª lei de Newton, temos a equação de movimento

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta F = -A \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.2.22)$$

o que dá

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}} \quad (6.2.23)$$

que é a relação procurada. Esta equação de movimento é a versão unidimensional da (2.3.3), com $f = 0$.

(d) A velocidade do som

Podemos agora obter a equação de propagação das ondas sonoras, percorrendo o ciclo da pág. 123.

Pela (6.2.19), um deslocamento do fluido produz uma variação de densidade

$$\delta = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pela (6.2.8), esta variação de densidade produz uma variação de pressão

$$p = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \delta = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.2.24)$$

Finalmente, os deslocamentos gerados por esta variação de pressão obedecem à equação de movimento (6.2.23):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.2.25)$$

o que leva à equação de ondas

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (6.2.26)$$

com a velocidade de propagação dada por

$$\boxed{v = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_0}} \quad (6.2.27)$$

Esta é portanto a *velocidade do som* no fluido.

Derivando em relação a x ambos os membros da (6.2.26), vemos que

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

pois a ordem das derivadas parciais pode ser invertida. Comparando com as (6.2.19) e (6.2.24), obtemos

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \quad (6.2.28)$$

de modo que as variações de densidade e pressão também obedecem à mesma equação de onda, ou seja, propagam-se com a velocidade do som.

Velocidade do som em gases

Como vimos acima, o valor de $(\partial P / \partial \rho)_0$ num gás depende da natureza do processo de compressão ou expansão do gás. Se este processo for *isotérmico*, a (6.2.11) dá

$$\boxed{\sqrt{(\partial P / \partial \rho)_{0,T}} = \sqrt{P_0 / \rho_0}} \quad (6.2.29)$$

Este resultado para a velocidade de som num gás foi obtido por Newton e publicado nos “Principia”. Newton usou um modelo para a propagação do som análogo ao de oscilações numa série de molas acopladas. Note que, no tubo cilíndrico que estamos considerando, cuja secção transversal tem área A , a densidade *linear* de massa é $\mu = \rho_0 A$, e a força sobre a secção é $F = P_0 A$ (análogo da tensão T numa corda distendida), de modo que a (6.2.29) é igual a $\sqrt{F/\mu}$, o que deve ser comparado com a (5.3.6).

Nas condições normais de temperatura e pressão

$$(P_0 = 1 \text{ atm} \approx 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2, \quad T = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K})$$

a densidade do ar é $\rho_0 \approx 1,293 \text{ kg/m}^3$ e a (6.2.29) dá

$$\sqrt{P_0 / \rho_0} \approx 280 \text{ m/s} \quad (6.2.30)$$

ao passo que o valor experimental da velocidade do som no ar nessas condições é de 332 m/s, que é aproximadamente 1,186 vezes maior.

Com os dados experimentais disponíveis na época de Newton, a discrepância era de um fator $\approx 1.166 \approx 1 + \frac{1}{6}$. Para explicar a diferença, Newton fez o que freqüentemente faz o estudante que não encontra o valor esperado num trabalho de laboratório: “cozinhou” o resultado, inventando uma explicação inteiramente “ad hoc”, segundo a qual 1/9 do espaço seria ocupado por “partículas sólidas” (moléculas?) de ar, através das quais o som se transmitiria instantaneamente, e vapor de água presente no ar, na proporção 1:11, também não tomaria parte na propagação!

A explicação correta só foi dada por Laplace mais de um século depois, em 1816. As compressões e expansões numa onda sonora são tão rápidas que não dá tempo para que a temperatura se uniformize: não chega a haver trocas de calor, ou seja, o processo é *adiabático*.

Pela (6.2.14), temos então, substituindo na (6.2.27),

$$\boxed{v = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_{s,0}} = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}} \quad (6.2.31)$$

Para o ar, tem-se $\gamma \approx 1,4$, e o valor (6.2.30), multiplicado por $\sqrt{1,4}$ dá $v \approx 332 \text{ m/s}$ nas condições normais de temperatura e pressão, em excelente acordo com a experiência.

Para uma massa M de gás de massa molecular m , o número n de moles é $n = M/m$, de modo que a (6.2.9) se escreve

$$PV = \frac{M}{m} RT \left\{ P = \frac{M}{\underbrace{V}_{\rho}} \frac{RT}{m} \right\} \left\{ \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{m} \right. \quad (6.2.32)$$

Levando na (6.2.31),

$$v = \sqrt{\gamma RT/m} \quad (6.2.33)$$

Logo, a velocidade do som num gás é independente da pressão, mas cresce com a raiz quadrada da temperatura absoluta. Assim, à temperatura de 20°C (= 293 K), a velocidade do som no ar é de $\sqrt{293/273} \times 332 \text{ m/s} \approx 344 \text{ m/s}$.

Vemos também pela (6.2.33) que a velocidade do som é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa molecular do gás. À mesma temperatura, a velocidade do som no H₂ ($m \approx 2$) é aproximadamente 4 vezes maior que no O₂ ($m \approx 32$).

Velocidade do som na água

Quando submetido a uma pressão de 20 atm, o volume de 1 l de água, à temperatura ambiente, decresce de aproximadamente 0,9 cm³, o que corresponde a $-\Delta V/V \approx 0,09\% = 9 \times 10^{-4}$ para $\Delta P \approx 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, de modo que a (6.2.2) dá

$$B = 2,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

e a densidade da água é $\rho_0 \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$. As (6.2.27) e (6.2.5) dão

$$v = \sqrt{B/\rho_0} \quad (6.2.34)$$

de modo que, para a água, obtemos $v \approx \sqrt{2,2 \times 10^6} \text{ m/s} \approx 1.483 \text{ m/s}$, em excelente acordo com o resultado experimental.

Para ondas longitudinais num sólido, os valores típicos tanto de B como de ρ_0 são maiores; um valor típico de v é da ordem de 3.000 m/s.

6.3 — Ondas sonoras harmônicas. Intensidade

Uma onda sonora harmônica progressiva no tubo cilíndrico considerado na Fig. 6.2 corresponde a uma solução da (6.2.26) da forma da (5.2.10):

$$u(x, t) = U \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (6.3.1)$$

O comprimento de onda é

$$\lambda = v\tau = v/\nu \quad (6.3.2)$$

onde ν é a frequência, que para ondas sonoras audíveis varia entre $\sim 20 \text{ Hz}$ e $\sim 20 \text{ KHz}$. Como a velocidade do som no ar é da ordem de 340 m/s, vemos que λ varia, para sons audíveis no ar, entre $\sim 1,7 \text{ cm}$ e $\sim 17 \text{ m}$, ou seja, o comprimento de onda das ondas sonoras é da mesma ordem que dimensões macroscópicas típicas. Este fato é muito importante no tratamento da propagação das ondas sonoras.

A onda de pressão correspondente à onda de deslocamento (6.3.1) resulta das (6.2.24) e (6.2.27):

$$p(x, t) = -\rho_0 v^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = v^2 \delta(x, t) \quad (6.3.3)$$

onde $\delta(x, t)$, dado pela (6.2.19), representa a onda de variação de densidade. Substituindo na (6.3.1), obtemos

$$p(x, t) = \wp \text{ sen } (kx - \omega t + \delta) \quad (6.3.4)$$

onde

$$\wp = \rho_0 v^2 k U \quad (6.3.5)$$

é a amplitude de pressão correspondente à amplitude de deslocamento U (a amplitude de cada grandeza representa o valor máximo dessa grandeza na onda).

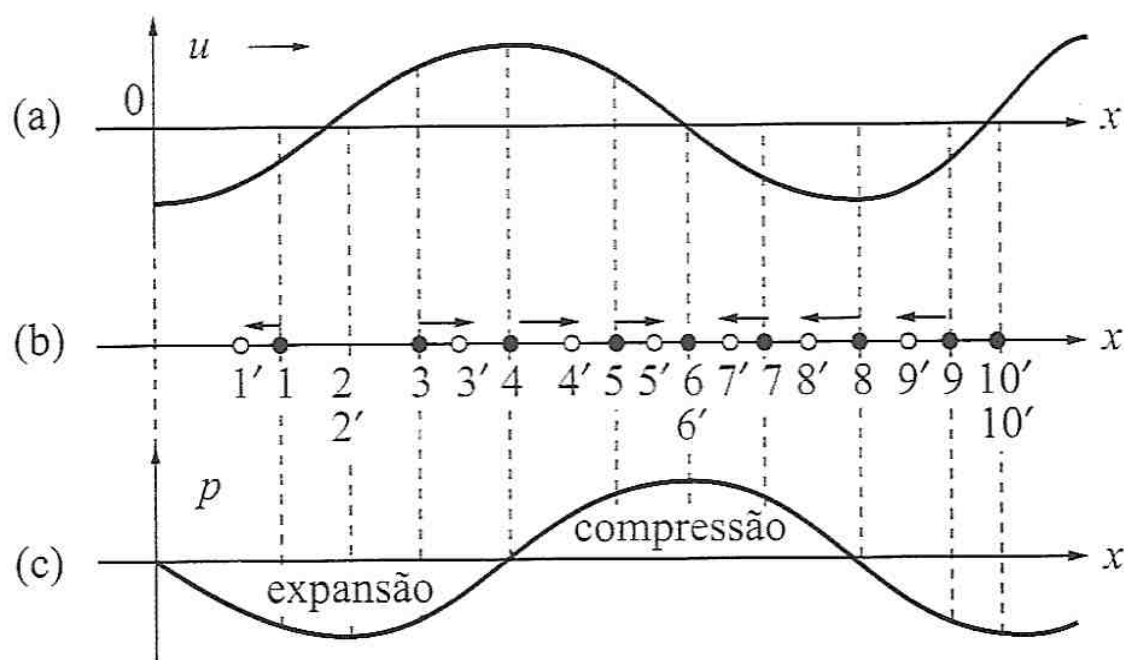


Figura 6.3 — Ondas de deslocamento e de pressão

para posições entre 1' e 3', correspondendo a uma expansão. As partículas entre 4 e 6 se deslocam para a direita, cada uma mais do que a seguinte (compressão), e entre 6 e 8 para a esquerda, cada uma menos do que a seguinte (também compressão). Os resultados em termos de expansões e compressões estão representados na Fig. (c) acima, que mostra a defasagem de 90° entre p e u .

Intensidade

Como no caso das ondas numa corda (Seção 5.4), uma onda progressiva de som num tubo transporta energia. Para uma onda harmônica, a *intensidade* é definida como a *energia média transmitida através da secção, por unidade de tempo e área*.

Para calcular a intensidade correspondente à (6.3.1), notemos que a força exercida sobre uma camada fluida na posição x devido à passagem da onda é, segundo a (6.3.4),

$$F = p(x, t)A = \wp A \text{ sen}(kx - \omega t + \delta) \quad (6.3.6)$$

e a potência instantânea é, pela (6.3.1),

$$F \frac{\partial u}{\partial t} = \omega A \wp U \text{ sen}^2(kx - \omega t + \delta) \quad (6.3.7)$$

Calculando a *potência média* com o auxílio da (4.2.5) e dividindo pela área A , obtemos a *intensidade* I da onda:

$$I = \frac{1}{A} \overline{F \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{2} \omega \wp U \quad (6.3.8)$$

Expressando \wp como função de U pela (6.3.5), onde $vk = \omega$ [cf. (5.2.9)], obtemos

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 U^2 \quad (6.3.9)$$

o que deve ser comparado com a (5.4.4): a intensidade é proporcional ao quadrado do produto da frequência pela amplitude da onda de deslocamento.

Por outro lado, as (6.3.5) e (5.2.9) também permitem exprimir I como função de \wp :

$$I = \frac{1}{2} \frac{\wp^2}{\rho_0 v} \quad (6.3.10)$$

Novamente, I é proporcional ao quadrado da amplitude da onda, mas, expressa em termos da amplitude de pressão, é independente da frequência. Logo, para medir I , é mais conveniente usar detectores de variações de pressão do que de deslocamento, porque medindo \wp^2 podemos comparar diretamente resultados obtidos para sons de frequências diferentes.

O limiar de audibilidade corresponde à intensidade do som mais fraco que pode ser ouvido. Seu valor depende da frequência; para $\nu = 10^3 \text{ s}^{-1}$ é dado por

$$I_0 \approx 10^{-12} \text{ W / m}^2 \quad (6.3.11)$$

Para o ar a temperaturas ordinárias, temos $\rho_0 \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$, $v \approx 340 \text{ m/s}$ e a (6.3.10) dá, para a amplitude de pressão associada a I_0 , $\wp \approx 3 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$. Por outro lado, com $\omega = 2\pi \times 10^3 \text{ Hz}$, a (6.3.9) dá a amplitude de deslocamento associada a I_0 : é $U_0 \approx 1,1 \times 10^{-11} \text{ m} \approx 0,1 \text{ \AA}$, que é menor do que um diâmetro atômico! Vemos que nosso ouvido é um detector extraordinariamente sensível, capaz de detetar deslocamentos do tímpano dessa ordem de grandeza.

O limiar de sensação dolorosa corresponde à intensidade sonora máxima que nosso ouvido pode tolerar: abaixo dele, temos a sensação de som; acima, uma sensação de dor. Para $\nu = 10^3 \text{ s}^{-1}$, ele corresponde a

$$I_m \sim 1 \text{ W / m}^2 \quad (6.3.12)$$

Como $I_m \sim 10^{12} I_0$, as amplitudes de pressão (\wp_m) e de deslocamento (U_m) associadas serão $\sqrt{I_m/I_0} \sim 10^6$ vezes maiores que os valores acima, ou seja, $\wp_m \sim 30 \text{ N/m}^2 \sim 3 \times 10^{-4} \text{ atm}$, e $U_m \sim 1,1 \times 10^{-5} \text{ m} \sim 10^{-2} \text{ mm}$. A dependência da frequência torna-se patente neste resultado, pois podemos tolerar pressões adicionais $\sim 0,5 \text{ atm}$, ou seja, $\sim 10^3$ vezes maiores, sem sensação de dor no ouvido, quando estas pressões são estáticas, ou seja, de frequência 0 (quando mergulhamos alguns m sob a água, por exemplo).

Em lugar da intensidade, costuma-se utilizar na prática o nível de intensidade sonora, que é medido numa escala logarítmica, de modo que incrementos iguais na escala correspondem a fatores iguais de aumento na intensidade. Uma das razões para isto, ilustrada pelas (6.3.11) e (6.3.12), é o grande alcance de intensidades audíveis, cobrindo muitas ordens de grandeza. Outra razão é uma “lei” empírica psicofísica, devida a Weber e Fechner, segundo a qual a “sensação” produzida por um determinado estímulo é proporcional ao logaritmo da “excitação” (a razão das aspas é que é difícil quantificar o conceito psicológico de “sensação auditiva”).

A unidade de nível de intensidade é o bel (nome dado em homenagem a Alexander Graham Bell): dois sons diferem de 1 bel quando a intensidade de um é 10 vezes maior que a do outro. Na prática, usa-se o decibel = 0,1 bel. Toma-se como intensidade de referência o valor da intensidade I_0 dado pela (6.3.11), que corresponde ao nível zero de intensidade (limiar de audibilidade), definindo o nível de intensidade α por.

$$\alpha = 10 \log_{10}(I / I_0) \text{ db (= decibéis)} \quad (6.3.13)$$

Damos a seguir alguns exemplos típicos de nível sonoro (ordens de grandeza):

| | |
|------------------------------|--------|
| Limiar de audibilidade | 0 db |
| Murmúrio | 20 db |
| Música suave | 40 db |
| Conversa comum | 65 db |
| Rua barulhenta | 90 db |
| Avião próximo | 100 db |

Pelas (6.3.12) e (6.3.11), $I_m/I_0 = 10^{12}$, de modo que $\alpha = 120$ db corresponde ao limiar de sensação dolorosa.

6.4 — Sons musicais. Altura e timbre. Fontes sonoras

A característica que distingue um som musical de um ruído é a periodicidade.

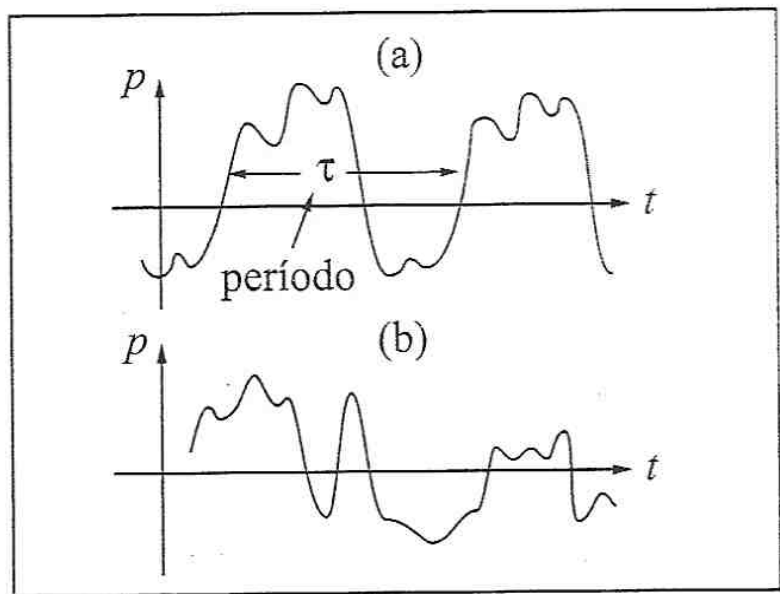


Figura 6.4 — (a) Som musical; (b) Ruído

Isto não significa que um som musical tenha de corresponder a uma onda harmônica (sinusoidal), mas tão-somente que seja *periódico*, como ilustrado no gráfico da pressão \times tempo na Fig. 6.4(a); a Fig. 5.4(b) representa um ruído (gráfico aperiódico).

As *qualidades* que distinguimos num som musical, pelas sensações subjetivas que provoca, são sua *intensidade*, *altura* e *timbre*. A intensidade, como vimos, está relacionada com a *amplitude* da onda sonora.

Altura

A *altura* de um som musical corresponde à sensação que nos permite distinguir entre sons mais graves e mais agudos. A característica física de uma onda sonora como a da Fig. 6.4(a) associada com a altura é a *freqüência* $\nu = 1/\tau$: quanto maior for ν , mais agudo é o som; sons mais graves correspondem a freqüências mais baixas.

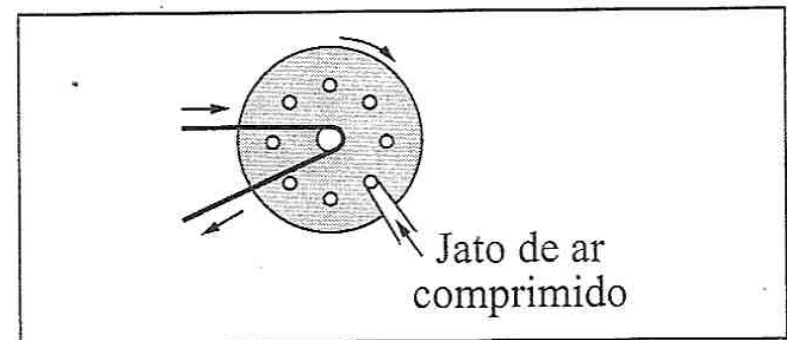


Figura 6.5 — Sereia

A relação entre altura e freqüência foi comprovada experimentalmente por Hooke em 1681, apertando um cartão contra os dentes de uma roda dentada em rotação: quanto mais rápida a rotação, mais agudo era o som assim produzido. O mesmo princípio é usado nas *sereias*, onde um disco com perfurações (Fig. 6.5) gira diante de um jato de ar sob pressão, que sai através das perfurações quando elas passam em frente ao jato.

Notas e escalas musicais

As *notas musicais* correspondem a sons com certas freqüências bem determinadas, obedecendo a convenções estabelecidas no decurso da história.

O *intervalo* entre duas notas musicais de freqüências ν_1 e ν_2 é definido pela razão das freqüências ν_2/ν_1 . Em particular, quando $\nu_2 = 2\nu_1$, dizemos que é um intervalo de *oitava*, e os dois sons são percebidos como a “mesma” nota musical em alturas diferentes. É o caso das

duas notas dó da ilustração (Fig. 6.6).

Pitágoras já havia descoberto, no século VI a.C., que sons musicais harmoniosos são emitidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples, o que altera na mesma proporção a frequência v_1 do tom fundamental da corda [cf. (5.7.13)]. Assim, reduzindo o comprimento à metade, o tom fundamental produzido está uma oitava acima; a proporção 2:3 dá a razão de frequências 3/2, e corresponde ao intervalo de *quinta*, que separa as notas dó e sol, e assim por diante. Esta descoberta da relação entre sons harmônicos e números inteiros pequenos levou Pitágoras a formular a idéia de que “todas as coisas são números”.

A tabela abaixo dá os intervalos v_n/v_1 entre dó e as demais notas na *escala diatônica maior “natural”* e os intervalos v_n/v_{n-1} , entre cada duas notas consecutivas:

| Nota | dó | ré | mi | fá | sol | lá | si | dó |
|---------------|----|------------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|------------------|---------------|
| v_n/v_1 | 1 | 9/8 (segunda) | 5/4 (terça) | 4/3 (quarta) | 3/2 (quinta) | 5/3 (sexta) | 15/8 (sétima) | 2 (oitava) |
| v_n/v_{n-1} | | 9/8 | 10/9 | 16/15 | 9/8 | 10/9 | 9/8 | 16/15 |

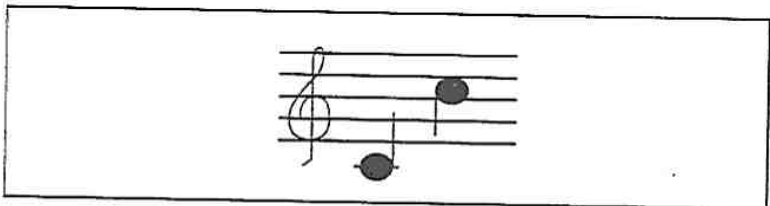


Figura 6.6 — Intervalo de oitava

Um som musical emitido por uma corda vibrante, por exemplo, corresponde a um movimento periódico, e como tal pode ser analisado em *série de Fourier*, como vimos na Seção 5.8. Geralmente, portanto, temos, além do tom fundamental de frequência v_1 , uma superposição de *tons harmônicos*, de frequências $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$, etc., com amplitudes que tendem a decrescer. Se v_1 corresponde ao *dó* de uma escala, $v_2 = 2v_1$ é o *dó* da escala seguinte (uma oitava acima), $v_3 = 3v_1$ é o *sol* da escala seguinte ($v_3/v_2 = 3/2$), $v_5 = 5v_1$ é o *mi* duas escalas acima ($v_5/v_4 = 5/4$), e assim por diante, de modo que são gerados naturalmente *acordes* com várias notas de escalas sucessivas (embora com intensidades que tendem a cair rapidamente).

Três notas como *dó-mi-sol*, cujas frequências guardam entre si a proporção 4:5:6, formam um *acorde perfeito maior*, que soa particularmente harmonioso. A escala natural contém três desses acordes: *fá-lá-dó*; *dó-mi-sol*; *sol-si-ré* (verifique as proporções usando a tabela acima!).

Por que razão esses acordes são harmoniosos? Embora seja arriscado quantificar uma sensação estética, é uma hipótese convincente que a explicação esteja relacionada com a geração de harmônicos quando uma nota é produzida. Indicando por um índice inferior a escala a que pertence uma nota, de forma que $dó_2$ está uma escala acima (oitava) de $dó_1$, vimos acima que os harmônicos de $dó_1$ são $dó_2$, sol_2 , $dó_3$, mi_3 , sol_3 , Por conseguinte, quando tocamos simultaneamente $dó_1$, mi_1 , sol_1 , haverá muitas coincidências entre os harmônicos gerados pelas três notas, levando à *consonância*.

Por outro lado, dois sons de frequências próximas mas não coincidentes dão origem a batimentos (Seções. 3.5, 5.5), cuja rapidez aumenta quando o intervalo entre os sons aumenta, acabando por produzir uma sensação áspera e desagradável em nosso ouvido (batimentos de frequência mais elevada acabam por não ser mais perceptíveis). Sons dissonantes têm batimentos entre si e seus harmônicos, que geram essa sensação desagradável. A explicação que acabamos de dar da consonância e da dissonância é devida a Helmholtz, em seu grande tratado “Sensações de Tom” (1875).

A escala “natural” dada na tabela acima não é a escala reproduzida no teclado de um piano. A razão é que a escala apresenta desvantagens quando se deseja (como é muito freqüente

na música) *transpor* uma melodia, repetindo-a numa altura diferente. Devido à desigualdade dos intervalos, se quisermos uma transposição tomando como tônica, por exemplo, o sol em lugar do dó, o análogo do ré seria $\frac{3}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$ em lugar de $\frac{5}{3} = \text{lá}$, o que daria uma nova nota lá* com uma relação de freqüências $\frac{27}{16} \div \frac{5}{3} = \frac{81}{80} = \frac{9}{8} \div \frac{10}{9}$ para o lá. Para permitir transposições que não soassem falso partindo de qualquer nota da escala como tônica, seria preciso introduzir um grande número de notas intermediárias, o que não é praticável num instrumento de teclado fixo, como o piano.

A solução foi obtida introduzindo a escala de *igual temperamento*, adotada no século XVIII com o apoio de Johann Sebastian Bach, que escreveu para ela o “Cravo Bem Temperado”. Nesta escala, a oitava é dividida em 12 intervalos iguais (semitons temperados), correspondendo cada um a $2^{1/12} \approx 1,0595$, ou seja, a uma freqüência aproximadamente 6% maior. A tabela abaixo, que dá as notas da escala cromática temperada, mostra que este é um bom compromisso, pois os intervalos são bastante próximos dos da escala “natural”.

| Escala cromática | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|--------|--------|-----------------|--------|-----------------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|------------------|
| Nota | Dó | Dó# | Ré | Ré# | Mi | Fá | Fá# | Sol | Sol# | Lá | Lá# | Si |
| intervalo temperado | 1,0000 | 1,0595 | 1,1225 | 1,1892 | 1,2600 | 1,3348 | 1,4142 | 1,4983 | 1,5874 | 1,6818 | 1,7818 | 1,8877 |
| Intervalo natural | 1,0000 | | 1,1250 = 9/8 | | 1,2500 = 5/4 | 1,3333 = 4/3 | | 1,5000 = 3/2 | | 1,6666 = 5/3 | | 1,8750 = 15/8 |

A freqüência absoluta foi fixada, por uma convenção internacional, definindo a freqüência da nota lá da escala média do piano como $\nu = 440$ Hz.

Timbre

Dois sons musicais de mesma intensidade e altura ainda podem diferir por outra qualidade, que chamamos de *timbre* do som. Assim, nosso ouvido distingue claramente a diferença entre a *mesma* nota lá emitida por um piano, violino, flauta ou pela voz humana, por exemplo. O timbre representa uma espécie de “coloração” do som.

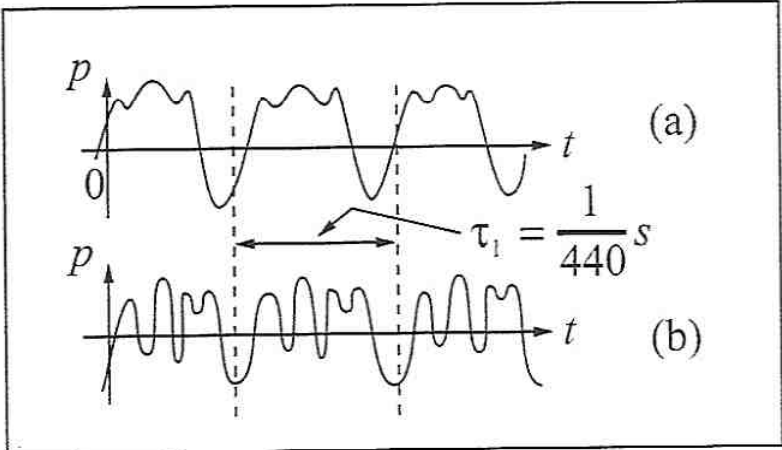


Figura 6.7 — Ondas diferentes associadas à nota “lá”

A explicação física das diferenças de timbre é que nosso ouvido reconhece como a mesma nota “lá” duas ondas sonoras periódicas de mesma freqüência $\nu_1 = 1/\tau_1 = 440$ Hz, muito embora os perfis de onda correspondentes possam ser muito distintos, como os das Fig. 6.7(a) e (b); basta que tenham o mesmo período.

Como para qualquer função periódica do tempo, podemos representar a onda associada a um som musical por uma *série de Fourier* (Seção 5. 8), que, além do *tom fundamental* de freqüência ν_1 , conterà em geral componentes de Fourier associadas a todos os *tons harmônicos* $\nu_n = n\nu_1$ ($n = 2, 3, \dots$). As diferentes proporções em que entram os tons harmônicos definem o timbre do som. Por exemplo: o som da Fig. 6.7(b) é bem mais rico em harmônicos de ordem mais elevada que o da Fig. 6.7(a), embora o tom fundamental seja o mesmo.

É interessante observar que nosso ouvido parece ser insensível às fases δ_n , das componentes de Fourier (5.8.6): o timbre só depende das *intensidades* das componentes (propor-

cionais a B_n^2 na (5.8.6)), que podem ser representadas num *espectro acústico*, onde é dada a intensidade em função de n .

A Fig. 6.8 mostra um espectro acústico típico de um clarinete, cujo timbre se caracteriza pelo fato de que os harmônicos de ordem par tendem a ter intensidade bem menor que os de ordem ímpar. Já o espectro da flauta tende a concentrar-se no tom fundamental e nos primeiros dois ou três harmônicos. O timbre de um piano, cujas cordas são *percutidas* por martelos, é diferente do de um harpsicórdio, cujas cordas são *tangidas*, ou seja, puxadas e depois soltas.

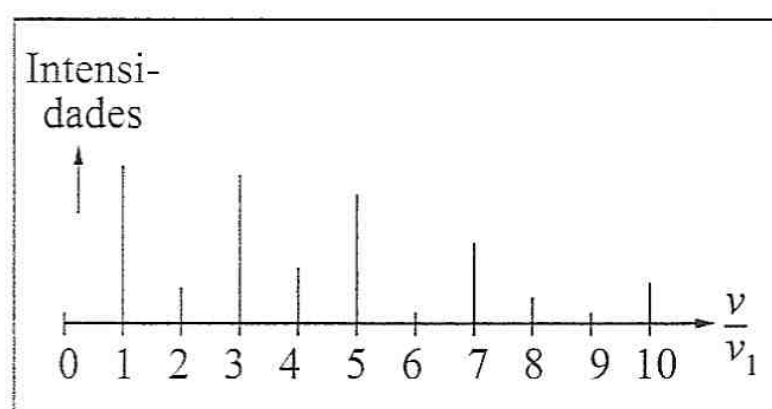


Figura 6.8 — Espectro acústico

Fontes sonoras

Já discutimos os modos normais de vibração de uma corda tensa, presa nas extremidades (Seções 5.7, 5.8), que são utilizados em todos os instrumentos musicais de *cordas*, como o piano, violino, harpa ...

Vamos considerar agora os modos normais de vibração de uma *coluna de ar*, que constituem a base de todos os instrumentos de *sopro*. Para fixar as idéias, vamos tomar um tubo cilíndrico, que podemos identificar com um *tubo de órgão*, aberto numa extremidade, a partir da qual se produz a excitação da onda sonora (soprando ar através de foles, por exemplo), e podendo ter a outra extremidade aberta ou fechada.

Colunas de ar

A entrada de ar pela abertura de um tubo de órgão (Fig. 6.9) gera um antinodo (máximo) de deslocamento. Se a outra extremidade do tubo estiver *fechada*, o deslocamento se anula nessa extremidade (*nodo de deslocamento*). Como a onda de pressão está em quadratura com a onda de deslocamento (Seção 6.3), uma extremidade *fechada* corresponde a um *antinodo de pressão*.

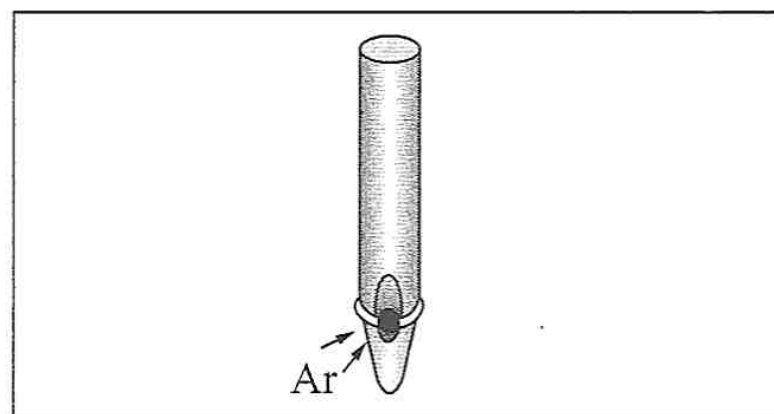


Figura 6.9 — Tubo de órgão

Numa extremidade *aberta*, a pressão total P deve permanecer aproximadamente constante e igual à pressão atmosférica p_0 , de modo que, pela (6.2.6), a variação de pressão p se anula: uma extremidade aberta corresponde então a um *nodo da onda de pressão*, o que equivale a um *antinodo de deslocamento*. Na verdade, a variação de pressão só se anula um pouco adiante da extremidade aberta: a coluna de ar vibrante se estende um pouco além da extremidade aberta. Para um tubo de secção circular e paredes não muito espessas, esta “correção terminal” equivale a corrigir o comprimento efetivo do tubo, acrescentando-lhe $\approx 0,6 R$, onde R é o raio do tubo.

Quando uma onda sonora harmônica progressiva atinge a extremidade do tubo, a condição de contorno de que ela corresponde a um nodo de pressão p ou deslocamento u dá origem a uma onda refletida, com defasagem de 180° para p ou u , respectivamente, exatamente como acontece na reflexão na extremidade fixa de uma corda vibrante (Seção 5.6). Pela (6.3.3), $p = 0$ equivale a $\partial u / \partial x = 0$, o que corresponde à condição de contorno de extremidade livre (5.6.7) para a corda vibrante, ou seja, quando a onda de p se reflete com defasagem de 180° , a onda de u se reflete sem mudança de fase e vice-versa.

Como no caso da corda, a interferência entre as ondas incidente e refletida dá origem a

ondas estacionárias, que são os *modos normais de vibração* da coluna de ar contida no tubo.

Na Fig. 6.10, que deve ser comparada à 5.24 para uma corda vibrante, estão representadas graficamente as ondas de *deslocamento* u para os modos mais baixos de uma coluna de ar vibrante *aberta em ambas as extremidades* (figuras da esquerda), mostrando que *todos os harmônicos do tom fundamental* v_1 *estão presentes*, e para um tubo *fechado numa extremidade* (e aberto na outra), mostrando que *só os harmônicos ímpares do tom fundamental* v'_1 *estão presentes* neste caso. As ondas estacionárias de pressão correspondentes estão em quadratura com as de u , de forma que, para o tubo aberto em ambas as extremidades, correspondem exatamente às da Fig. 5.24.

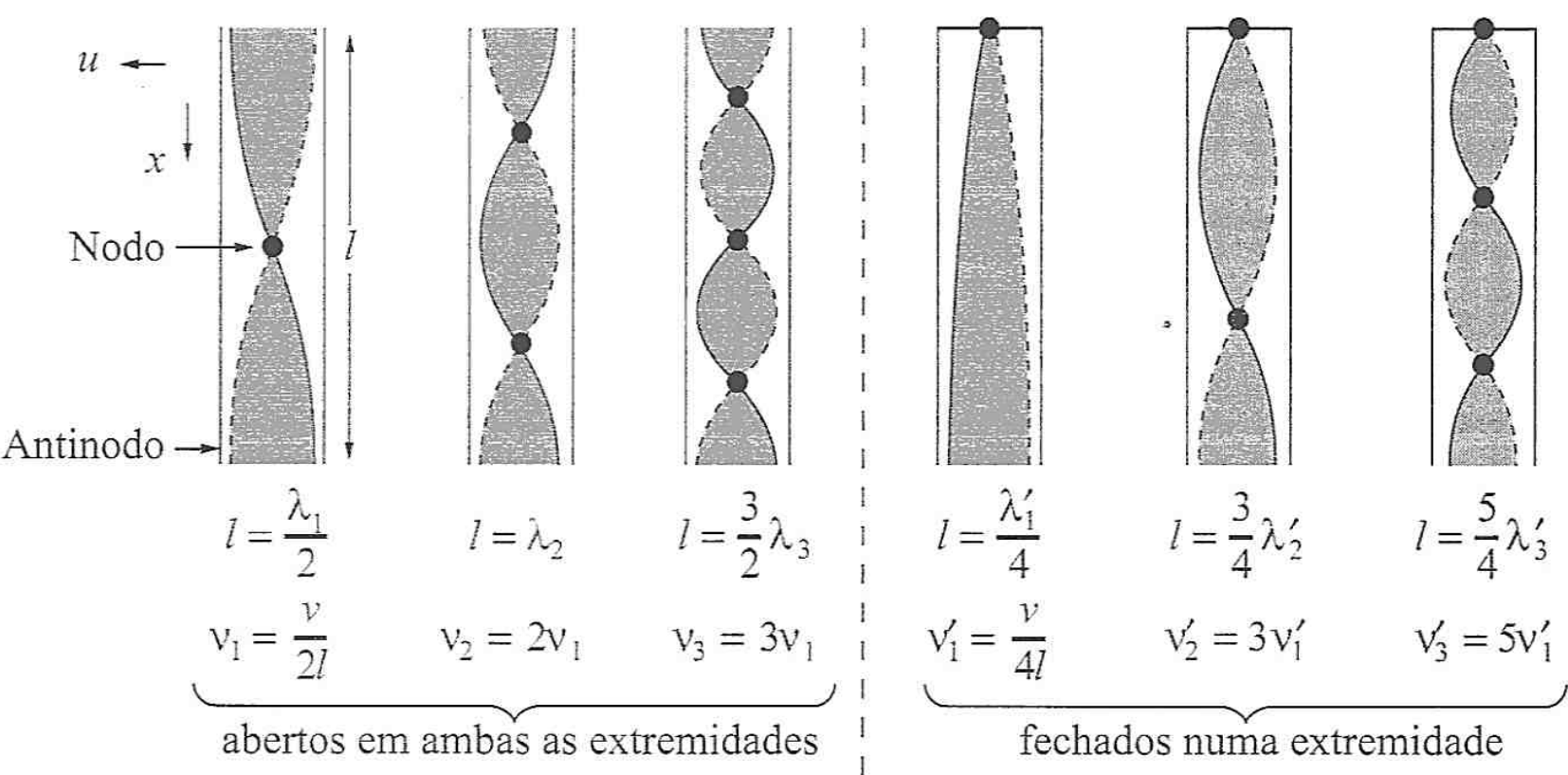


Figura 6.10 — Modos normais de um tubo de órgão

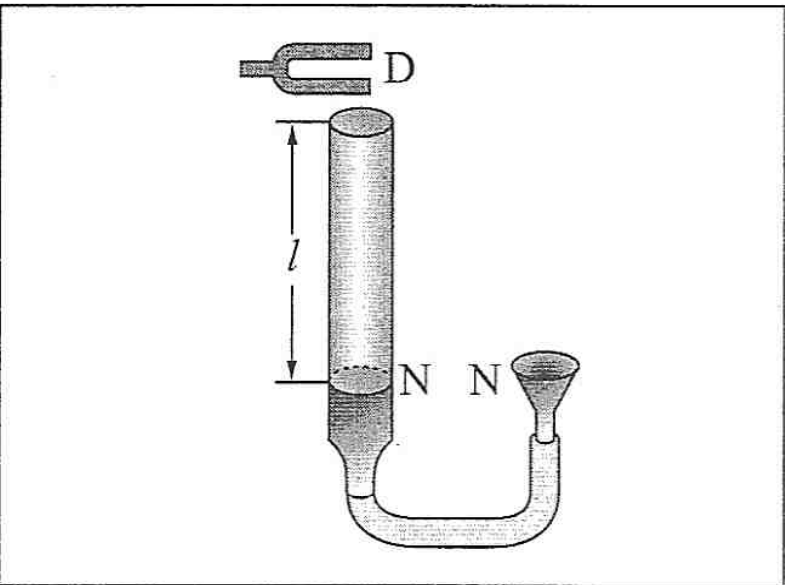


Figura 6.11 — Ressonância

A verificação experimental destes resultados pode ser feita através de uma experiência de *ressonância*, ilustrada na Fig. 6.11. Um diapasão vibrante D de frequência v conhecida excita ondas sonoras numa coluna de ar, contida num tubo cilíndrico de vidro, com água na parte inferior. Faz-se variar o comprimento l da coluna variando o nível N da água no tubo. A coluna de ar é aberta numa extremidade e fechada na outra, de modo que se produzem ressonâncias quando $l = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ (Fig. 6.10), onde $\lambda = v/v$ e v é a velocidade do som no ar. A ressonância é detectada pelo reforço considerável produzido na

intensidade sonora. Medindo l , pode-se determinar λ e por conseguinte v .

Mais geralmente, o ar contido numa cavidade de forma qualquer possuirá uma série de *frequências de ressonância* associadas aos seus modos normais de vibração, constituindo uma *cavidade acústica ressonante*. O “barulho do mar” que se ouve, quando se cola o ouvido à abertura de uma concha marinha, não passa da excitação de modos ressonantes da cavidade por ligeiras correntes de ar.

O som que se origina das cordas vibrantes de um instrumento musical tal como o violino ou o piano é profundamente influenciado pela “caixa de som” do instrumento, constituída das partes de madeira. Procura-se neste caso evitar a ocorrência de ressonâncias muito pronunciadas, pois o objetivo é, pelo contrário, reforçar uniformemente todas as notas.

Para utilização em instrumentos musicais, é importante, como vimos ao discutir as origens da consonância e dissonância, que os modos normais de vibração tenham frequências *harmônicas* (múltiplas inteiras) de um tom fundamental.

As colunas de ar cilíndricas circulares, que têm essa propriedade, são utilizadas no órgão, na clarineta e na flauta.

A única outra forma simples de tubo que dá origem a harmônicos é a forma *cônica*. Neste caso, numa abertura próxima do vértice do cone (Fig. 6.12), teremos ainda um nodo de deslocamento, ao passo que a outra extremidade aberta é um antinodo. Tubos de forma cônica são utilizados em diversos instrumentos de sopro, tais como o oboé, o saxofone e o fagote.

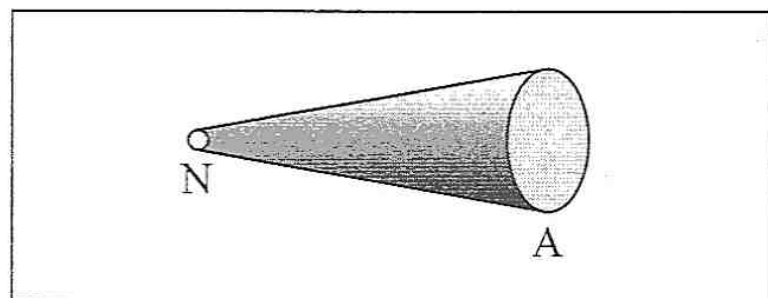


Figura 6.12 — Tubo cônico

Membranas e placas vibrantes

Os modos normais de vibração de membranas e de placas *não* são harmônicos do tom fundamental, e são utilizados em instrumentos musicais de percussão, tais como os tambores, geralmente apenas para marcar o ritmo.

Podemos colocar em evidência os modos normais de vibração de membranas e placas por um método devido a Chladni. Espalha-se areia fina sobre a membrana ou placa vibrante. A areia se acumula, formando montículos, sobre as *linhas nodais*, onde a amplitude de vibração se anula. As figuras assim formadas chamam-se *figuras de Chladni*.

Alguns exemplos para placas quadradas e circulares estão ilustrados na Fig. 6.13. As linhas nodais separam regiões onde o deslocamento é para cima (+) e para baixo (-). Para excitar estes modos, a placa pode ser friccionada com um arco de violino, por exemplo, na posição de um antinodo, ao mesmo tempo que se imobilizam (colocando um dedo, p. ex.) pontos onde se quer produzir um nodo, dando origem a linhas nodais.

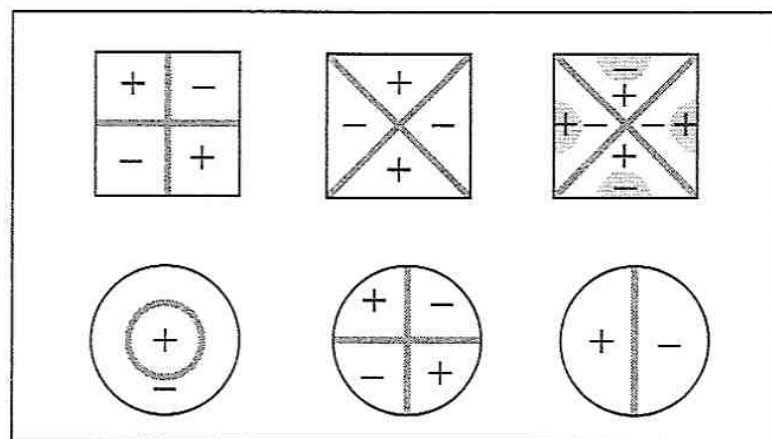


Figura 6.13 — Figuras de Chladni

Ultrassons

Conforme foi mencionado na Seção 6.1, os sons audíveis correspondem a frequências compreendidas entre 20 Hz e 20 KHz. Para frequências abaixo de 20 Hz, temos *infra-sons*, e acima de 20 KHz estão os *ultra-sons*; as ondas correspondentes têm exatamente a mesma natureza das ondas sonoras, embora não sejam audíveis.

É possível gerar ultra-sons, entre outros métodos, utilizando vibrações de um cristal de quartzo provocadas pelo *efeito piezoelétrico*: um campo elétrico, aplicado a determinados cristais (entre os quais o quartzo) provoca uma deformação mecânica. Assim, aplicando um campo elétrico alternado de alta frequência, produz-se uma vibração dessa frequência. É possível produzir ultra-sons com frequências de até centenas de milhões de Hz, cujo comprimento de onda $\lambda = v/\nu$ é tão pequeno quanto comprimentos de onda da luz visível ($\sim 10^{-5}$ cm)!

Ondas ultra-sônicas adquirem, devido a seu pequeno comprimento de onda, várias propriedades da propagação da luz. A propagação retilínea permite dirigir feixes de ultra-sons e, através da detecção do eco, localizar objetos submersos por um método análogo ao radar (sonar). Os morcegos utilizam uma espécie de sonar para orientar-se e detectar insetos.

Os ultra-sons produzem efeitos mecânicos sobre o meio em que se propagam, que dão origem a uma grande variedade de aplicações técnicas (detecção de defeitos, limpeza de peças, perfuração, ...).

6.5 — Ondas em mais dimensões

Até agora, consideremos apenas ondas *unidimensionais*, que se propagam somente em uma dimensão. Isto vale tanto para as ondas transversais numa corda vibrante como para as ondas sonoras longitudinais num tubo cilíndrico.

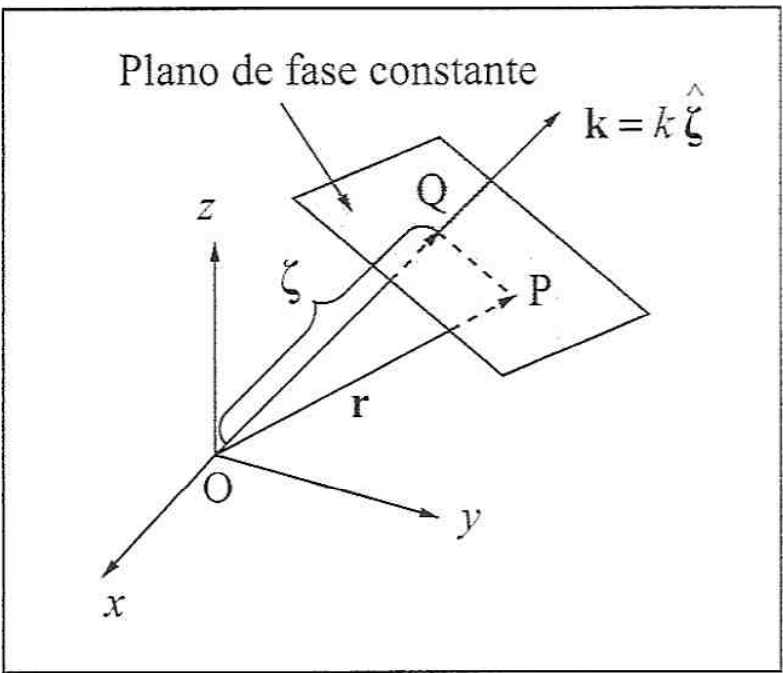


Figura 6.14 — Onda plana

Uma onda pode propagar-se numa só direção também no espaço tridimensional. Se esta direção, representada por **OQ** na Fig. 6.14, for tomada como eixo $O\zeta$, definindo uma coordenada ζ ao longo dela, uma onda harmônica progressiva ao longo desta direção, cujo vetor unitário designaremos por $\hat{\zeta}$, é da forma [cf. (6.3.1, 6.3.4)]

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \cos(k\zeta - \omega t + \delta)$$

(6.5.1)

num ponto **P** com **OP** = **r** (Fig. 6.14), onde $\zeta = \overline{OQ}$ é a projeção de **OP** sobre a direção ζ , ou seja,

$$\zeta = \hat{\zeta} \cdot \mathbf{r}$$

(6.5.2)

A função de onda $\varphi(\mathbf{r}, t)$ é uma grandeza *escalar*, que pode representar, por exemplo, a *pressão* numa onda sonora (em três dimensões, o deslocamento é um vetor!). Também se pode tomar φ como o *potencial de velocidades* (2.6.14), que, pela (6.2.23), está relacionado com a pressão por $\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = - \text{grad } p$, com $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, o que dá $p = - \rho_0 \partial \varphi / \partial t$.

Substituindo a (6.5.2) na (6.5.1), vemos que ela também pode ser escrita

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) = \text{Re}[A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$$

(6.5.3)

onde $A = \mathcal{A} e^{i\delta}$ é a *amplitude complexa* da onda, em notação complexa, e

$$\mathbf{k} = k \hat{\zeta} = \frac{\omega}{v} \hat{\zeta}$$

(6.5.4)

chama-se o *vetor de onda*. A magnitude de **k** é o número de onda k , e sua direção é a direção de propagação da onda.

A *fase* da onda é o argumento do co-seno nas (6.5.1) ou (6.5.3), ou seja, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta = k\zeta - \omega t + \delta$. Chama-se *superfície de onda* ou *frente de onda* o lugar geométrico dos pontos de fase constante num dado instante.

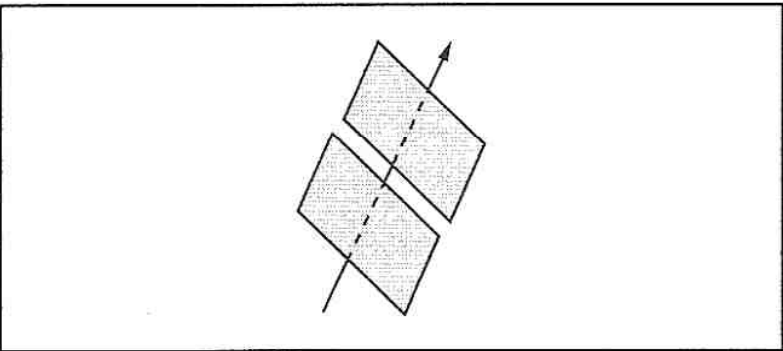


Figura 6.15 — Frentes de onda

As frentes de onda no presente caso são definidas por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$, o que equivale a $\zeta = \text{constante}$ e, pela (6.5.2), é a equação de um *plano perpendicular à direção de propagação* (Fig. 6.14).

Como as frentes de onda são planos, a (6.5.3) é chamada de *onda plana*. A *intensidade* I da onda, proporcional a $\mathcal{A}^2 = |A|^2$ [cf. (6.3.10)], representa a

energia média por unidade de tempo que atravessa uma área unitária perpendicular à direção de propagação, e que é a mesma para todos os planos de fase constante.

Se

$$\mathbf{r} = (x, y, z); \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad (6.5.5)$$

onde

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}} \quad (6.5.6)$$

a (6.5.3) se escreve

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) \quad (6.5.7)$$

Derivando duas vezes a (6.5.7) em relação a x ou a t , obtemos respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -k_x^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \varphi \end{aligned}$$

de modo que a (6.5.6) implica

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \quad (6.5.8)$$

Esta é a equação de ondas tridimensional. Em particular, se φ só depende de uma das coordenadas, como x (ou seja, $\partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$), ela se reduz à equação de ondas unidimensional (5.2.24).

Ondas esféricas

Qualquer fonte de ondas (por exemplo, um alto-falante, que emite ondas sonoras), a uma distância suficientemente grande (muito maior do que as dimensões da fonte), deve aparecer como uma *fonte puntiforme*. Se a velocidade de propagação da fase é a mesma em todas as direções, como acontece com a velocidade do som no ar (meio *isotrópico*), as *superfícies de fase constante* a grande distância devem ser *esferas* com centro na fonte.

Tomando a origem das coordenadas na posição da fonte, o fator de propagação da fase para uma onda harmônica progressiva emanada da fonte deve portanto ser da forma

$$\cos(kr - \omega t + \delta) \quad (6.5.9)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância à fonte. A fase da onda, que é o argumento do co-seno na (6.5.9), é constante, num dado instante, para $r = \text{constante}$, ou seja, as frentes de onda são esferas concêntricas, com centro na posição O da fonte (Fig. 6.16), o que justifica o nome de *onda esférica*.

Como deve variar a amplitude da onda com a distância da fonte? A energia média por unidade de tempo emitida pela fonte deve ser constante para uma onda harmônica, de modo que o fluxo

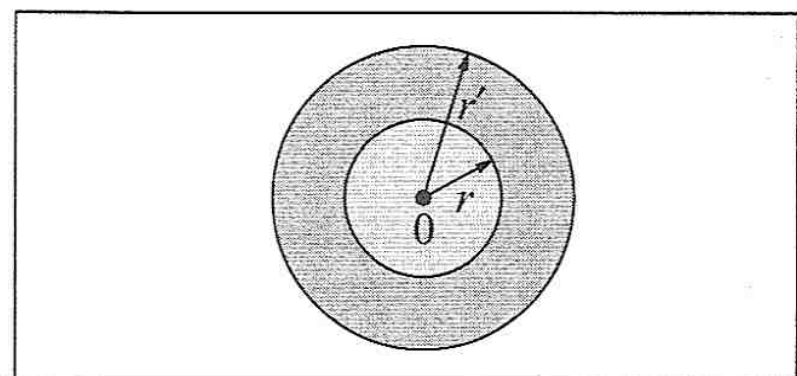


Figura 6.16 — Frente de onda esférica

médio de energia por unidade de tempo que atravessa qualquer frente de onda deve ser constante, independente do raio r da frente de onda.

Por outro lado, a área total de uma frente de onda de raio r é $4\pi r^2$, ou seja, cresce com o quadrado do raio. Logo, a *intensidade* I (fluxo médio por unidade de tempo e de área) cai como $1/r^2$, de modo que a amplitude cai com $1/r$. A função de onda que representa uma *onda esférica harmônica progressiva* deve portanto ser da forma

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{r} \cos(kr - \omega t + \delta) \quad (6.5.10)$$

onde a é uma constante e $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ a distância à fonte. Pode-se mostrar que a (6.5.10) é efetivamente solução da equação de ondas tridimensional (6.5.8).

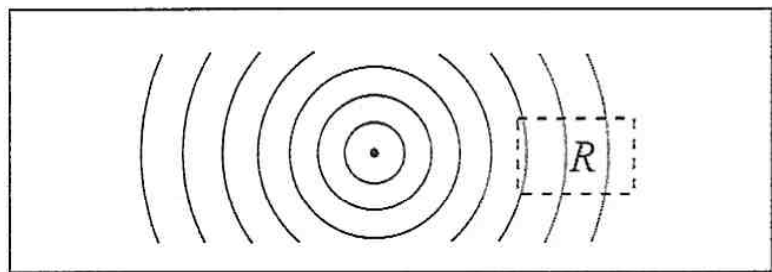


Figura 6.17 — Porção de onda esférica

A grande distância da fonte, uma pequena porção de onda esférica, compreendida numa região R limitada (Fig. 6.17), comporta-se como uma porção de onda plana; isto se aplica a uma porção de frente de onda esférica de dimensões muito maiores que o comprimento de onda, mas muito menores do que o raio de curvatura r . Assim, por exemplo, um feixe de

raios solares se comporta como um feixe de luz paralela, associado a uma porção de onda plana, uma vez que a escala do laboratório é muito menor que a distância Terra-Sol.

Ondas bidimensionais

Ondas sobre a superfície da água podem ser tratadas como essencialmente bidimensionais. É fácil produzi-las e fazer experiências com elas usando um tanque de ondas, que não passa de um tanque raso com água; iluminando-se convenientemente, as sombras das ondas na superfície podem ser projetadas sobre uma tela.

O análogo da onda plana é uma “onda linear”, dada ainda pela (6.5.3), mas com $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j}$ (tomando a superfície da água como plano xy). Pode ser produzida por uma lâmina retilínea longa vibrando na superfície da água. As frentes de onda são retas paralelas.

O análogo da onda esférica, produzido por uma fonte puntiforme (objeto de dimensões muito menores que o comprimento de onda) é uma *onda circular*. As frentes de onda são círculos concêntricos. A amplitude cai com $1/\sqrt{\rho}$, onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância à fonte (por que?), de modo que a função de onda é da forma

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{\sqrt{\rho}} \cos(k\rho - \omega t + \delta) \quad (6.5.11)$$

Em três dimensões, a (6.5.11) representa uma *onda cilíndrica*, cujas frentes de onda são cilindros concêntricos $\rho = \text{constante}$, e que seria emitida por uma *fonte linear*, situada ao longo de todo o eixo dos z .

6.6 — O Princípio de Huygens

Em 1678, Huygens formulou um princípio de grande importância no estudo da propagação de ondas. Huygens tinha em vista a teoria ondulatória da luz, que expôs em seu “Tratado sobre a Luz”, publicado em 1690, mas o princípio se aplica de forma geral à propagação de ondas sonoras, por exemplo. No princípio do século XIX, o princípio foi reformulado de

forma mais precisa e completa por Fresnel, levando ao *princípio de Huygens-Fresnel*, que permite tratar quantitativamente a propagação de ondas, inclusive os efeitos de *difração*.

É um fenômeno familiar para ondas na superfície da água que um trem de ondas qualquer, atingindo uma barreira com uma *pequena* abertura (de dimensões muito menores que o comprimento de onda λ), gera, do outro lado da barreira (Fig. 6.18), ondas circulares com centro na abertura. Logo, a *porção da frente de onda incidente não obstruída pela abertura se comporta como uma fonte puntiforme*: em três dimensões, as ondas geradas são esféricas.

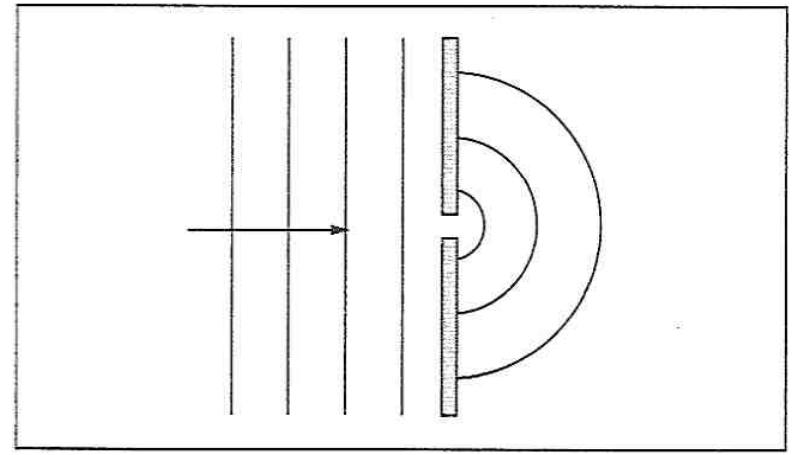


Figura 6.18 — Fonte puntiforme

Esta experiência sugere a idéia básica do *princípio de Huygens*, a saber: *cada ponto de uma frente de onda comporta-se como fonte puntiforme de novas ondas*, chamadas de *ondas secundárias*. A outra parte do princípio diz como construir uma frente de onda ulterior a partir das ondas secundárias. A prescrição de Huygens consiste no seguinte: dada uma frente de onda inicial, consideram-se todas as ondas secundárias emanadas dos diferentes pontos dessa frente, propagando-se no meio considerado. A *frente de onda num instante posterior é a envoltória das frentes das ondas secundárias dela emanadas*. A *envoltória* de uma família de superfícies é uma superfície que *tangencia* todas elas, ou seja, todas as superfícies da família são tangentes à envoltória.

A Fig. 6.19 exemplifica a envoltória de uma família de superfícies. A idéia de Huygens era que cada onda secundária isoladamente é muito fraca, mas seus efeitos se reforçam ao longo da envoltória.

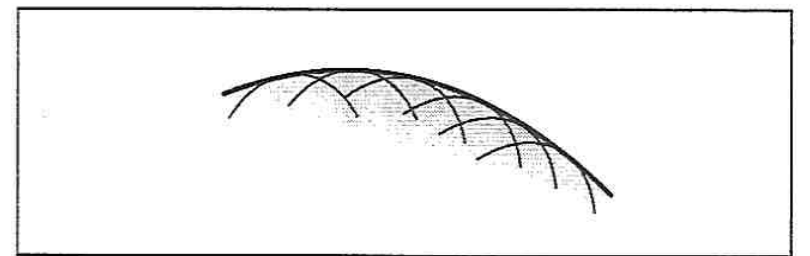


Figura 6.19 — Envoltória

A formulação dada por Huygens no “Tratado sobre a Luz” é a seguinte:

“Deve considerar-se ainda na emanção destas ondas que cada partícula do meio em que a onda se propaga deve comunicar seu movimento não só à partícula que se encontra na linha reta de ação do ponto luminoso, mas também, necessariamente, a todas as partículas contíguas que se opõem a seu movimento. É necessário portanto que se forme em torno de cada partícula uma onda com centro nela própria.

Assim, se DCF (Fig. 6.20) é uma onda emanada do ponto luminoso A, que é seu centro; a partícula B, que é uma das compreendidas dentro da esfera DCF, terá formado sua onda particular KCL, que tocará a onda DCF em C, no mesmo instante em que a onda principal emanada do ponto A tenha chegado a DCF, e é claro que só existirá o ponto C da onda KCL que tocará a onda DCF, ou seja aquele que se encontra sobre a reta traçada por AB. Da mesma forma, as demais partículas compreendidas dentro da esfera DCF, tais como bb, dd, etc., terão formado cada uma a sua onda. Mas cada uma destas ondas é infinitamente fraca em confronto com a onda DCF, para cuja formação contribuem todas as outras, pela parte da sua superfície que está mais afastada do centro A.”

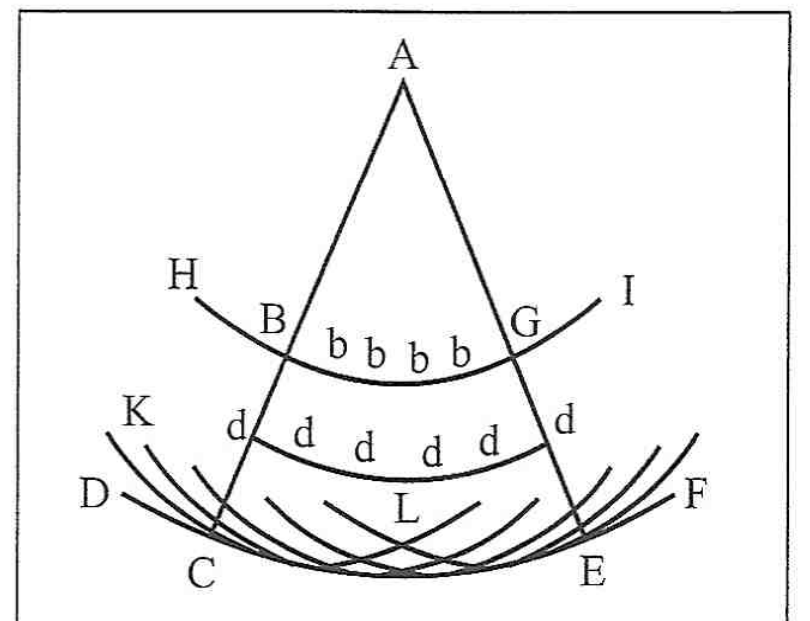


Figura 6.20 — Princípio de Huygens

Huygens mostrou assim que, a partir de uma frente de onda esférica inicial BG, a envoltória das ondas esféricas secundárias emanadas dos diferentes pontos de BG produz, num instante posterior, a frente de onda DCF.

A seguir, Huygens justifica, a partir de seu princípio, a *propagação retilínea da luz*, nos seguintes termos (Fig. 6.20):

“Para chegar às propriedades da luz, notemos primeiro que cada parte da onda deve propagar-se de tal forma que seus extremos permaneçam sempre compreendidos entre as mesmas retas traçadas a partir do ponto luminoso. Assim a parte da onda BG, que tem como centro o ponto luminoso A, propaga-se no arco CE limitado pelas retas ABC e AGE, pois, mesmo que as ondas secundárias produzidas pelas partículas que compreendem a região CAE se expandam fora dela, elas não concorrem no mesmo instante para compor a onda que termina o movimento, que tem precisamente na circunferência CE sua tangente comum.

Daí se compreende a razão pela qual a luz, salvo quando seus raios são refletidos ou refratados, só se propaga em linha reta, de modo que não ilumina nenhum objeto a não ser quando o caminho da fonte objeto está compreendido entre tais linhas. Pois se, por exemplo, tivermos uma abertura BG limitada por corpos opacos BH, GI, a onda de luz que sai do ponto A estará sempre limitada pelas retas AC, AE, como acaba de ser demonstrado, pois as partes das ondas secundárias que se estendem para fora do espaço ACE são fracas demais para produzir luz”.

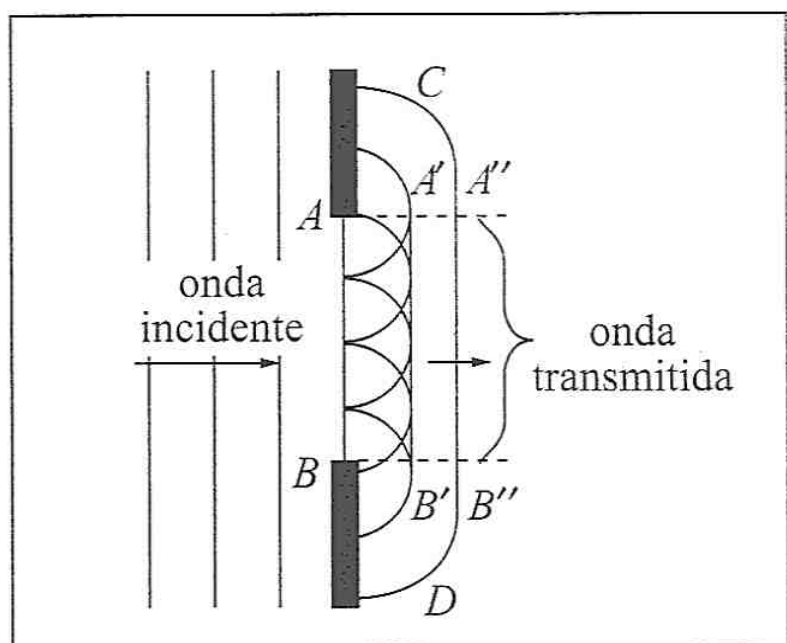


Figura 6.21 — Propagação retilínea

O argumento de Huygens, aplicado a uma onda plana que incide perpendicularmente sobre um anteparo plano opaco com uma abertura AB (Fig. 6.21), diz que as frentes de onda transmitidas através de abertura serão A'B', A''B'', limitadas por raios AA'' e BB'' paralelos à direção da onda incidente (propagação retilínea), porque a envoltória das frentes de ondas esféricas secundárias terá essa limitação. Acima de A', na região C, e abaixo de B', na região D, teríamos sombra completa, porque as ondas secundárias que atingem essas regiões não têm o reforço da envoltória e não produziram intensidade observável.

Entretanto, este resultado não pode ser sempre verdadeiro, porque, para uma abertura de diâmetro $d \ll \lambda$, onde λ é o comprimento de onda, a abertura se comporta como fonte puntiforme (Fig. 6.18), e as ondas transmitidas se difundem em todas as direções, sem formação de sombra alguma. Esta penetração na região que estaria na sombra, se valesse a propagação retilínea, constitui o fenômeno da *difração*.

O resultado discutido acima (propagação retilínea) vale no outro extremo, ou seja, para $d \gg \lambda$; é neste caso que os efeitos de difração se tomam desprezíveis. De modo geral, os efeitos de difração são tanto maiores quanto maior for λ/d , onde d é o menor diâmetro da abertura.

Os comprimentos de onda da luz visível são $\leq 1\mu\text{m} = 10^{-3}\text{ mm}$, de modo que a difração da luz é usualmente um efeito extremamente pequeno, que requer montagens especiais num laboratório para ser observado. Já para o som, como vimos na Seção 6.3, tem-se $1,7\text{ cm} \leq \lambda \leq 17\text{ m}$, de modo que objetos na escala macroscópica produzem fortes efeitos de difração: em lugar de propagar-se em linha reta, o som contorna os obstáculos, sem produzir sombras apreciáveis. Uma conversa num quarto cuja porta está entreaberta, mesmo que seja uma pequena fresta, pode ser ouvida numa peça vizinha, embora não seja possível ver as pessoas.

O princípio de Huygens é incompleto em diversos aspectos. Dada uma frente de onda, as ondas esféricas secundárias dela emanadas têm duas envoltórias: uma adiante da frente, no sentido da propagação, e outra para trás. Pode-se explicar a ausência de uma onda em sentido inverso introduzindo um “fator de inclinação” na amplitude das ondas esféricas secundárias:

em lugar de ser a mesma em todas as direções, ela seria máxima no sentido da propagação e nula em sentido oposto.

O cálculo quantitativo dos efeitos de difração tornou-se possível quando Fresnel reformulou o princípio de Huygens, combinando-o com o “princípio das interferências”, introduzido por Young no início do século XIX. No princípio de Huygens-Fresnel, comparece um fator de inclinação. A formulação deste princípio e o tratamento quantitativo dos efeitos de difração serão discutidos mais tarde, no curso de ótica ondulatória (Vol. 4).

Na propagação de ondas ultra-sonoras, cujo comprimento de onda típico é muito menor que as dimensões macroscópicas, os efeitos de difração são pequenos. Feixes de ultra-som comportam-se portanto de forma análoga a feixes de luz visível, no que diz respeito a propriedades direcionais e propagação retilínea.

6.7 — Reflexão e refração

Já vimos que, quando uma onda unidimensional encontra uma superfície de descontinuidade, separando dois meios diferentes, ela é parcialmente refletida e parcialmente transmitida. O mesmo acontece com ondas em duas ou três dimensões. Neste caso, as direções de propagação das ondas refletida e transmitida (= refratada) dependem da direção da onda incidente. O *ângulo de incidência* θ_1 (Fig. 6.22) é o ângulo entre a direção de propagação da onda incidente e a direção da normal \hat{n} à superfície de separação dos dois meios. As *leis da reflexão e da refração*, que relacionam as direções das ondas refletida e refratada com a da onda incidente, podem ser obtidas com o auxílio do princípio de Huygens.

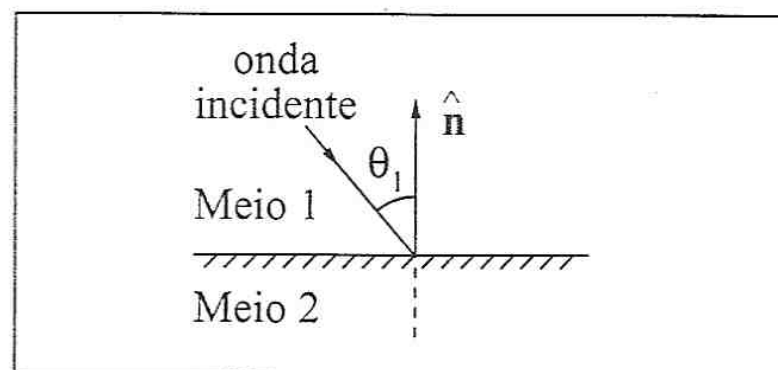


Figura 6.22 — Interface entre dois meios

A direção de propagação de uma onda plana harmônica, como a (6.5.3), é a direção do vetor de onda \mathbf{k} , ou seja, é normal às frentes de onda (planos de fase constante). Se chamarmos de \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}'_1 e \mathbf{k}_2 , os vetores de onda das ondas incidente, refletida e refratada, respectivamente, a 1.ª lei da reflexão e da refração diz que as direções de \mathbf{k}'_1 e \mathbf{k}_2 estão no plano de incidência, definido pelas direções de \mathbf{k}_1 , e \hat{n} .

A Fig. 6.23 mostra o ângulo de incidência $\theta_1 = \angle(\mathbf{k}_1, \hat{n})$, o ângulo de reflexão $\theta'_1 = \angle(\mathbf{k}'_1, \hat{n})$ e o ângulo de refração $\theta_2 = \angle(\mathbf{k}_2, \hat{n})$. Note que θ_1 é também o ângulo entre a superfície de separação e uma frente de onda incidente $I'I'$, e θ'_1 e θ_2 os ângulos entre a superfície de separação e frentes de onda refletida RR' e refratada RR'' , respectivamente.

A lei da reflexão diz que

$$\theta'_1 = \theta_1$$

(6.7.1)

e a lei da refração (lei de Snell) diz que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{12}$$

(6.7.2)

onde n_{12} é o índice de refração relativo do meio 2 em relação ao meio 1.

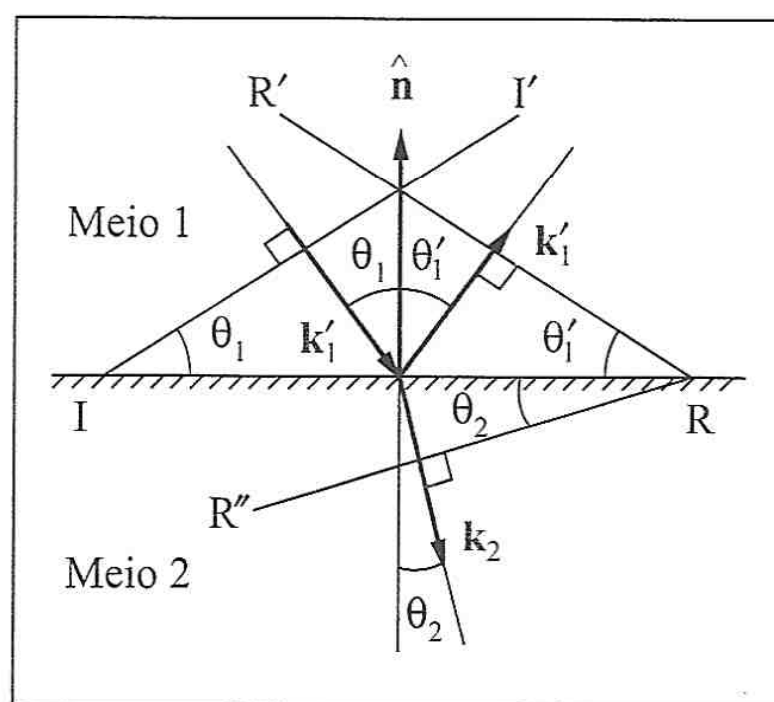


Figura 6.23 — Ângulos de incidência, reflexão e refração

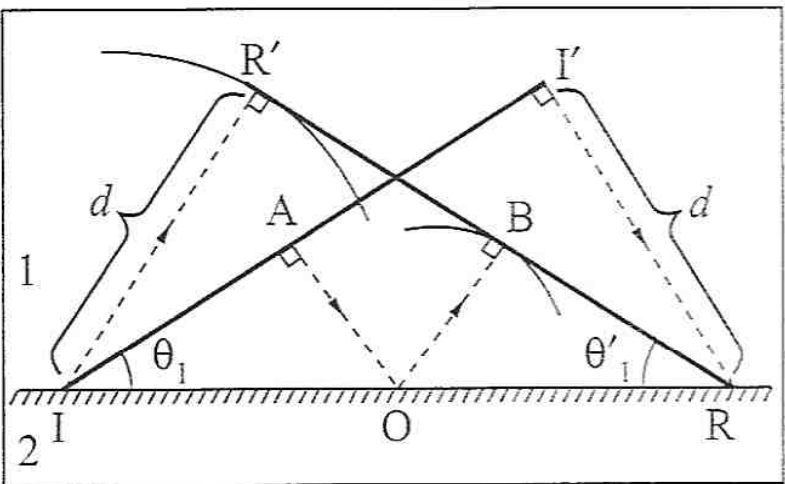


Figura 6.24 — Lei da reflexão

$d = v_1 t$, e a frente de onda refletida (envoltória) RR' é tangente à esfera em R' . A Fig. 6.24 mostra outra onda secundária gerada no ponto O , correspondente ao percurso AOB , que tangencia a envoltória em B .

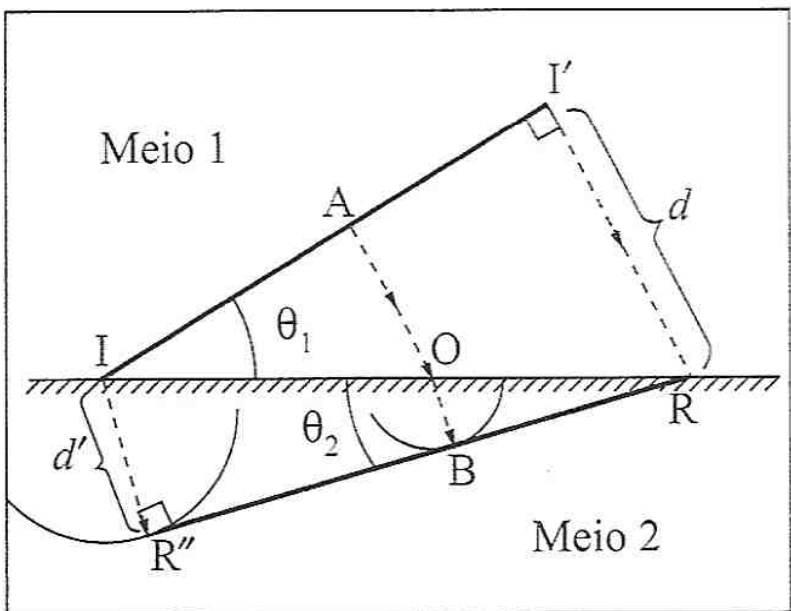


Figura 6.25 — Lei da refração

de onda refratada RR'' é tangente a essa esfera em R'' . A Fig. mostra outra onda secundária gerada em O , correspondente ao percurso AOB .

Os triângulos retângulos $II'R$ e $RR''I$ dão:

$$d = v_1 t = \overline{IR} \operatorname{sen} \theta_1; \quad d' = v_2 t = \overline{IR} \operatorname{sen} \theta_2$$

o que dá, dividindo membro a membro,

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

 (6.7.3)

que é a lei da refração (6.7.2), com

$$n_{12} = v_1 / v_2$$

 (6.7.4)

O índice de refração é portanto igual à razão das velocidades de fase nos dois meios. Se $v_2 < v_1$, o raio refratado se aproxima da normal ($\theta_2 < \theta_1$).

Aplicação às ondas sonoras: Para que se observe reflexão ou refração regular, é preciso que a frente de onda sonora considerada possa ser assimilada a uma porção de onda plana, o que requer dimensões $\gg \lambda$. Por isso, esses efeitos só podem ser observados usualmente numa escala de grandes proporções.

A *reflexão do som* dá origem aos ecos e pode ter efeitos desejáveis ou não, como na *reverberação do som* numa sala de concertos.

Como vimos na (6.2.33), a velocidade do som num gás decresce quando a temperatura decresce. Num dia claro, a temperatura na atmosfera tende a decrescer quando a altitude

A Fig. 6.24 ilustra a dedução da lei da reflexão a partir do Princípio de Huygens. Seja II' uma frente de onda incidente. Após um tempo $t = d/v_1$, onde $d = \overline{I'R}$ é a distância de II' à superfície de separação, a frente de onda esférica secundária emanada de I' atinge a superfície de separação (v_1 é a velocidade de fase da onda no meio 1). Devido à descontinuidade, são geradas na superfície de separação ondas secundárias, que voltam ao meio 1. Após o tempo t , a onda secundária emanada do ponto I é uma esfera de raio

Os triângulos retângulos $II'R$ e $RR'I$ têm a hipotenusa IR comum e os catetos $\overline{I'R} = \overline{IR'} = d$ iguais, de modo que são iguais, o que dá $\theta_1 = \theta'_1$, como queríamos demonstrar.

A explicação da lei da refração através do Princípio de Huygens está ilustrada na Fig. 6.25, a partir de uma frente de onda inicial II' . Novamente, $\overline{I'R} = d = v_1 t$ é a distância de II' à superfície de separação. No meio 2, a velocidade de fase da onda é v_2 , de forma que, quando a frente de onda secundária emanada de I' atinge R , a frente de onda esférica secundária emanada de I terá um raio $d' = v_2 t$. A frente

cresce. Pela (6.7.4), a refração do som assim produzida tende a desviá-lo para cima quando se propaga num lugar descampado, diminuindo a audibilidade para grandes distâncias. Ao pôr-do-sol, o ar perto da superfície esfria mais rapidamente do que as camadas superiores, produzindo o efeito inverso: o som é refratado para baixo, tornando os sons distantes mais audíveis do que em condições usuais.

6.8 — Interferência em mais dimensões

Na Seção 5.5, discutimos a interferência de ondas em uma dimensão. Em duas ou três dimensões, fenômenos de interferência dão origem a novos efeitos.

Consideremos, por exemplo, a experiência ilustrada na Fig. 6.26, que, com relação à luz, foi primeiro realizada por Thomas Young, em 1802. Um anteparo opaco tem dois pequenos orifícios O_1 e O_2 (de diâmetro $\ll \lambda$) separados por uma distância d . Uma fonte de ondas puntiformes F é colocada sobre o eixo, a grande distância do anteparo, de modo que, ao chegar a ele, os dois orifícios são atingidos pela mesma frente de onda, aproximadamente plana. Isto implica que as porções da onda incidentes sobre O_1 e O_2 têm não só a mesma amplitude, mas também a mesma fase, ou seja, são coerentes.

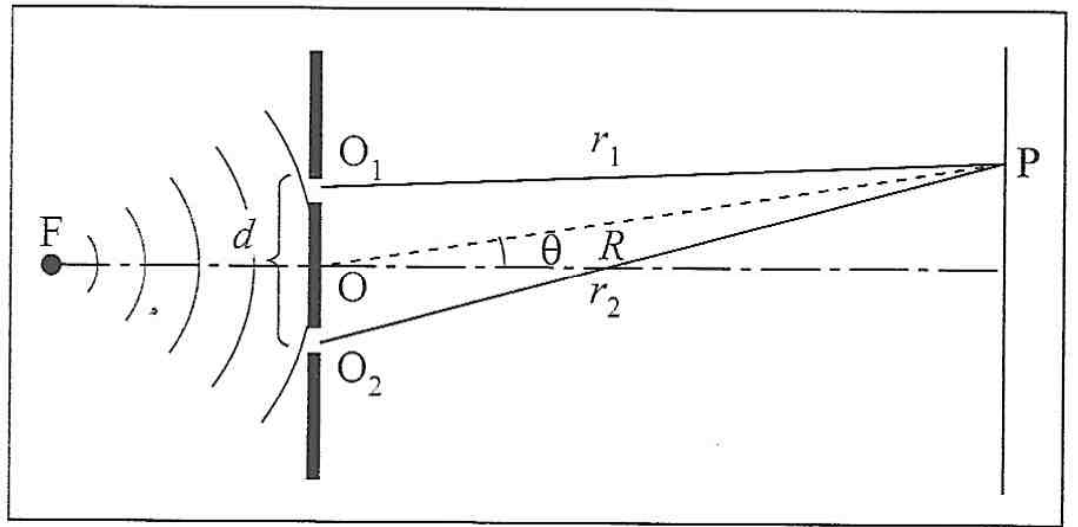


Figura 6.26 — Experimento de Young

Pelo Princípio de Huygens (Seção 6.6), O_1 e O_2 comportam-se como fontes puntiformes das quais emanam ondas esféricas, que irão se superpor num ponto de observação P à direita do anteparo. Pela (6.5.10), a função de onda resultante em P será

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + \varphi_2(P) = \frac{a}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t) + \frac{a}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t) \quad (6.8.1)$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias de O_1 e O_2 a P .

Para $R = \overline{OP} \gg d$, a Fig. 6.27 mostra que

$$\overline{OP} \approx \overline{OA} + \overline{O_1P} \quad \text{e} \quad \overline{O_2P} \approx \overline{OP} + \overline{O_2B}$$

o que equivale a

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\approx R - \frac{d}{2} \sin \theta \\ r_2 &\approx R + \frac{d}{2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6.8.2)$$

ou seja,

$$R \approx \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \gg d \sin \theta = r_2 - r_1 \quad (6.8.3)$$

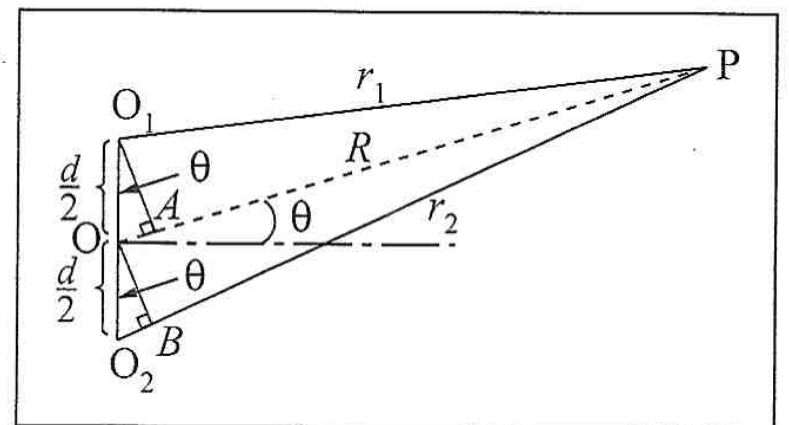


Figura 6.27 — Diferença de caminho

Podemos então aproximar $r_1 \approx r_2 \approx R$ nos denominadores da (6.8.1), e usar

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= R - \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \\ r_2 &= R + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.8.4)$$

bem como a identidade $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cdot \cos b$, obtendo

$$\boxed{\varphi(P) \approx 2a \cos \left[\frac{k}{2}(r_2 - r_1) \right] \frac{\cos(kR - \omega t)}{R}} \quad (6.8.5)$$

Note que podemos aproximar $r_1 \approx r_2 \approx R$ nas *amplitudes* na (6.8.1), desprezando as correções $\pm \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ na (6.8.4), mas não nas *fases* das duas ondas, porque a *diferença de caminho* $r_2 - r_1$ aparece multiplicada por $k = 2\pi/\lambda$ na *diferença de fase*

$$\boxed{\delta = k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}} \quad (6.8.6)$$

e $|r_1 - r_2|$ pode ser $\gg \lambda$.

Se chamarmos de

$$I_0(P) \propto a^2 / R^2 \quad (6.8.7)$$

a intensidade em P devida a um só dos dois orifícios (com o outro tampado), a (6.8.5) dá

$$\boxed{I(P) / I_0(P) = 4 \cos^2 \frac{\delta}{2}} \quad (6.8.8)$$

O 2.º membro exprime o resultado da *interferência* entre as ondas de mesma amplitude emanadas dos dois orifícios. De fato, o resultado coincide com a (5.5.5), na qual $I_1 = I_2 = I_0$ e $\delta_{12} = \delta$ (verifique!).

Temos *interferência construtiva*, com $I = 4I_0$, para

$$\boxed{\delta = 2n\pi \quad \{r_2 - r_1 = n\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}} \quad (6.8.9)$$

o que vale, em particular, ao longo do eixo. Temos *interferência destrutiva*, com $I = 0$ (intensidade resultante nula), para

$$\boxed{\delta = (2n + 1)\pi \quad \{r_2 - r_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}} \quad (6.8.10)$$

ou seja, a *interferência é construtiva ou destrutiva conforme a diferença de caminho seja de um número inteiro ou semi-inteiro de comprimentos de onda*.

No plano perpendicular ao anteparo que passa pelos orifícios, as (6.8.9) e (6.8.10) definem uma série de *hipérboles* com focos nas posições dos orifícios O_1 e O_2 (Fig. 6.28); a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos (O_1 e O_2) é constante. As hipérboles (6.8.10) são *linhas nodais* N (em linha interrompida na figura), intersecções de cristas (linha fina na figura) e vales (linha interrompida fina na figura) de ondas esféricas emanadas de O_1 e O_2 .

As hipérboles (6.8.9) são *linhas antinodais* A (em linha cheia na Fig. 6.28), intersecções de cristas com cristas ou vales com vales.

Os mesmos resultados se aplicam a ondas bidimensionais na superfície da água, por exemplo, onde a figura de interferência resultante pode ser visualizada com o auxílio de um tanque de ondas. Basta substituir as ondas esféricas na (6.8.1) por ondas circulares do tipo (6.5.11); os demais resultados se estendem imediatamente.

Em três dimensões, os resultados bidimensionais descrevem os efeitos de interferência produzidos por um *par de fendas* estreitas sobre as quais incide uma onda plana; no caso da luz, este foi o arranjo experimental usado por Young (Fig. 6.29). No anteparo de observação, aparece uma série de *franjas de interferência*, correspondentes à distribuição de intensidade I representada na Fig. 6.28.

Levando em conta a (6.8.3), também podemos escrever as condições (6.8.9) e (6.8.10) de interferência construtiva e destrutiva como

$$d \sin \theta = \begin{cases} n\lambda & (\text{construtiva}) \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda & (\text{destrutiva}) \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

(6.8.11)

que define um conjunto de *direções* θ_n associadas aos máximos e mínimos de interferência de ordem n .

Com ondas sonoras, os efeitos de interferência mais comumente observados são os batimentos e a formação de ondas estacionárias, mas efeitos tridimensionais análogos aos que acabamos de discutir ocorrem, por exemplo, em salas de concerto, criando zonas de silêncio ou de reforço indesejáveis.

6.9 — Efeito Doppler. Cone de Mach

(a) Efeito Doppler

A sereia de uma ambulância ou o apito de um trem soam mais agudos quando estão se aproximando de nós, mais graves quando estão se afastando. Trata-se de manifestações do *efeito Doppler*.

Como o som se propaga com velocidade v em relação a um referencial bem definido, que é o *referencial de repouso da atmosfera*, é preciso distinguir o caso em que o observador está em movimento e a fonte parada (nesse referencial) do caso em que a fonte está em movimento. Consideraremos inicialmente apenas *velocidades subsônicas*, ou seja, inferiores à velocidade v do som.

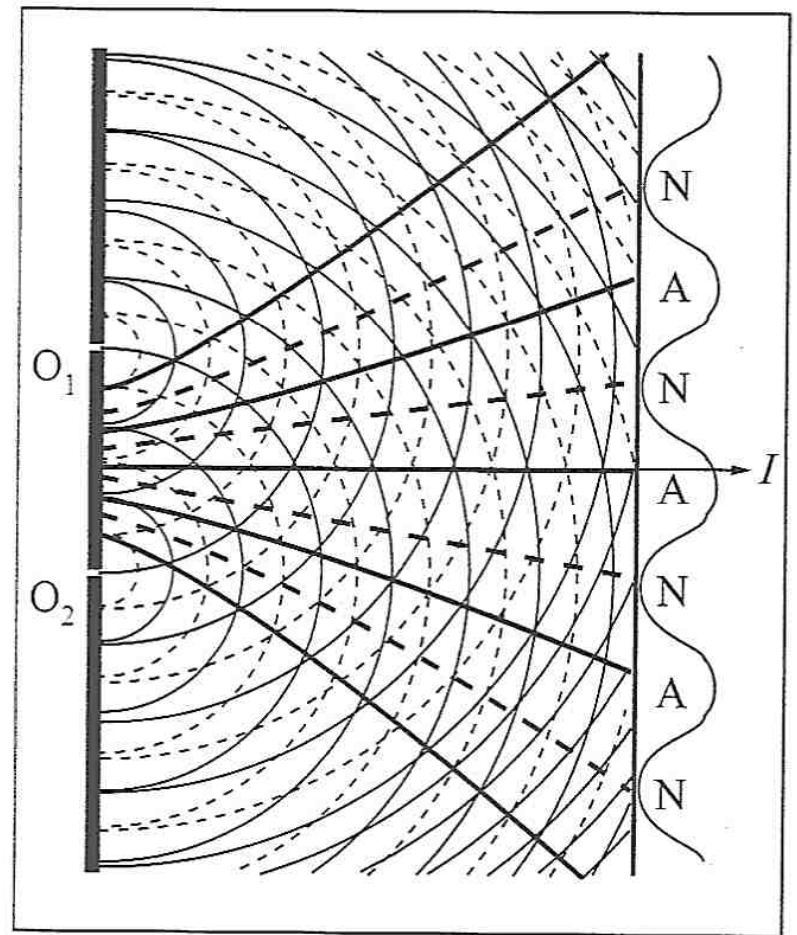


Figura 6.28 — Linhas nodais e antinodais

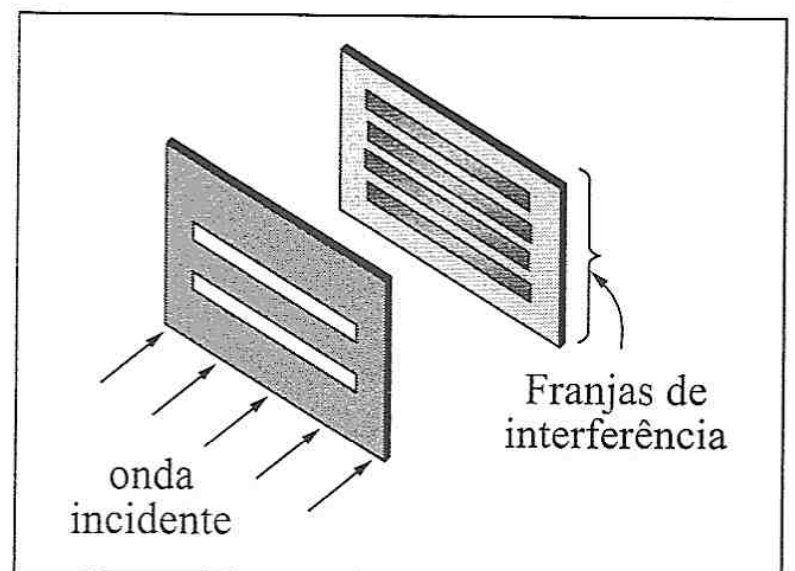


Figura 6.29 — Franjas de interferência

Fonte em repouso

Vamos chamar de u a *magnitude da velocidade do observador*, de modo que $u > 0$. A fonte sonora será tratada como puntiforme e supomos primeiro que está em repouso na atmosfera, emitindo som de frequência $\nu_0 = 1/T_0 = v/\lambda_0$, onde T_0 é o período e λ_0 o comprimento de onda correspondente. A frequência ν_0 *emitida* é o número de cristas de onda emitidas por unidade de tempo. A frequência ν *observada* (ouvida pelo observador) é o número de cristas de onda que passam pelo observador por unidade de tempo.

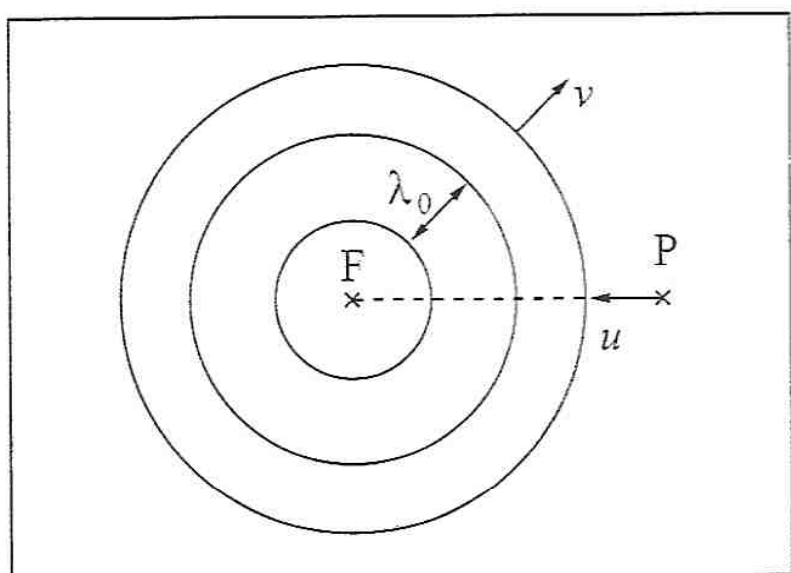


Figura 6.30 — Fonte em repouso

O espaçamento entre as cristas de onda esféricas emitidas é λ_0 . Se o observador P se move *em direção à fonte* F com velocidade u , ele percorre uma distância u por unidade de tempo e encontra (Fig. 6.30) u/λ_0 cristas de onda *adicionais*, além das ν/λ_0 que teriam passado por ele se ele estivesse em repouso. Logo, a frequência ν observada é

$$\nu = \underbrace{\frac{\nu}{\lambda_0}}_{\nu_0} + \frac{u}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{v} \right) \quad (6.9.1)$$

que é mais *aguda* do que ν_0 . Se o observador se *afasta* da onda com velocidade u , ele deixa de ser atingido por u/λ_0 cristas por unidade de tempo, e a frequência observada é mais *grave*:

$$\nu = \frac{\nu}{\lambda_0} - \frac{u}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{v} \right) \quad (6.9.2)$$

Logo, o efeito Doppler neste caso é dado por

$$\left(\begin{array}{c} \text{FONTE} \\ \text{PARADA} \end{array} \right) \quad \boxed{\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{u}{v} \right)} \quad \begin{array}{l} + \text{ para aproximação} \\ - \text{ para afastamento} \end{array} \quad (6.9.3)$$

Fonte em movimento

Suponhamos agora que o observador está em repouso na atmosfera, mas a fonte sonora se aproxima ou se afasta dele com velocidade de magnitude V .

Consideremos uma série 0, 1, 2, 3, ... de cristas de onda consecutivas emitidas pela fonte ao passar respectivamente pelas posições $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$ (Fig. 6.31), a intervalos de tempo de um período T_0 entre cada duas cristas consecutivas. Durante esse intervalo, a fonte se deslocou de VT_0 , de modo que, para um observador P do qual a fonte se *aproxima* (Fig.), o intervalo λ entre as cristas (comprimento de onda) é

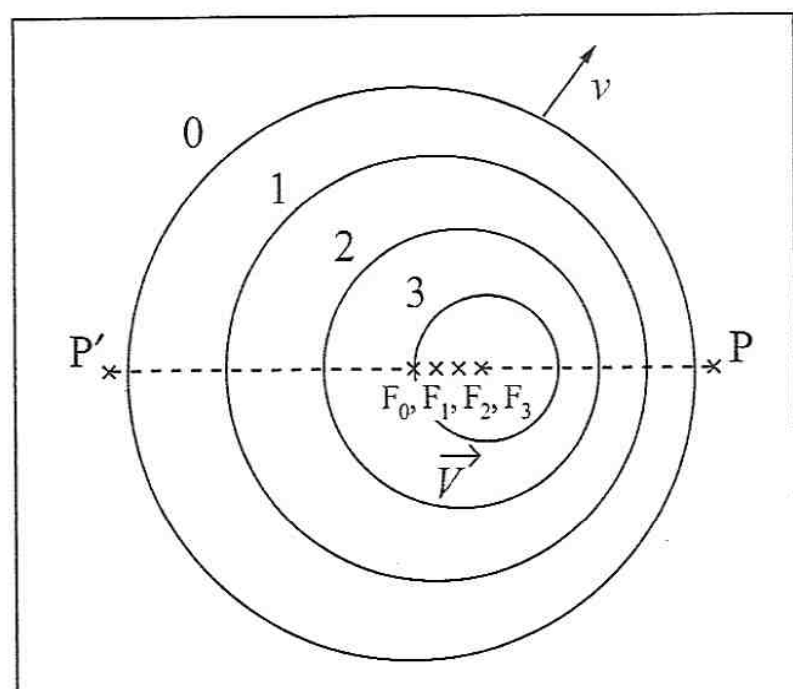


Figura 6.31 — Fonte em movimento

$$\lambda = \underbrace{\nu T_0}_{\lambda_0} - VT_0 = \lambda_0 \left(1 - \frac{V}{v} \right) \quad (6.9.4)$$

ou seja, é *menor* que λ_0 . Para um observador P' do qual a fonte se *afasta* (Fig.), o comprimento de onda λ' é

$$\lambda' = vT_0 + VT_0 = \lambda_0 \left(1 + \frac{V}{v} \right) \quad (6.9.5)$$

Como as cristas continuam se propagando com velocidade v , o número delas que atinge o observador P (P') por unidade de tempo é v/λ (v/λ'). Como $v/\lambda_0 = \nu_0$, a frequência ν observada é então, pelas (6.9.4), (6.9.5)

$$\left(\begin{array}{c} \text{OBSERVADOR} \\ \text{PARADO} \end{array} \right) \quad \boxed{\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{V}{v}}} \quad \begin{array}{l} - \text{ para aproximação} \\ + \text{ para afastamento} \end{array} \quad (6.9.6)$$

que é a fórmula do efeito Doppler para uma *fonte móvel* e um observador em repouso. Como no caso da (6.9.3), o som ouvido é *mais agudo para aproximação, mais grave para afastamento*.

Se a fonte se move com velocidade *muito menor* que a velocidade do som, ou seja, se $\varepsilon = V/v \ll 1$, podemos usar a fórmula

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (6.9.7)$$

desprezando correções da ordem de ε^2 ($\ll \varepsilon$), e a (6.9.6) fica

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{V}{v} \right) \quad (V \ll v) \quad (6.9.8)$$

que poderíamos identificar com a (6.9.3), em termos de *velocidade relativa* de aproximação (ou de afastamento) entre fonte e observador, que é u num caso e V no outro. Entretanto, a diferença entre as (6.9.3) e (6.9.6) no caso geral mostra que o efeito Doppler para ondas sonoras não depende só da velocidade relativa.

Isto se prende ao fato de que a atmosfera define um referencial privilegiado para a propagação de ondas sonoras, conforme já foi observado.

Fonte e observador em movimento

Neste caso, superpõem-se os dois efeitos discutidos acima. O movimento da fonte altera o comprimento de onda para $\lambda_0 (1 \pm V/v)$, e o movimento do observador multiplica por um fator $(1 \pm u/v)$ o número de cristas de onda por ele encontradas, de modo que o efeito Doppler combinado é dado por

$$\left(\begin{array}{c} \text{FONTE} \\ \text{E OBSERVADOR} \\ \text{MÓVEIS} \end{array} \right) \quad \boxed{\nu = \nu_0 \left(\frac{1 \pm \frac{u}{v}}{1 \mp \frac{V}{v}} \right)} \quad \begin{array}{l} \text{Sinais superiores (inferiores)} \\ \text{para aproximação (afastamento)} \end{array} \quad (6.9.9)$$

Movimento numa direção qualquer

Em todos os casos tratados, foi suposto que a direção de movimento da fonte passa pelo observador, ou vice-versa. Suponhamos gora que a fonte se move numa direção que faz, num dado instante, um ângulo θ com a direção que liga a fonte ao ponto de observação P (Fig. 6.32), e que a distância da fonte ao ponto de observação, $r_0 = \overline{F_0P}$, seja suficientemente grande

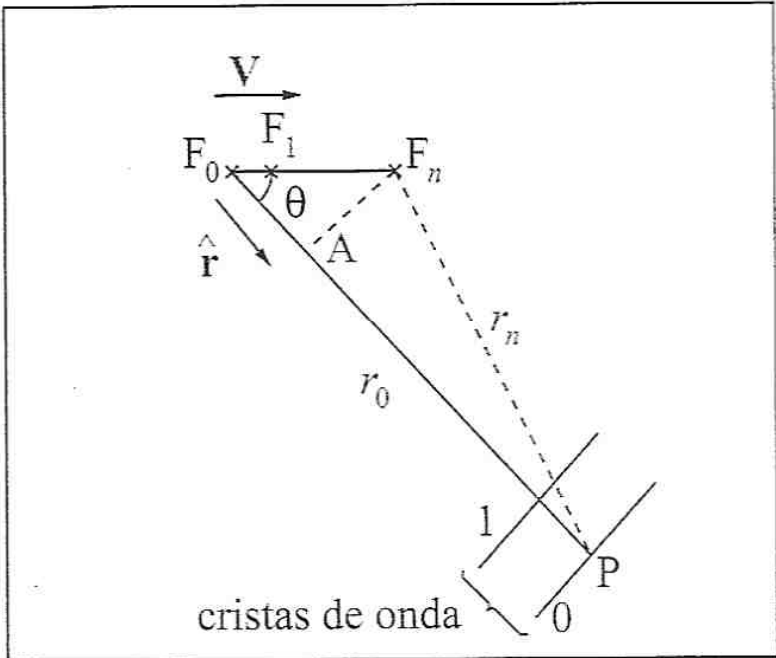


Figura 6.32 — Direção qualquer de movimento

do observador, de modo que podemos aplicar a (6.9.6) para aproximação, substituindo V por $V_r = V \cos \theta$.

para que as porções de cristas de onda que atingem P possam ser identificadas com frentes de onda planas (pág. 140 e Fig. 6.17). Essas frentes de onda são perpendiculares à direção F_0P , cujo vetor unitário designaremos por \hat{r} .

Podemos decompor V numa *componente radial*

$$V_r = (V \cdot \hat{r})\hat{r} = V \cos \theta \hat{r} \tag{6.9.10}$$

e numa componente V_{\parallel} , paralela às frentes de onda que atingem P . Como um deslocamento da fonte paralelamente a essas frentes não afeta em nada o seu espaçamento, a componente V_{\parallel} não contribui para o efeito Doppler. Por outro lado, V_r aponta na direção

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{V \cos \theta}{V}} \tag{6.9.11}$$

que é a expressão geral do efeito Doppler para uma fonte em movimento numa direção qualquer. Para $\theta = 0$, obtemos como caso particular a (6.9.6) para aproximação; tomando $\theta = \pi$ obtemos o caso do afastamento.

Um tratamento análogo se aplica ao movimento do observador numa direção qualquer.

(b) Cone de Mach

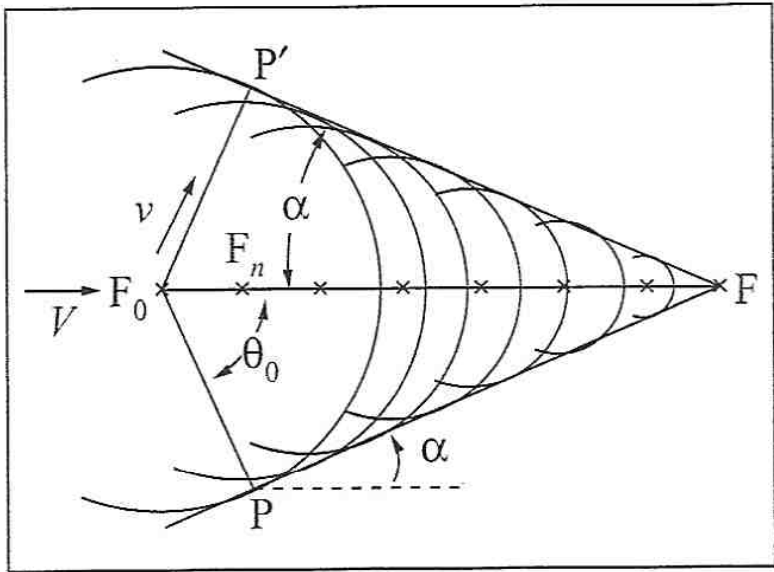


Figura 6.33 — Cone de Mach

Suponhamos agora que a fonte se mova com *velocidade supersônica* $V > v$ (o que havíamos excluído antes). A Fig. 6.33 mostra o que acontece quando repetimos neste caso a construção feita na Fig. 6.30. Em lugar de permanecer dentro das frentes de onda por ela geradas, como naquele caso, a fonte vai passando à frente delas.

Após um tempo t , a frente de onda esférica gerada em F_0 tem um raio $\overline{F_0P} = vt$, enquanto a fonte já se deslocou até F , com $\overline{F_0F} = Vt$ (Fig. 6.32). Todas as ondas geradas pela fonte entre F_0 e F ficam contidas dentro de um cone com vértice em F e eixo F_0F , cujas

geratrizes são as envoltórias das frentes de onda e cujo ângulo de abertura α é dado por (Fig. 6.33)

$$\text{sen } \alpha = \frac{v}{V} \tag{6.9.12}$$

Este cone chama-se o *cone de Mach*; α é o *ângulo de Mach*, e a condição para deslocamento supersônico é que o *número de Mach* V/v seja > 1 .

Consideremos as frentes de onda emitidas num pequeno entorno da posição F_0 , detectadas no ponto de observação P (Fig. 6.32). Se subdividirmos esse entorno F_0F_n em n intervalos iguais, correspondentes a intervalos de tempo iguais Δt , a frente emitida de F_0 em $t = 0$ chega a P no instante $t_0 = r_0/v$, ao passo que a frente emitida de F_n em $t = n\Delta t$ chega a P no instante

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_n}{V} \quad (6.9.13)$$

onde, pela Fig. 6.33,

$$r_n \approx r_0 - \overline{F_0 A} = r_0 - \underbrace{\overline{F_0 F_n}}_{V \cdot n\Delta t} \cos \theta$$

de modo que, na (6.9.13),

$$t_n = n\Delta t + \underbrace{\frac{r_0}{V}}_{t_0} - n\Delta t \frac{V}{V} \cos \theta$$

ou seja

$$\boxed{t_n - t_0 = n\Delta t \left(1 - \frac{V}{v} \cos \theta \right)} \quad (6.9.14)$$

No caso subsônico $V < v$, a (6.9.14) mostra que as frentes de onda chegam ao ponto de observação P na mesma ordem temporal de sucessão em que são emitidas, mas isto não é necessariamente válido para $V > v$. Em particular, neste caso supersônico, existe um ângulo θ_0 para o qual *todas as frentes de onda chegam a P no mesmo instante t_0* : pela (6.9.14), θ_0 é dado por

$$\boxed{\cos \theta_0 = \frac{V}{v} = \sin \alpha \quad \left\{ \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha \right.} \quad (6.9.15)$$

onde usamos a (6.9.12).

Nesta direção, perpendicular à superfície do cone de Mach, a acumulação das frentes de onda que chegam simultaneamente a P produz uma *onda de choque*. Este é um efeito bem conhecido no caso de um avião que atinge velocidade supersônica; na Fig. 6.33, F_0F representaria a trajetória do avião e F_0P o percurso da onda de choque que atinge o ponto de observação P. O análogo bidimensional do cone de Mach, nas ondas sobre a superfície da água, é a *esteira* deixada por um barco de velocidade maior que a das ondas.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6

1. Uma experiência de demonstração divertida consiste em mudar a tonalidade da voz enchendo a boca de gás hélio: uma voz grave transforma-se em aguda (cuidado: não procure fazer isso por sua conta! — inalar hélio é perigoso, podendo levar à sufocação). Para explicar o efeito, admita que os comprimentos de onda associados à voz são determinados pelas dimensões das cordas vocais, laringe e boca, estas funcionando como cavidades ressonantes, de modo que a variação de tonalidade seria devida unicamente à variação da velocidade do som (embora isto não seja bem correto). (a) Calcule a velocidade do som no hélio a 20°C. É um gás monoatômico, de massa atômica ≈ 4 g/mol, com $\gamma \approx 1,66$. A constante universal dos gases R vale 8,314 J/mol K. (b) Explique o efeito, calculando a razão entre as frequências do som no hélio e no ar para o mesmo comprimento de onda.
2. Um alto-falante de um aparelho de som emite 1 W de potência sonora na frequência $\nu = 100$ Hz. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções, deter-

mine, num ponto situado a 2 m de distância do alto-falante: (a) o nível sonoro em db; (b) a amplitude de pressão; (c) a amplitude de deslocamento. Tome a densidade do ar como $1,3 \text{ kg/m}^3$ e a velocidade do som como 340 m/s (d). A que distância do alto-falante o nível sonoro estaria 10 db abaixo do calculado em (a)?

3. Que comprimento deve ter um tubo de órgão aberto num extremo e fechado no outro para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala média, $\nu = 262 \text{ Hz}$, a 15°C , quando a velocidade do som no ar é de 341 m/s ? Qual é a variação de frequência $\Delta\nu$ quando a temperatura sobe para 25°C ?

4. Na experiência da pág. 136, o diapasão emite a nota lá de 440 Hz . À medida que vai baixando o nível da água no tubo, a 1.ª ressonância aparece quando a altura da coluna de ar é de $17,5 \text{ cm}$ e a 2.ª quando é de $55,5 \text{ cm}$. (a) Qual é o comprimento de onda? (b) Qual é o valor da correção terminal (pág. 135)? (c) Estime o diâmetro do tubo. (d) Qual é a velocidade do som no tubo?

5. O tubo de Kundt, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa M que se faz vibrar com uma frequência ν conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) e na outra por um pistão P que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência ν , o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida.

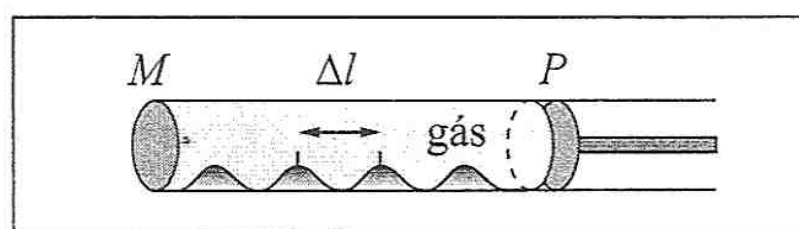


Figura P.1

Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento Δl (Fig. P.1), que se pode medir. (a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos? (b) Qual é a relação entre Δl , ν e a velocidade do som no gás? (c) Com o tubo cheio de CO_2 a 20°C e $\nu = 880 \text{ Hz}$, o espaçamento médio medido é de $15,2 \text{ cm}$. Qual é a velocidade do som no CO_2 a 20°C ?

6. (a) Mostre que, para uma onda sonora harmônica de frequência angular ω , em três dimensões, num fluido cuja densidade de equilíbrio é ρ_0 , o deslocamento \mathbf{u} (que neste caso é um vetor!) está relacionado com a pressão p por: $\text{grad } p = \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}$. (b) Considere uma onda sonora harmônica que se propaga no semi-espaco $x > 0$, com $p = p(x, y, z, t)$, e suponha que o plano $x = 0$ é uma parede fixa, rígida. Mostre, utilizando o resultado da parte (a), que p tem de satisfazer a condição de contorno $\partial p / \partial x = 0$ para $x = 0$, qualquer que seja t . Em particular, isto vale na extremidade fechada de um tubo de órgão (pg. 137).

7. Uma onda sonora plana monocromática de pressão dada por [cf. (6.5.7)]

$$p_i = \wp \cos(-k_x x + k_y y - \omega t)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / v^2$ (v = velocidade do som), incide com ângulo de incidência θ_1 , sobre o plano $x = 0$, ocupado por uma parede rígida (Fig. P.2), dando origem à onda refletida, de pressão dada por

$$p_r = \wp' \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$$

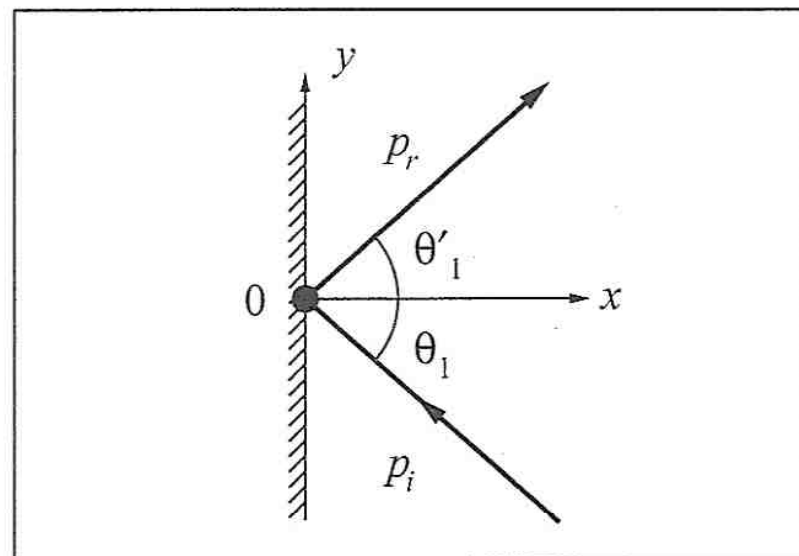


Figura P.2

associada ao ângulo de reflexão θ'_1 (Fig.). (a) Verifique que $k_x = k \cos \theta_1$, $k_y = k \sin \theta_1$. (b) Aplique a condição de contorno do problema 6 à onda total $p = p_i + p_r$, e determine \wp' em

função de ρ , usando (b), e interprete o resultado. Mostre que, no caso particular em que $k_y = 0$, ele se reduz ao que foi encontrado na pag. 135 para a reflexão na extremidade fechada de um tubo de órgão.

8. Uma lente esférica plano-convexa delgada é formada por um meio onde o som se propaga com velocidade v_2 , limitado por uma face plana e outra esférica de raio de curvatura R ; o raio $h = \overline{IA}$ da face plana (Fig. P.3) é suposto $\ll R$. No meio externo à lente, o som se propaga com velocidade v_1 , com $v_2 = v_1/n$, onde n é o índice de refração relativo. Supomos $n > 1$. Nestas condições, uma onda plana incidente perpendicularmente sobre a face plana é *focalizada* pela lente em seu foco F . A distância $f = \overline{OF}$ do foco à face curva chama-se *distância focal* (Fig.), e $\overline{AO} = e$ é a espessura da lente. (a) Mostre que, para $h \ll R$, tem-se $e \approx h^2/(2R)$. Para isso, você poderá utilizar a aproximação:

$\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon$, válida para $|\varepsilon| \ll 1$. (b) Com o auxílio do Princípio de Huygens, mostre que $f = R/(n - 1)$. *Sugestão:* Partindo da frente de onda plana incidente II' (Fig.), iguale o tempo que as frentes de onda secundárias levam para convergir no foco passando pela periferia da lente (caminhos $\overline{I'F}$, \overline{IF}) e pelo centro (caminho $\overline{AO} + \overline{OF}$) e use o resultado da parte (a).

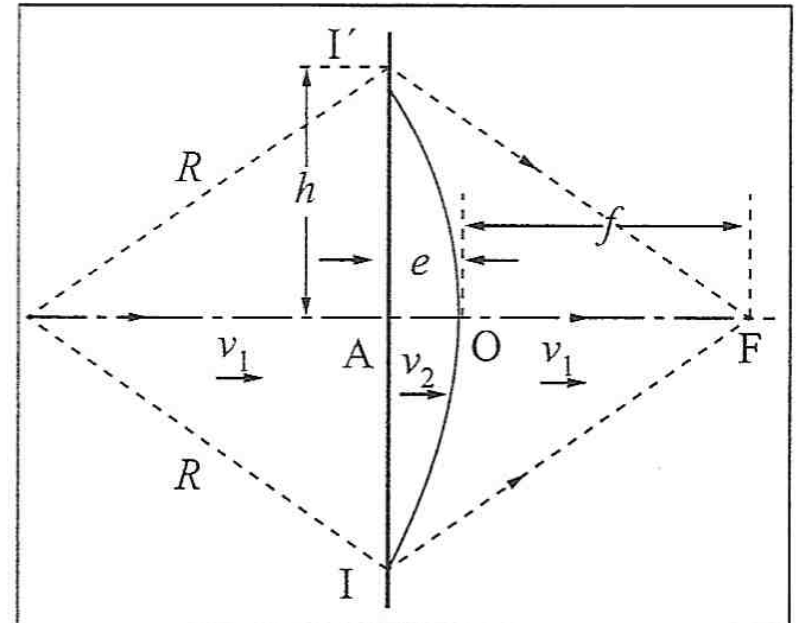


Figura P.3

9. Duas fontes sonoras A e B oscilam em fase com a frequência de 20 kHz, no ar, emitindo ondas esféricas; a distância $\overline{AB} = 3d$ é de 10,2 m. Considere o plano perpendicular a \overline{AB} que passa pelo terço O do segmento \overline{AB} : $\overline{AO} = d = \frac{1}{2} \overline{OB}$ (Fig. P.4). Ache as distâncias x do ponto O associadas aos dois primeiros mínimos e aos dois primeiros máximos de interferência sobre esse plano.

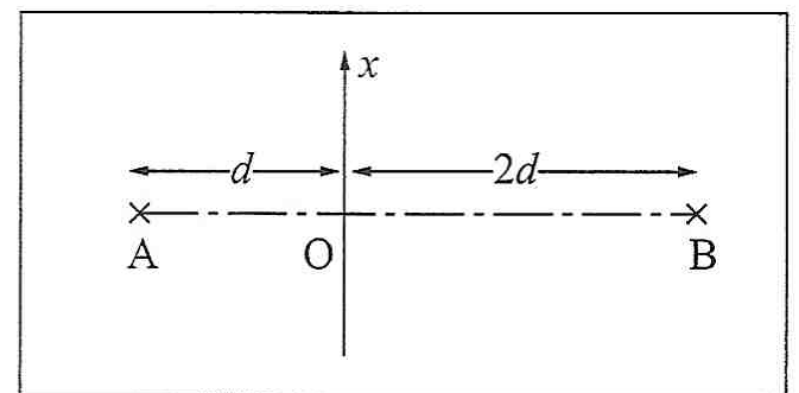


Figura P.4

Você poderá utilizar a aproximação: $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$); a velocidade do som no ar é de 340m/s. Se as ondas emitidas por A e B têm a mesma amplitude, qual é a razão da intensidade dos máximos à dos mínimos?

10. Uma onda sonora plana harmônica de comprimento de onda λ incide perpendicularmente sobre um anteparo opaco com três fendas igualmente espaçadas, de espaçamento $d \gg \lambda$. Para pontos de observação P situados a distâncias $R \gg d$, determine as direções de observação θ (Fig. P.5) em que aparecem mínimos de interferência, generalizando a (6.8.11) de duas para três fendas. Qual é a intensidade nos mínimos? *Sugestão:* Você terá de calcular a resultante de três oscilações com defasagens consecutivas δ iguais. Use a notação complexa e a fórmula (demonstre-a!)

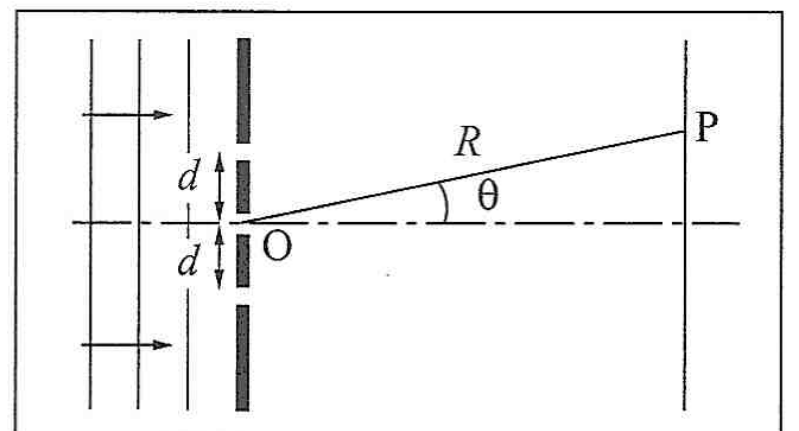


Figura P.5

$$|1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta}|^2 = \left| \frac{e^{3i\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\delta\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

O mesmo método se aplica a um número qualquer de fendas igualmente espaçadas.

11. Uma ambulância, em velocidade constante e com sua sireia sempre ligada, passa ao lado de um observador parado. A tonalidade da sireia percebida pelo observador varia de um semitom da escala cromática (pag. 134) entre quando ela está se aproximando, vindo de longe, e quando se afasta, já distante. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Calcule a velocidade da ambulância (em km/h).
12. Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos, com velocidades de mesma magnitude. Um deles vem apitando. A frequência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de 348 Hz, quando estão se aproximando, e 259 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. (a) Qual é a velocidade dos trens (em km/h)? (b) Qual é a frequência do apito?
13. Numa estrada de montanha, ao aproximar-se de um paredão vertical que a estrada irá contornar, um motorista vem buzinando. O eco vindo do paredão interfere com o som da buzina, produzindo 5 batimentos por segundo. Sabendo-se que a frequência da buzina é de 200 Hz e a velocidade do som no ar é de 340 m/s, qual é a velocidade do carro (em km/h)?
14. Uma fonte sonora fixa emite som de frequência ν_0 . O som é refletido por um objeto que se aproxima da fonte com velocidade u . O eco refletido volta para a fonte, onde interfere com as ondas que estão sendo emitidas, dando origem a batimentos, com frequência $\Delta\nu$. Mostre que é possível determinar a magnitude $|u|$ da velocidade do objeto móvel em função de $\Delta\nu$, ν_0 e da velocidade do som v .

O mesmo princípio é utilizado (com ondas eletromagnéticas em lugar de ondas sonoras) na detecção do excesso de velocidade nas estradas, com auxílio do radar.

15. Dois carros (1 e 2) trafegam em sentidos opostos numa estrada, com velocidades de magnitudes v_1 e v_2 . O carro 1 trafega contra o vento, que tem velocidade V . Ao avistar o carro 2 o motorista do carro 1 pressiona sua buzina, de frequência ν_0 . A velocidade do som no ar parado é v . Qual é a frequência ν do som da buzina percebida pelo motorista do carro 2? Com que frequência ν' ela é ouvida pelo motorista de um carro 3 que trafega no mesmo sentido que o carro 1 e com a mesma velocidade?
16. Complete a teoria do efeito Doppler para movimento numa direção qualquer (pág. 150) calculando a frequência ν percebida por um observador quando a fonte, de frequência ν_0 , está em repouso na atmosfera e o observador se move ao longo de uma direção P_0P com velocidade de magnitude u . No instante considerado, a direção PF que liga o observador à fonte (Fig. P.6) faz um ângulo θ com a direção do movimento. Verifique que se recai nos resultados obtidos no texto para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

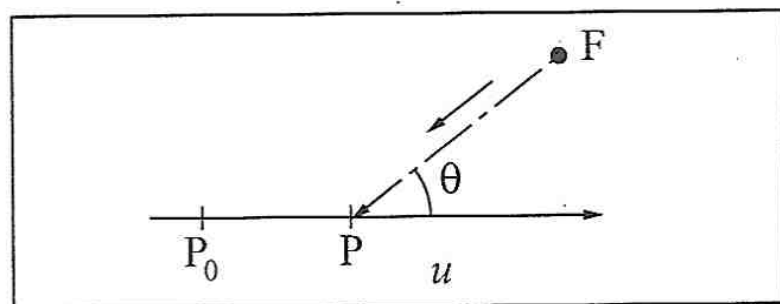


Figura P.6

17. Mostre que se pode obter o efeito Doppler a partir da transformação de Galileu (1, Seção 13.1). (a) Considere primeiro uma onda sonora harmônica em uma dimensão, para uma fonte sonora em repouso no meio, de frequência ν_0 . Escreva a expressão da onda num ponto x no instante t , no referencial S do meio. Considere agora um observador que se

desloca com velocidade u em relação a S , na direção θ . Relacione x com a coordenada x' do observador, no referencial S' que se desloca com ele. Substitua na expressão da onda e interprete o resultado. (b) Considere agora o caso em que o observador se move com velocidade u numa direção qualquer. Generalize o resultado de (a), usando a transformação de Galileu geral, e mostre que se obtém a mesma expressão para o efeito Doppler encontrada no Problema 16. Parta da expressão geral (6.5.3) para uma onda plana.

18. Um avião a jato supersônico está voando a Mach 2 (o dobro da velocidade do som). (a) Qual é o ângulo de abertura do cone de Mach? (b) 2,5 s depois de o avião ter passado diretamente acima de uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Qual é a altitude do avião em relação à casa?

Capítulo 7

TEMPERATURA

7.1 — Introdução

Vamos iniciar o estudo de uma nova área da física, a termodinâmica, que lida com fenômenos associados aos conceitos de *temperatura* e *calor*. A natureza da termodinâmica é muito diferente da da mecânica, que estudamos até aqui.

As leis da mecânica aplicam-se, em princípio, tanto a objetos macroscópicos como aos microscópicos, embora sofram modificações profundas na escala atômica e subatômica (mecânica quântica). Um gás contido num recipiente de dimensões macroscópicas é formado de um número N gigantesco (tipicamente $N \sim 10^{24}$) de partículas (moléculas ou átomos). Se tratarmos cada uma como um ponto material, desprezando sua estrutura interna, teremos um sistema mecânico de $3N$ graus de liberdade (1, Seção 11.1). A *descrição microscópica* deste sistema como um *sistema mecânico* envolveria equações de movimento para todos estes graus de liberdade. Não somente é inconcebível que conseguíssemos resolver todas essas equações, mas também não teríamos nenhum interesse em fazê-lo: se conhecêssemos a solução, não saberíamos o que fazer com ela, nem como interpretá-la. As partículas do gás movem-se de forma extremamente complicada e desordenada, colidindo constantemente umas com as outras e com as paredes do recipiente, variando apreciavelmente numa escala de distâncias $\sim 10^{-8}$ cm e de tempos $\sim 10^{-13}$ s.

A *descrição macroscópica* do gás como um *sistema termodinâmico* envolve somente um número muito pequeno de parâmetros: se se trata de uma substância pura (hidrogênio, por exemplo), apenas três *variáveis macroscópicas*: a pressão P , o volume V e a temperatura T . Variáveis como a pressão e a temperatura representam *valores médios* de grandezas microscópicas. A pressão, por exemplo, está relacionada com o valor médio da transferência de momento nas colisões das partículas com as paredes, como no caso da pressão exercida por um jato de areia (1, Seção 9.4). A temperatura, conforme veremos adiante, está relacionada com a energia cinética média das partículas.

A descrição termodinâmica é sempre, portanto, uma descrição macroscópica, que só se aplica a sistemas com um número suficientemente grande de partículas. Não tem sentido perguntar qual é a temperatura de um sistema de 2 ou 3 átomos isolados!

O *estado termodinâmico* de um gás, descrito por (P, V, T) , só dá portanto algumas informações médias sobre seu estado dinâmico, como sistema microscópico de $3N$ graus de liberdade, e é compatível com um número descomunal de estados dinâmicos diferentes, atravessados pelo sistema em sua evolução dinâmica.

Vemos assim que a descrição termodinâmica é uma descrição *estatística*, regida por leis de mesma natureza que aquelas empregadas por uma companhia de seguros. A validade

destas leis resulta precisamente do fato de que se aplicam a sistemas formados por um *grande número de elementos*.

Historicamente, as leis da termodinâmica foram obtidas como leis empíricas, de natureza fenomenológica. Somente mais tarde, com a formulação da *teoria cinética dos gases*, precursora da teoria atômica da matéria, é que se procurou a explicação microscópica das leis da termodinâmica.

Este processo culminou com o aparecimento da *mecânica estatística* e da *termodinâmica estatística*.

Inicialmente, vamos partir da formulação empírica das leis, sem nos preocuparmos com sua explicação microscópica. A seguir, discutiremos a explicação fornecida pela teoria cinética dos gases.

Partindo de um pequeno número de leis básicas, a termodinâmica leva a muitas consequências importantes, de grande generalidade. Uma vez obtida a explicação microscópica das leis básicas, não é preciso procurá-la para cada uma das consequências.

A 1.^a lei da termodinâmica não passa da extensão do princípio de conservação da energia, levando em conta o *calor* como forma de energia. Quando o movimento de um pêndulo se amortece pela resistência do ar, a energia mecânica dissipada por esta força de atrito é transmitida ao movimento desordenado das moléculas de ar: o calor corresponde a esta forma *desordenada* de energia (1, Seção 7.6).

Com a 2.^a lei da termodinâmica, aparece pela primeira vez na física a “seta do tempo”, ou seja, o fato de que existe uma direção espontânea de ocorrência dos fenômenos, que é geralmente irreversível. A conexão entre a 2.^a lei e a irreversibilidade é um dos problemas mais profundos da física.

7.2 — Equilíbrio térmico e a lei zero da termodinâmica

Um *sistema termodinâmico* consiste geralmente numa certa quantidade de matéria contida dentro de um *recipiente*. As paredes podem ser fixas ou móveis (através de um pistão, por exemplo).

A natureza das paredes afeta de forma fundamental a interação entre o sistema e o *meio externo* que o cerca. Se colocarmos água dentro de um recipiente de paredes metálicas, como uma panela, e depois o levarmos ao fogo ou colocarmos numa geladeira, o estado da água é alterado pela interação com esses diversos ambientes. Se, em lugar disso, colocarmos a água numa garrafa térmica fechada, que é um recipiente de paredes duplas, entre as quais se faz o vácuo (para impedir a condução de calor) e metalizadas (para evitar transferência de calor por radiação), podemos aproximar da situação limite ideal do *isolamento térmico perfeito*, em que o *estado do sistema contido no recipiente não é afetado pelo ambiente externo* em que é colocado. Uma parede ideal com essa propriedade chama-se *parede adiabática*; além da parede de uma garrafa térmica, pode ser também aproximada por uma parede espessa de madeira ou asbesto. Uma parede não-adiabática chama-se *diatérmica* (o que significa “transparente ao calor”): um exemplo é uma parede metálica fina.

Quando dois sistemas estão separados por uma parede diatérmica, diz-se que estão em contato *térmico*. Um sistema contido num recipiente de paredes adiabáticas chama-se *sistema isolado*. É um fato experimental que um *sistema isolado sempre tende a um estado em que nenhuma das variáveis macroscópicas que o caracterizam muda mais com o tempo*. Quando ele atinge esse estado, diz-se que está em *equilíbrio térmico*.

O tempo necessário para que um sistema atinja o equilíbrio térmico pode ser extremamente grande. O fato de que variáveis *macroscópicas* características do sistema permaneçam

constantes no equilíbrio não significa que as condições sejam estáticas do ponto de vista microscópico. Assim, num gás em equilíbrio térmico, as moléculas encontram-se constantemente em movimento desordenado (agitação térmica): à medida que nos aproximamos da escala microscópica, encontramos *flutuações* das grandezas macroscópicas em torno de seus valores médios. A termodinâmica clássica trata de *sistemas em equilíbrio térmico*. Desenvolvimentos recentes da termodinâmica estão relacionados com sua extensão a sistemas fora do equilíbrio.

O conceito de temperatura está associado a uma propriedade comum de sistemas em equilíbrio térmico. A sensação subjetiva de temperatura não fornece um método confiável de aferição. Assim, num dia frio, ao tocarmos num objeto metálico, temos a sensação de que está a temperatura mais baixa do que um objeto de madeira, embora ambos se encontrem à mesma temperatura: a razão é que, por condução, o objeto metálico remove mais rapidamente calor da ponta de nossos dedos. Para definir de forma objetiva o conceito de temperatura, temos de examinar com mais detalhes as propriedades do equilíbrio térmico.

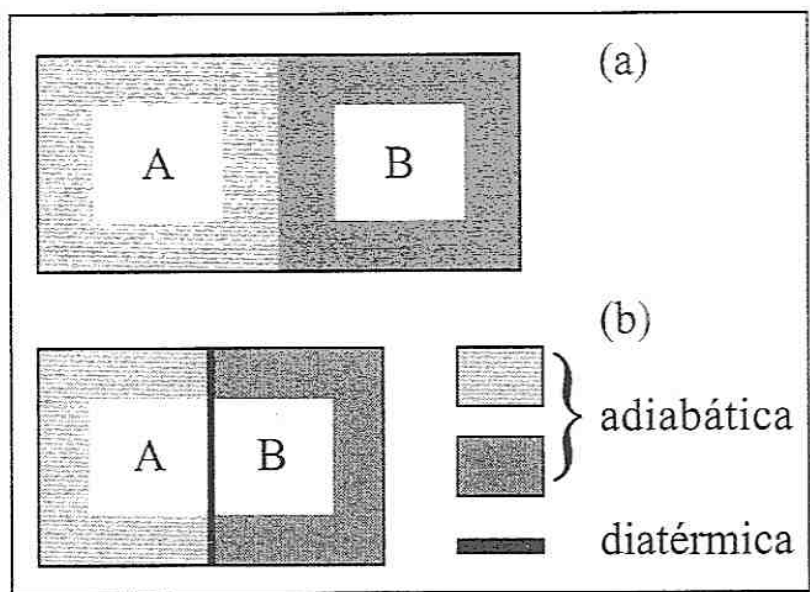


Figura 7.1 — Contato térmico

Consideremos dois sistemas isolados A e B. Cada um deles, independentemente, atinge equilíbrio térmico; se estão separados por paredes adiabáticas (Fig. 7.1(a)), o estado termodinâmico de equilíbrio de um deles não é afetado pelo outro. Se agora substituirmos as paredes de separação adiabáticas por uma parede de separação diatérmica (Fig. 7.1(b)), colocando A e B em contato térmico, o sistema evoluirá em geral para um novo estado de equilíbrio térmico diferente, ou seja, as variáveis macroscópicas tanto de A quanto de B mudarão com o tempo, até que o sistema com A e B em contato térmico atinja equilíbrio térmico. Diz-se neste caso que *A está em equilíbrio térmico com B*.

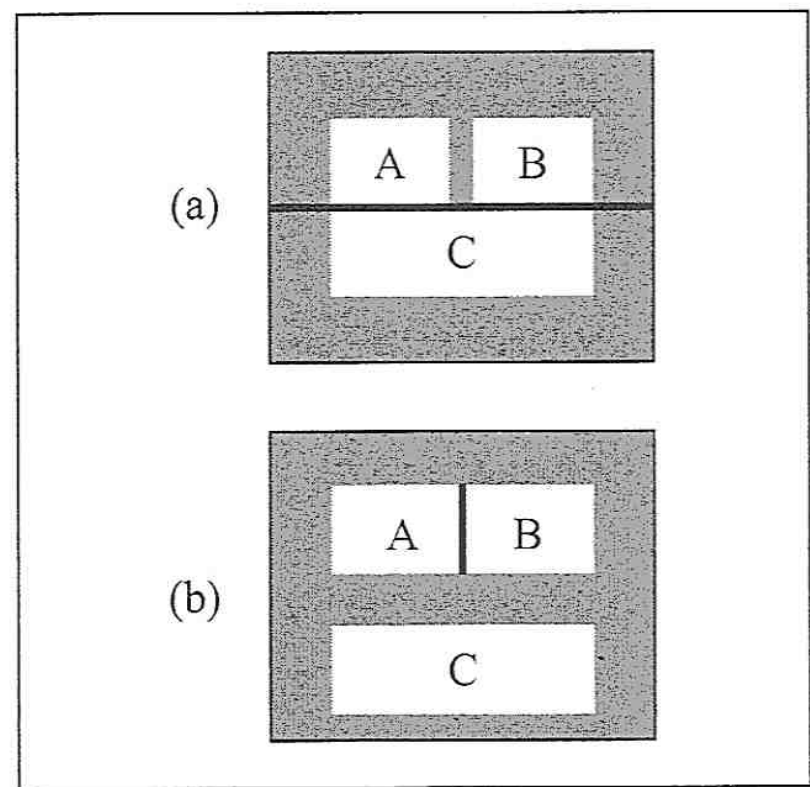


Figura 7.2 — Lei zero da termodinâmica

Suponhamos agora que A e B estão ambos em equilíbrio térmico com C, mas separados um do outro por uma parede adiabática (Fig. 7.2(a)). Que acontece se a substituirmos por uma parede diatérmica? (Fig. 7.2 (b)). É um *fato experimental* que, nesta situação, A e B também estarão em equilíbrio térmico entre si. Este fato é chamado muitas vezes de *lei zero da termodinâmica: Dois sistemas em equilíbrio térmico com um terceiro estão em equilíbrio térmico entre si*. Para mostrar que este fato não decorre de nenhuma necessidade lógica, basta notar que um eletrodo de cobre em equilíbrio elétrico com uma solução diluída de ácido sulfúrico e um eletrodo de zinco em equilíbrio elétrico com a mesma solução *não* estão em equilíbrio elétrico entre si. Se os colocarmos em contato elétrico através de um fio de cobre, passará uma corrente elétrica de um eletrodo para o outro (pilha voltaica).

A noção intuitiva de temperatura leva à idéia de que dois sistemas em equilíbrio térmico entre si têm a mesma temperatura. E, graças à lei zero da termodinâmica podemos medir temperaturas com o auxílio de um termômetro. Para saber se dois sistemas A e B têm a mesma temperatura, não é necessário colocá-los em contato térmico: basta verificar se ambos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C, que é o “termômetro”: a lei zero garante então que A e B também estão em equilíbrio térmico um com o outro.

7.3 — Temperatura

Um sistema termodinâmico especialmente simples é um *fluido* (líquido ou gás), *homogêneo*, contido num recipiente de volume V . A forma do recipiente é irrelevante, uma vez que ele é totalmente ocupado pelo fluido. Em equilíbrio térmico, podemos aplicar as leis da estática dos fluidos (Seção 1.2) e definir a *pressão* P do fluido, exercida por ele sobre as paredes do recipiente e que é a mesma em qualquer ponto do fluido (desprezando efeitos gravitacionais).

Consideremos agora um *sistema padrão* C (“termômetro”) constituído por um fluido (“substância termométrica”) num recipiente. É um fato experimental que o *estado de um fluido em equilíbrio térmico fica inteiramente caracterizado pela sua pressão e volume*, ou seja, para o fluido C , pelo par (P_C, V_C) . Se alterarmos uma dessas variáveis, a outra também muda para outro valor bem definido quando o sistema atinge novamente o equilíbrio térmico. Cada par irá corresponder a uma dada situação de equilíbrio térmico, ou seja, uma dada temperatura.

Seja (P_{C_0}, V_{C_0}) um dado estado do sistema C , e consideremos outro sistema fluido A , caracterizado pelo par (P_A, V_A) . Verifica-se experimentalmente que há toda uma série de estados diferentes (P_{A_0}, V_{A_0}) , (P'_{A_0}, V'_{A_0}) , (P''_{A_0}, V''_{A_0}) , ... do sistema A que estão todos em equilíbrio térmico com (P_{C_0}, V_{C_0}) , e que geralmente podem ser representados por uma curva contínua numa dada região, que se chama uma *isoterma do sistema A* (Fig. 7.3). Pela lei zero da termodinâmica, se escolhermos outro sistema padrão C' , em equilíbrio térmico com C no estado (P_{C_0}, V_{C_0}) , a isoterma não se altera: ela só depende da natureza do sistema A . Para outro estado (P_{C_1}, V_{C_1}) de C , acha-se (Fig.) outra isoterma (P_{A_1}, V_{A_1}) , (P'_{A_1}, V'_{A_1}) , ... do sistema A .

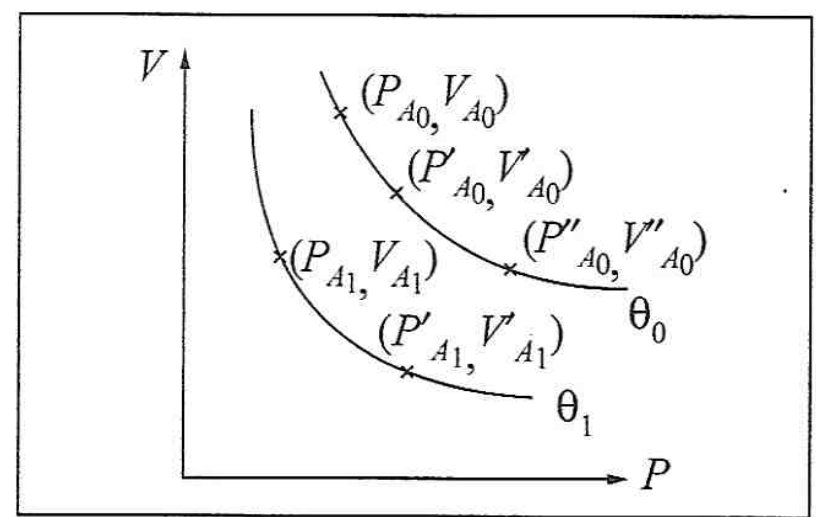


Figura 7.3 — Isotermas

Podemos agora distinguir as diferentes isotermas do sistema A por diferentes números $\theta_0, \theta_1, \dots$, um para cada isoterma, escolhidos de forma *arbitrária*, mas assumindo um valor constante sobre cada isoterma. A grandeza θ chama-se então de *temperatura empírica*, e uma isoterma do sistema A é o conjunto dos estados (P_A, V_A) que têm a mesma temperatura θ .

A família de isotermas do sistema A pode ser descrita por uma equação da forma

$$f(P_A, V_A) = \theta \quad (7.3.1)$$

que se chama *equação de estado* do sistema A . Uma vez estabelecida uma escala de temperatura empírica, a lei zero da termodinâmica não deixa mais nenhuma arbitrariedade na definição da temperatura para outros sistemas: uma isoterma de outro sistema B associada a estados que estão em equilíbrio térmico com (P_{C_0}, V_{C_0}) tem de corresponder à temperatura θ_0 , e assim por diante.

Com a temperatura empírica assim definida, os conceitos de *sistemas em equilíbrio térmico entre si* e *sistemas à mesma temperatura* são equivalentes.

Termômetros

O termômetro mais familiar na prática é o termômetro de mercúrio (Fig. 7.4), que consiste num tubo capilar de vidro fechado e evacuado, com um bulbo numa extremidade, contendo mercúrio, que é a *substância termométrica*. O volume V do mercúrio é medido através do comprimento l da coluna líquida.

Na realidade, este comprimento não reflete apenas a dilatação ou contração do mercúrio, mas a diferença entre ela e a dilatação ou contração correspondente do tubo de vidro que

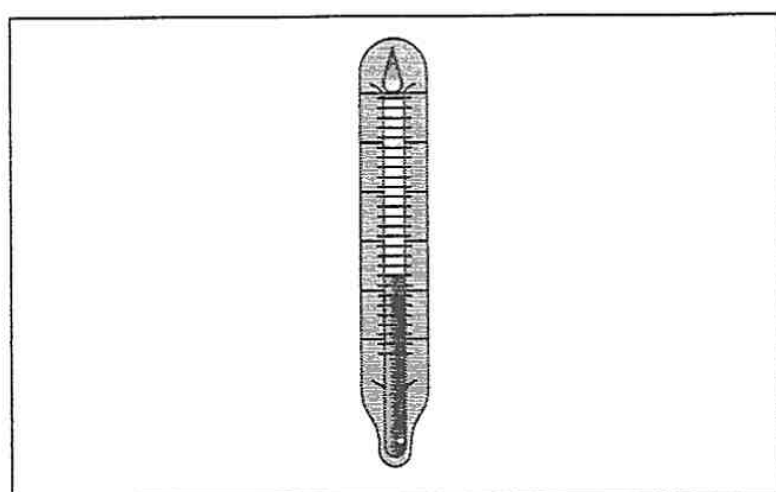


Figura 7.4 — Termômetro de mercúrio

contém o mercúrio. Entretanto, a variação de volume do mercúrio é geralmente bem maior do que a do recipiente.

A definição da *escala Celsius* de temperatura empírica foi associada com a escolha de dois pontos fixos correspondentes a temperaturas bem definidas, uma delas sendo a do gelo em fusão e a outra a da água em ebulição. Mais precisamente, o *ponto de gelo* corresponde à temperatura de equilíbrio térmico de gelo e água saturada de ar, à pressão de 1 atmosfera,

e o *ponto de vapor* é a temperatura de equilíbrio de vapor de água e água pura, à pressão de 1 atmosfera.

Na escala Celsius, assinalamos arbitrariamente as temperaturas:

Ponto de vapor: $\theta = 100^{\circ}\text{C}$

Ponto de gelo: $\theta = 0^{\circ}\text{C}$

Para calibrar o termômetro de mercúrio nesta escala, *convencionamos* a seguir que θ e o comprimento l da coluna guardam entre si uma relação *linear*. Assim, se l_{100} e l_0 são os comprimentos no ponto de vapor e no ponto de gelo, respectivamente, e l é o comprimento quando em equilíbrio térmico com o sistema cuja temperatura queremos medir, assinalamos a θ o valor

$$\theta = \frac{l - l_0}{l_{100} - l_0} (^{\circ}\text{C}) \quad (7.3.2)$$

Isto equivale a dividir a escala entre l_0 e l_{100} em 100 partes iguais, cada subdivisão correspondendo a 1°C , ou seja, equivale a *definir* a dilatação da coluna de mercúrio como sendo linear com θ .

Outro termômetro usual é o termômetro de álcool, em que se utiliza como substância termométrica o álcool em lugar do mercúrio. A calibração da escala de temperatura empírica correspondente é feita de forma análoga à que acabamos de descrever. Não há nenhuma razão para esperar que as leituras de um termômetro de mercúrio e de um de álcool coincidam, e de fato elas apresentam discrepâncias da ordem até de alguns décimos de $^{\circ}\text{C}$. Isto significa simplesmente que cada um dos dois líquidos não se dilata de maneira bem uniforme na escala em que *convencionamos* uniformidade de dilatação para o outro. Nenhum dos dois pode ser considerado “melhor” que o outro, uma vez que se trata de pura convenção.

Podemos perguntar se é possível encontrar uma escala *absoluta* de temperatura, que não esteja associada a propriedades específicas de uma particular substância. Um passo importante nessa direção consiste em tomar como substância termométrica um gás. A experiência mostra que os resultados assim obtidos exprimem propriedades universais dos gases, e veremos mais tarde que a escala assim definida corresponde realmente a uma escala absoluta.

7.4 — O termômetro de gás a volume constante

Usando como substância termométrica um gás, poderíamos tomar como propriedade termométrica o volume a pressão constante ou a pressão a volume constante; esta última alternativa é mais simples e é adotada na prática.

O termômetro de gás a volume constante está esquematizado na Fig. 7.5. O gás, geral-

mente hidrogênio, enche um bulbo e um tubo capilar ligado a um manômetro de mercúrio de tubo aberto (Seção 1.5). O tubo flexível permite suspender ou abaixar o nível de mercúrio no ramo da direita de tal forma que o nível do ramo da esquerda permaneça numa marca fixa N (Fig.), definindo um volume V constante ocupado pelo gás.

O bulbo é colocado em contato térmico com o sistema cuja temperatura se quer medir, e a seguir é medida a pressão P do gás, dada por [cf. (1. 5. 1)]

$$P = p_0 + \rho gh \quad (7.4.1)$$

onde p_0 é a pressão atmosférica, suposta conhecida, ρ é a densidade do mercúrio, e h é o desnível entre o mercúrio contido no ramo da direita e no da esquerda.

Sejam P_{ov} e P_{og} os valores de P no ponto de vapor e no ponto de gelo, respectivamente, quando M_0 é a massa de gás que ocupa o volume V . Suponhamos que se repitam as medidas reduzindo a massa de gás para $M_1 < M_0$ (o volume V sempre permanece constante). As pressões medidas nos pontos de vapor e de gelo serão agora $P_{1v} < P_{0v}$ e $P_{1g} < P_{0g}$. Para uma massa de gás $M_2 < M_1$, os valores caem para $P_{2v} < P_{1v}$ e $P_{2g} < P_{1g}$.

Se se faz um gráfico da razão $(P_v/P_g)_V$ (onde o índice V significa que o volume V de gás é mantido constante) como função da massa M de gás, ou, o que vem a dar na mesma, em função da pressão P_g , verifica-se experimentalmente que, à medida que P_g vai baixando, os pontos experimentais tendem a cair sobre uma reta (Fig. 7.6). Para gases diferentes, as retas são diferentes, mas, se as *extrapolarmos* ao limite $P_g \rightarrow 0$ (o que equivale a $M \rightarrow 0$ e não pode obviamente ser atingido), o resultado experimental é que todas as retas interceptam o eixo das ordenadas no mesmo ponto (Fig. 7.6), correspondente ao valor $\approx 1,3661$. Logo,

$$\lim_{P_g \rightarrow 0} \left(\frac{P_v}{P_g} \right) \equiv \frac{T_v}{T_g} \approx 1,3661 \quad (7.4.2)$$

Este limite define a razão T_v/T_g das temperaturas absolutas T_v e T_g correspondentes ao ponto de vapor e ao ponto de gelo, respectivamente. Para completar a definição da escala de temperatura absoluta, também chamada de *escala Kelvin*, impomos a condição de que a diferença $T_v - T_g$, como na escala Celsius, corresponde a 100 graus também na escala Kelvin:

$$T_v - T_g \approx 100 \text{ K} \quad (7.4.3)$$

(note que não se emprega a notação $^\circ\text{K}$, mas simplesmente K).

As (7.4.2) e (7.4.3) podem agora ser resolvidas para dar T_v e T_g na escala Kelvin:

$$T_v - T_g = (1,3661 - 1)T_g = 0,3661 T_g = 100 \Rightarrow T_g \approx 100 / 0,3661 \approx 273,15 \text{ K} \quad (7.4.4)$$

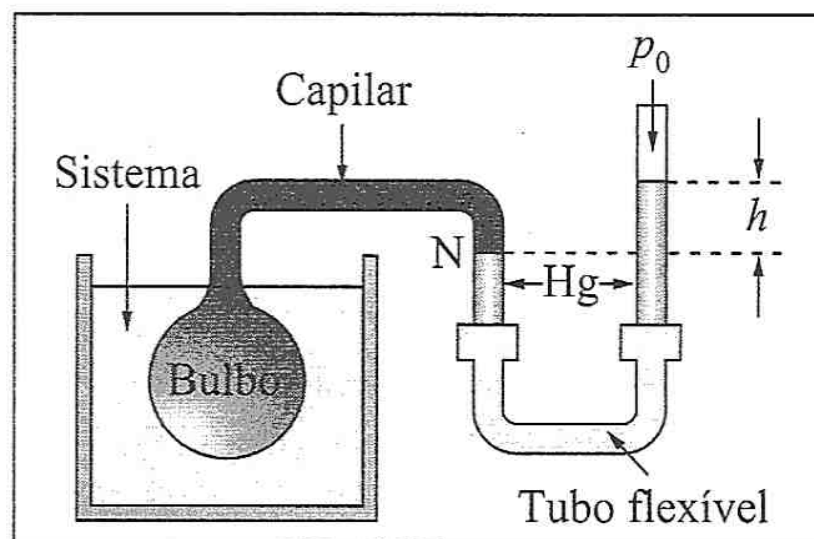


Figura 7.5 — Termômetro de gás a volume constante

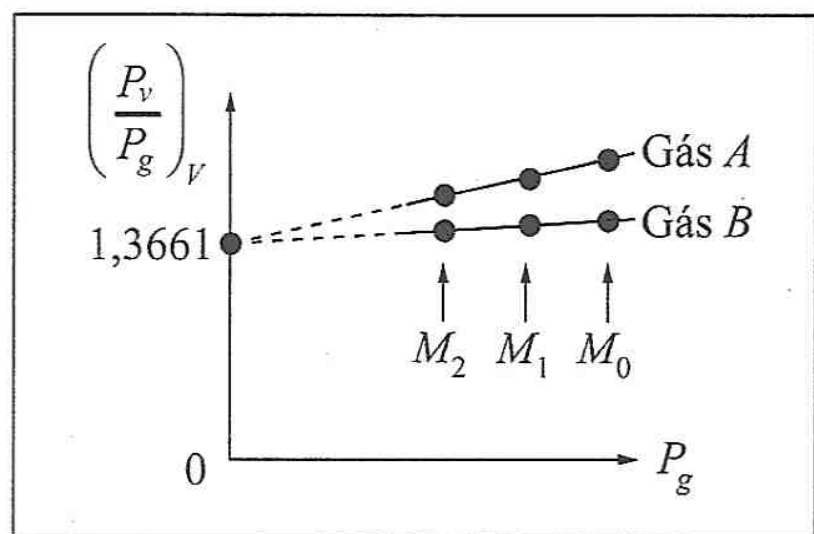


Figura 7.6 — Comparação com gases diferentes

Para medir uma temperatura na escala Kelvin com o auxílio do termômetro de gás a volume constante, medimos a pressão P correspondente, extrapolada para o limite $P_g \rightarrow 0$, como no caso da (7.4.2). A temperatura absoluta T correspondente é dada então por

$$\boxed{\frac{T}{T_g} = \lim_{P_g \rightarrow 0} \left(\frac{P}{P_g} \right)_v} \quad (7.4.5)$$

o que, com T_g dado pela (7.4.4), determina T .

A escala que acabamos de definir também é chamada *escala de gás ideal*, porque se baseia no fato empírico de que todos os gases tendem a se comportar da mesma forma quando muito rarefeitos (limite em que $P_g \rightarrow 0$). Esse comportamento universal é por definição o de um *gás ideal*.

Como o intervalo de 1 grau é por definição o mesmo nas escalas Kelvin e Celsius (7.4.3), a relação entre as duas escalas é dada por

$$\theta_{(^{\circ}\text{C})} = T - T_g = T - 273,15 \quad (7.4.6)$$

A temperatura mais baixa que se pode medir com um termômetro de gás é da ordem de 1 K; o gás usado para isso é hélio a baixa pressão, uma vez que ainda pode ser mantido gasoso a essa temperatura. Temperaturas abaixo desse valor não podem ser medidas por um termômetro de gás.

Veremos mais tarde que é possível definir uma *escala termodinâmica absoluta* de temperaturas, de forma independente das propriedades específicas de qualquer substância, ou mesmo de categorias de substâncias, tais como os gases. Essa escala, conforme veremos, leva a resultados coincidentes com os da escala de gás ideal.

Ponto fixo padrão: A definição (7.4.5) só depende de um único ponto fixo padrão, que é o valor de T_g . Em lugar do ponto de gelo, é adotado atualmente como ponto fixo padrão o *ponto triplo* da água, em que vapor de água coexiste em equilíbrio com água líquida e gelo. Isto ocorre para uma pressão e temperatura bem definidas: $(P_{tr})_{\text{H}_2\text{O}} = 4,58 \text{ mm/Hg}$ e $(\theta_{tr})_{\text{H}_2\text{O}} = 0,01^{\circ}\text{C}$. Resolveu-se então fixar o valor

$$T_{tr} = 273,16 \text{ K}$$

para a temperatura do ponto triplo.

Com a utilização do ponto triplo em lugar do ponto de gelo, a *escala termométrica de gás ideal* passa a ser definida, em lugar da (7.4.5), por

$$\boxed{T = 273,16 \text{ K} \lim_{P_{tr} \rightarrow 0} \left(\frac{P}{P_{tr}} \right)_v} \quad (7.4.7)$$

onde P_{tr} é a pressão exercida pelo volume de gás considerado quando em equilíbrio térmico com água no ponto triplo, e P a pressão que exerce quando em equilíbrio térmico à temperatura que se deseja medir. Como é necessário efetuar uma série de medições para permitir a extrapolação ao limite $P_{tr} \rightarrow 0$, a determinação precisa de uma temperatura na escala de gás ideal é um processo extremamente laborioso, empregado quando se deseja obter valores padrão, que irão figurar em tabelas de constantes físicas.

Para fins práticos, foi adotada a Escala Termométrica Prática Internacional, baseada numa série de pontos fixos a serem utilizados para calibração, juntamente com recomendações

sobre o tipo de termômetro que deve ser empregado em cada região de temperaturas entre dois pontos fixos e sua calibração.

Além dos pontos de gelo ($0,00^{\circ}\text{C}$) e de vapor ($100,00^{\circ}\text{C}$), são empregados os seguintes pontos fixos (todos à pressão de 1 atm): pontos de ebulição do oxigênio ($-182,97^{\circ}\text{C}$) e do enxofre ($444,60^{\circ}\text{C}$) e pontos de fusão da prata ($960,80^{\circ}\text{C}$) e do ouro ($1.063,00^{\circ}\text{C}$).

Um exemplo de termômetro cujo uso é recomendado em conjunção com esta escala em determinada faixa de temperaturas é o *termômetro de resistência de platina*, em que a propriedade termométrica medida é a resistência elétrica de um fio de platina em condições bem determinadas. O termômetro é calibrado com o auxílio dos pontos fixos acima mencionados.

7.5 — Dilatação térmica

A ascensão da coluna de mercúrio num termômetro exemplifica o fenômeno da *dilatação térmica*, a alteração de tamanho de um corpo produzida por uma variação de temperatura.

A dilatação corresponde a um aumento do espaçamento interatômico médio. Assim, num corpo sólido, se dois de seus pontos estão inicialmente à distância l_0 , a variação Δl dessa distância é proporcional a l_0 . Para uma variação de temperatura ΔT suficientemente pequena, é também proporcional a Δt . Logo,

$$\boxed{\Delta l = \alpha l_0 \Delta T} \quad (7.5.1)$$

onde a constante de proporcionalidade α chama-se o *coeficiente de dilatação linear*.

Vemos que $\alpha = (\Delta l/l_0)/\Delta T$ representa a *variação percentual* de comprimento ($\Delta l/l_0$) por unidade de variação de temperatura. Embora α varie em geral com a temperatura, podemos, para fins práticos, desprezar essa variação (enquanto não nos aproximamos demasiado do ponto de fusão do sólido). Assim, se l_T é o comprimento à temperatura T e l_0 o comprimento à temperatura T_0 , a (7.5.1) dá

$$l_T = l_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (7.5.2)$$

Para sólidos anisotrópicos, ou seja, aqueles cuja propriedades variam com a direção, como acontece com cristais, o coeficiente de dilatação linear assume valores diferentes em direções diferentes. Para um corpo isotrópico, α é independente da direção.

Valores típicos de α em sólidos são da ordem de 10^{-5} por $^{\circ}\text{C}$, ou seja, 0,01 mm por m por $^{\circ}\text{C}$. Assim, por exemplo, em $(^{\circ}\text{C})^{-1}$ temos os seguintes valores de α : aço: $1,1 \times 10^{-5}$; alumínio: $2,3 \times 10^{-5}$; cobre: $1,7 \times 10^{-5}$; vidro: 4 a 9×10^{-6} . A (7.5.2) se aplica, por exemplo, ao comprimento de uma barra delgada do material.

Se tivermos uma lâmina delgada de um sólido isotrópico de lados l_1 e l_2 , a variação percentual de sua área A devida a uma variação de temperatura T será

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta(l_1 l_2)}{l_1 l_2} \cong \frac{l_1 \Delta l_2 + l_2 \Delta l_1}{l_1 l_2} = \underbrace{\frac{\Delta l_1}{l_1}}_{\alpha \Delta T} + \underbrace{\frac{\Delta l_2}{l_2}}_{\alpha \Delta T} \therefore \boxed{\Delta A / A = 2\alpha \Delta T} \quad (7.5.3)$$

o que significa que o *coeficiente de dilatação superficial* é 2α (dado o valor extremamente pequeno de α , desprezamos no cálculo acima um termo, $\Delta l_1 \Delta l_2$, da ordem de α^2). A (7.5.3) se aplica também à variação da área de um orifício numa placa de material isotrópico, devido à dilatação térmica.

Analogamente, a variação de volume de um paralelepípedo de arestas l_1 , l_2 e l_3 será

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(l_1 l_2 l_3)}{l_1 l_2 l_3} \cong \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3}$$

o que dá

$$\boxed{\Delta V / V = 3\alpha \Delta T} \quad (7.5.4)$$

desprezando termos de ordem α^2 e α^3 . Logo, o *coeficiente de dilatação volumétrica* é 3α , o que se aplica também ao volume de uma cavidade, num corpo cujo coeficiente de dilatação linear é α .

Para um *líquido*, que toma a forma do recipiente que o contém, só interessa o *coeficiente de dilatação volumétrica* β , definido por

$$\boxed{\Delta V / V = \beta \Delta T} \quad (7.5.5)$$

Valores típicos de β para líquidos são bem maiores que para sólidos: tipicamente, da ordem de 10^{-3} por $^{\circ}\text{C}$. Para o mercúrio, $\beta \approx 1,8 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$.

Se tivermos então um termômetro de mercúrio, em que este enche completamente o bulbo de vidro à temperatura de 0°C , o volume do bulbo à temperatura θ será $V_0 (1 + 3\alpha\theta)$, e o volume do mercúrio será $V_0 (1 + \beta\theta)$, de modo que o volume de mercúrio expelido do bulbo e que irá subir pelo tubo capilar é

$$V_0 (\beta - 3\alpha)\theta$$

Diz-se que $\beta - 3\alpha$ é o *coeficiente de dilatação aparente* do líquido (no caso, o mercúrio).

Em geral, β é > 0 , mas há uma anomalia no caso da água, para a qual β se torna < 0 entre 0°C e 4°C . Assim, a densidade máxima da água é atingida a 4°C , e ela se expande, em lugar de se contrair, quando a temperatura diminui, na região abaixo de 4°C , até se congelar. Essa expansão pode fazer estourar um cano cheio de água, quando a mesma se congela. É também por essa razão que a superfície de um lago se congela, sem que isto ocorra com a água a maior profundidade. Esta permanece a temperatura mais elevada, com densidade maior, de forma que o gelo flutua sobre ela, permitindo assim que os peixes sobrevivam durante o inverno.

A explicação microscópica do coeficiente de dilatação anômalo da água na vizinhança de seu ponto de fusão não é simples. A água é um líquido muito peculiar, devido às propriedades específicas da ligação de hidrogênio, encontrada em suas moléculas.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 7

1. Uma esfera oca de alumínio tem um raio interno de 10 cm e raio externo de 12 cm a 15°C . O coeficiente de dilatação linear do alumínio é $2,3 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$. De quantos cm^3 varia o volume da cavidade interna quando a temperatura sobe para 40°C ? O volume da cavidade aumenta ou diminui?
2. Uma barra retilínea é formada por uma parte de latão soldada em outra de aço. A 20°C , o comprimento total da barra é de 30 cm, dos quais 20 cm de latão e 10 cm de aço. Os coeficientes de dilatação linear são $1,9 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ para o latão e $1,1 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ para o aço. Qual é o coeficiente de dilatação linear da barra?

3. Uma tira bimetálica, usada para controlar termostatos, é constituída de uma lâmina estreita de latão, de 2 mm de espessura, presa lado a lado com uma lâmina de aço, de mesma espessura $d = 2$ mm, por uma série de rebites. A 15°C , as duas lâminas têm o mesmo comprimento, igual a 15 cm, e a tira está reta. A extremidade A da tira é fixa; a outra extremidade B pode mover-se, controlando o termostato. A uma temperatura de 40°C , a tira se encurvou, adquirindo um raio de curvatura R , e a extremidade B se deslocou de uma distância vertical y (Fig. P.1). Calcule R e y , sabendo que o coeficiente de dilatação linear do latão é $1,9 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ e o do aço é $1,1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

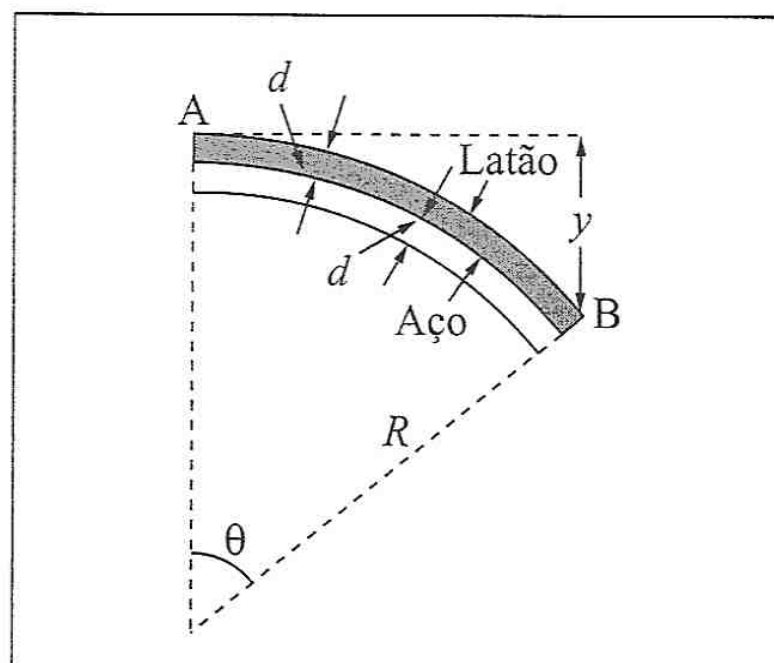


Figura P.1

4. Num relógio de pêndulo, o pêndulo é uma barra metálica, projetada para que seu período de oscilação seja igual a 1 s. Verifica-se que, no inverno, quando a temperatura média é de 10°C , o relógio adianta, em média 55 s por semana; no verão, quando a temperatura média é de 30°C , o relógio atrasa, em média 1 minuto por semana. (a) Calcule o coeficiente de dilatação linear do metal do pêndulo. (b) A que temperatura o relógio funcionaria com precisão?
5. A Fig. P.2 ilustra um esquema possível de construção de um pêndulo cujo comprimento l não seja afetado pela dilatação térmica. As três barras verticais claras na figura, de mesmo comprimento l_1 , são de aço, cujo coeficiente de dilatação linear é $1,1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$. As duas barras verticais escuras na figura, de mesmo comprimento l_2 , são de alumínio, cujo coeficiente de dilatação linear é $2,3 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$. Determine l_1 e l_2 de forma a manter $l = 0,5\text{m}$.

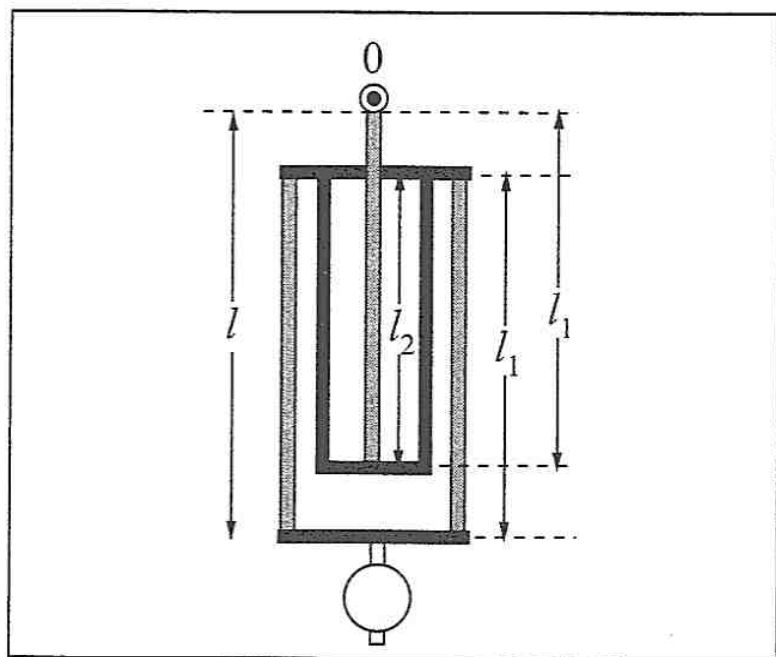


Figura P.2

6. (a) Um líquido tem coeficiente de dilatação volumétrica β . Calcule a razão ρ/ρ_0 entre a densidade do líquido à temperatura T e sua densidade ρ_0 à temperatura T_0 . (b) No método de Dulong e Petit para determinar β , o líquido é colocado num tubo em U, com um dos ramos imerso em gelo fundente (temperatura T_0) e o outro (Fig. P.3) em óleo aquecido à temperatura T . O nível atingido pelo líquido nos dois ramos é, respectivamente medido pelas alturas h_0 e h . Mostre que a experiência permite determinar β (em lugar do coeficiente de dilatação aparente do líquido), e que o resultado independe de o tubo em U ter secção uniforme. (c) Numa experiência com acetona utilizando este método, T_0 é 0°C , T é 20°C , $h_0 = 1$ m e $h = 1,03$ m. Calcule o coeficiente de dilatação volumétrica da acetona.

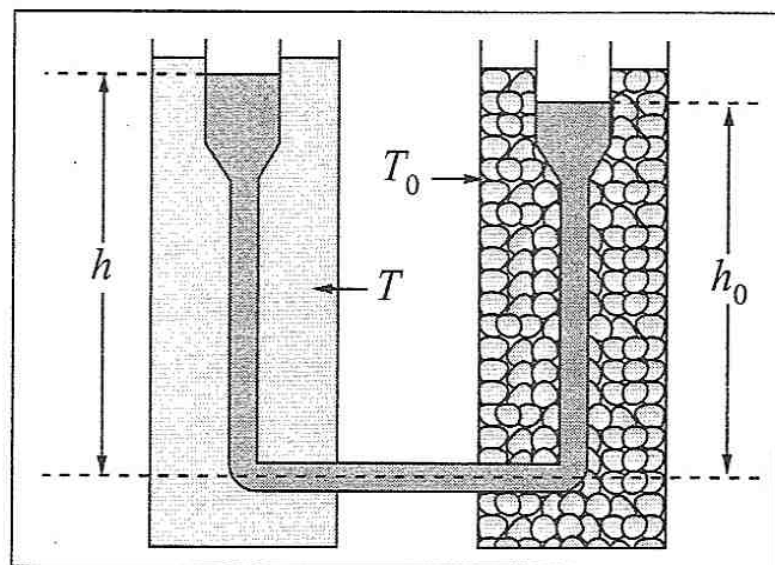


Figura P.3

7. Um tubo cilíndrico delgado de secção uniforme, feito de um material de coeficiente de dilatação linear α , contém um líquido de coeficiente de dilatação volumétrica β . À temperatura T_0 , a altura da coluna líquida é h_0 . (a) Qual é a variação Δh de altura da coluna quando a temperatura sobe de 1°C ? (b) Se o tubo é de vidro ($\alpha = 9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) e o líquido é mercúrio ($\beta = 1,8 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$), mostre que este sistema não constitui um bom termômetro, do ponto de vista prático, calculando Δh para $h_0 = 10$ cm.
8. Para construir um termômetro de leitura fácil, do ponto de vista prático (Problema 7), acopla-se um tubo capilar de vidro a um reservatório numa extremidade do tubo. Suponha que, à temperatura T_0 , o mercúrio está todo contido no reservatório, de volume V_0 , e o diâmetro do capilar é d_0 . (a) Calcule a altura h do mercúrio no capilar a uma temperatura $T > T_0$ (Fig. P.4). (b) Para um volume do reservatório $V_0 = 0,2$ cm³, calcule qual deve ser o diâmetro do capilar em mm para que a coluna de mercúrio suba de 1 cm quando a temperatura aumenta de 1°C . Tome $\alpha = 9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ para o vidro e $\beta = 1,8 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$ para o mercúrio.
9. Um reservatório cilíndrico de aço contém mercúrio, sobre o qual flutua um bloco cilíndrico de latão. À temperatura de 20°C , o nível do mercúrio no reservatório está a uma altura $h_0 = 0,5$ m em relação ao fundo e a altura a_0 do cilindro de latão é de 0,3 m. A essa temperatura, a densidade do latão é de $8,60$ g/cm³ e a densidade do mercúrio é de $13,55$ g/cm³. (a) Ache a que altura H_0 está o topo do bloco de latão em relação ao fundo do reservatório a 20°C (Fig. P.5). (b) O coeficiente de dilatação linear do aço é $1,1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$; o do latão é $1,9 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, e o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é $1,8 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$. Calcule a variação δH da altura H_0 (em mm) quando a temperatura sobe para 80°C .

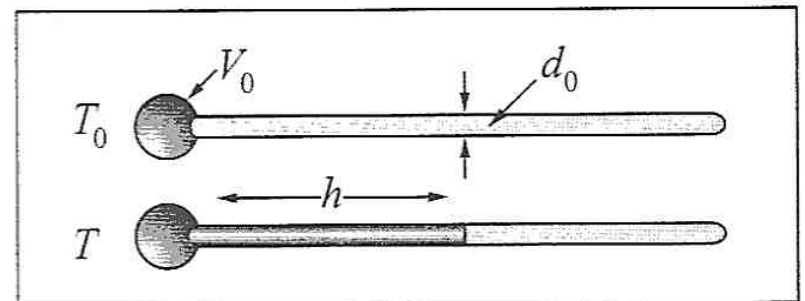


Figura P.4

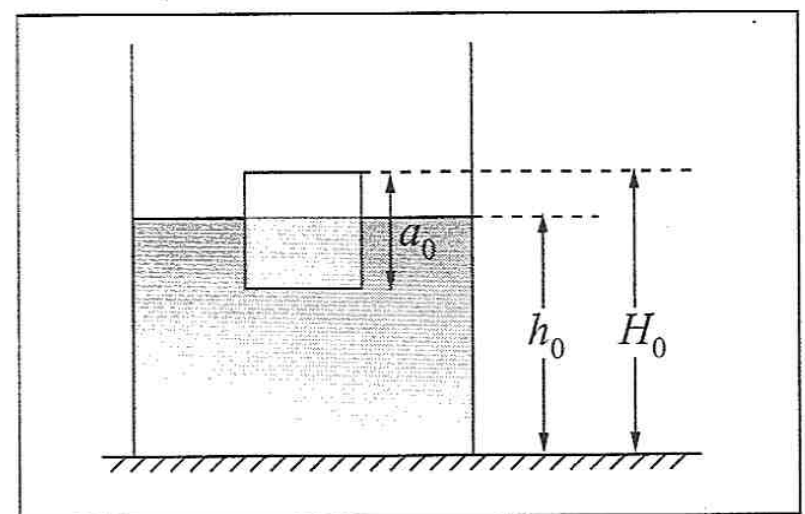


Figura P.5

Capítulo 8

CALOR, PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

8.1 — A natureza do calor

No final do século 18, existiam duas hipóteses alternativas sobre a natureza do calor. A hipótese mais aceita considerava o calor como uma substância fluida indestrutível que “preencheria os poros” dos corpos e se escoaria de um corpo mais quente a um mais frio. Lavoisier chamou essa substância hipotética de “calórico”. A implicação era que o calor pode ser transferido de um corpo a outro, mas a quantidade total de “calórico” se conservaria, ou seja, existiria uma lei de conservação do calor.

A hipótese rival, endossada entre outros por Francis Bacon e Robert Hooke, foi assim expressa por Newton em 1704: “O calor consiste num minúsculo movimento de vibração das partículas dos corpos”. Idéias deste gênero podem ter sido sugeridas pela geração de calor por atrito, exemplificada pelo “método dos escoteiros” para acender uma fogueira, ou pelo aquecimento do ferro martelado numa bigorna. A teoria do calórico explicava estes efeitos dizendo que o atrito, ou o martelo do ferreiro, “espremem” o calórico para fora do material, como água absorvida numa esponja.

Um dos primeiros a apontar dificuldades com a teoria do calórico foi Benjamin Thomson, um aventureiro que se tornou Conde de Rumford na Bavária (casou-se com a viúva de Lavoisier). Uma das dificuldades era que experiências bastante precisas, feitas por Rumford, não detectavam qualquer variação do peso de um corpo, acompanhando a absorção ou eliminação de grandes quantidades de calor. Entretanto, o calórico poderia ser um fluido imponderável, a exemplo do que se acreditava valer para a eletricidade.

A principal dificuldade, porém, estava na “lei de conservação do calórico”, pois a quantidade de calórico que podia ser “espremida para fora” de um corpo por atrito era ilimitada. Com efeito, em 1798, Rumford escreveu:

“Foi por acaso que me vi levado a realizar as experiências que vou relatar agora... Estando ocupado, ultimamente, em supervisionar a perfuração de canhões nas oficinas do arsenal militar de Munique, chamou-me a atenção o elevado grau de aquecimento de um canhão de bronze, atingido em tempos muito curtos, durante o processo de perfuração; bem como a temperatura ainda mais alta (acima do ponto de ebulição da água, conforme verifiquei) das aparas metálicas removidas pela perfuração.

Meditando sobre os resultados dessas experiências, somos naturalmente levados à grande questão que tem sido objeto de tantas especulações filosóficas, ou seja:

Que é o calor? Existe um fluido ígneo? Existe alguma coisa que possamos chamar de calórico?

Vimos que uma quantidade muito grande de calor pode ser produzida pelo atrito de duas superfícies metálicas, e emitida num fluxo constante em todas as direções, sem interrupção, e sem qualquer sinal de diminuição ou exaustão...

... a fonte de calor gerado por atrito nessas experiências parece ser inesgotável. É desnecessário acrescentar que algo que qualquer corpo ou sistema de corpos *isolado* pode continuar fornecendo *sem limites*, não pode ser uma *substância material*, e me parece extremamente difícil, senão impossível, conceber qualquer coisa capaz de ser produzida ou transmitida da forma como o calor o era nessas experiências, exceto o MOVIMENTO."

Rumford foi assim levado a endossar a teoria alternativa de que "... o calor não passa de um movimento vibratório que tem lugar entre as partículas do corpo".

A máquina a vapor de James Watt, desenvolvida na segunda metade do século 18, era uma demonstração prática de que o calor leva à capacidade de produzir trabalho. Entretanto, a conexão entre calor e energia só foi estabelecida no século 19.

Um dos primeiros a discutir essa conexão foi o médico alemão Julius Robert Mayer. Aparentemente, ele foi levado, a refletir sobre o problema quando, como médico de bordo durante uma viagem aos trópicos, observou que o sangue venoso parecia ser mais vermelho que nos climas frios da Europa, o que o conduziu a especulações sobre a origem do calor animal (metabolismo). Assim, em 1842, Mayer chegou ao primeiro enunciado geral do Princípio de Conservação da Energia:

"As energias são entidades conversíveis, mas indestrutíveis ... Em inúmeros casos, vemos que um movimento cessa sem ter produzido quer outro movimento" (energia cinética) "quer o levantamento de um peso" (energia potencial), "mas a energia, uma vez que existe, não pode ser aniquilada; pode somente mudar de forma, e daí surge a questão: Que outras formas pode ela assumir? Somente a experiência pode levar-nos a uma conclusão".

A experiência mostra que o trabalho pode (por exemplo através do atrito) ser convertido em calor. Logo, diz Mayer, "Se energia cinética e potencial são equivalentes a calor, é natural que calor seja equivalente a energia cinética e potencial". Ou seja, o calor é uma forma de energia.

Mayer enunciou então um problema crucial: "Quão grande é a quantidade de calor que corresponde a uma dada quantidade de energia cinética ou potencial?" Ou seja, qual é a "taxa de conversão" entre energia mecânica (medida em joules) e calor (medido em "calorias", conforme veremos mais adiante)? Este é o problema da determinação do *equivalente mecânico da caloria*.

Com extraordinária sagacidade, Mayer conseguiu inferir a resposta partindo de um dado experimental já conhecido na época: a diferença entre o calor específico de um gás a pressão constante e seu calor específico a volume constante, que discutiremos mais tarde. Usando os resultados então conhecidos (cuja incerteza experimental era grande), Mayer deduziu um valor do equivalente mecânico da caloria cuja diferença do valor correto é da ordem de 10%. Entretanto, seu trabalho foi considerado muito especulativo e foi ignorado durante as duas décadas seguintes.

As experiências básicas para a obtenção do equivalente mecânico da caloria foram realizadas durante um período de quase 30 anos pelo cervejeiro e cientista amador inglês James Prescott Joule. Seus primeiros resultados, anunciados em 1843, eram ainda muito imprecisos, mas em 1868 ele chegou finalmente a resultados de grande precisão.

Quando Joule apresentou um dos primeiros resultados confiáveis, numa reunião realizada em Oxford em 1847, só despertou o interesse de um jovem da audiência: William Thomson, o futuro Lord Kelvin. Três dias depois, Joule se casou. Duas semanas mais tarde, Thomson, em

Chamonix, encontrou Joule, munido de um imenso termômetro, subindo ao topo de uma cachoeira. Mesmo em lua de mel, queria verificar a diferença de temperatura que deveria existir, conforme seus cálculos, entre a água em cima e em baixo da cachoeira (para as cataratas de Niagara, ele estimou essa diferença em $\sim 0,2^{\circ}\text{C}$)!

A formulação mais geral do Princípio de Conservação da Energia foi apresentada pelo físico matemático e fisiologista Hermann von Helmholtz numa reunião da Sociedade de Física de Berlim, em 23 de julho de 1847. Helmholtz mostrou que ele se aplicava a todos os fenômenos então conhecidos — mecânicos, térmicos, elétricos, magnéticos; também na físico-química, na astronomia e na biologia e metabolismo dos seres vivos).

Em seu livro “Sobre a Conservação da Energia” (Helmholtz ainda usava a palavra “força” em lugar de “energia”; a energia cinética era chamada de “força viva”), ele diz:

“... chegamos à conclusão de que a natureza como um todo possui um estoque de energia que não pode de forma alguma ser aumentado ou reduzido; e que, por conseguinte, a quantidade de energia na natureza é tão eterna e inalterável como a quantidade de matéria. Expressa desta forma, chamei esta lei geral de *Princípio de Conservação da Energia*.”

Por volta de 1860, o Princípio de Conservação da Energia, que corresponde, conforme veremos, à 1.ª lei da termodinâmica, já havia sido reconhecido como um princípio fundamental, aplicável a todos os fenômenos conhecidos.

8.2 — Quantidade de calor

Para levar à fervura 2 litros de leite, leva-se o dobro do tempo que é necessário para 1 litro, colocado na mesma panela e levado à mesma chama. A variação de *temperatura* é a mesma nos dois casos (da temperatura ambiente ao ponto de ebulição), mas a *quantidade de calor* fornecida é dupla para 2 litros.

Como o calor é uma forma de energia, pode ser medido em unidades de energia, como o joule. Entretanto, historicamente, foi adotada uma unidade independente de quantidade de calor, a *caloria*, cujo uso persiste até hoje.

A caloria é definida atualmente como a *quantidade de calor necessária para elevar de $14,5^{\circ}\text{C}$ a $15,5^{\circ}\text{C}$ a temperatura de 1 g de água*. Para que 1 kg de água sofra essa mesma elevação de temperatura, é necessário fornecer-lhe 10^3 cal (calorias) = 1 kcal (quilocaloria), pois a quantidade de calor necessária, se os demais fatores permanecem os mesmos, é *proporcional à massa da substância*. A “caloria” empregada na nutrição corresponde na verdade a 1 kcal.

A quantidade de calor necessária para elevar de 1°C a temperatura de 1 g de uma dada substância chama-se *calor específico c dessa substância*; c é medido em $\text{cal/g}^{\circ}\text{C}$. Pela definição de caloria, o calor específico da água entre $14,5^{\circ}\text{C}$ e $15,5^{\circ}\text{C}$ é $c = 1 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$.

O calor específico varia geralmente com a temperatura; assim, no intervalo entre 0°C e 1°C , o calor específico da água é $1,008 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$; na prática, neste caso, podemos desprezar tal variação.

Para que o calor específico esteja bem definido, é preciso especificar ainda em que condições ocorre a variação de temperatura: se a pressão é mantida constante, obtém-se um valor diferente daquele que se obtém quando é mantido constante o volume da substância. O *calor específico a pressão constante*, c_p , e o *calor específico a volume constante*, c_v , são chamados de “calores específicos principais”.

Para líquidos e sólidos, a diferença entre c_p e c_v é pequena; geralmente, o calor específico é medido à pressão atmosférica, ou seja, trata-se de c_p . Para gases, c_p e c_v são bastante diferentes.

Discutiremos mais adiante a razão dessa diferença.

Alguns exemplos de valores de c_p ($p = 1$ atm; temperatura ambiente; valores em cal/g°C): Al – 0,22; Cu – 0,092; Au – 0,032; Ag – 0,056; Pb – 0,031; Hg – 0,033. Note que a maioria desses calores específicos são bem menores que o da água.

Capacidade térmica

Se tivermos m gramas de uma substância pura de calor específico c , a quantidade de calor ΔQ necessária para elevar sua temperatura de ΔT é

$$\Delta Q = mc\Delta T = C\Delta T \quad (8.2.1)$$

onde $C = mc$ chama-se a *capacidade térmica* da amostra considerada (mede-se em cal/°C).

A capacidade térmica de um sistema formado de m_1 gramas de uma substância de calor específico c_1 , m_2 de calor específico c_2 , etc., ..., é

$$C = m_1c_1 + m_2c_2 + \dots \quad (8.2.2)$$

Se o intervalo de temperatura entre a temperatura inicial T_i e a temperatura final T_f é suficientemente grande para que seja preciso levar em conta a variação do calor específico com a temperatura, $c = c(T)$, a (8.2.1) é substituída por

$$\Delta Q = m \int_{T_i}^{T_f} c(T) dT \equiv m\bar{c}(T_f - T_i) \quad (8.2.3)$$

onde \bar{c} e, por definição, o calor específico *médio* entre as temperaturas T_i e T_f .

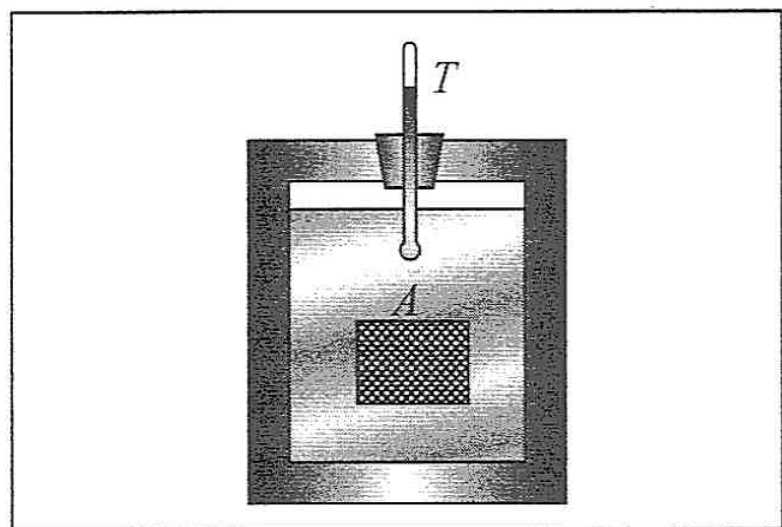


Figura 8.1 — Calorímetro de misturas

Suponhamos que uma amostra A de massa m_A de uma substância de calor específico c_A , aquecida a uma temperatura T_A , é mergulhada dentro de uma massa m de água, de calor específico c , contida num recipiente de paredes adiabáticas e de capacidade térmica C . A água e o recipiente estão inicialmente à temperatura $T_i < T_A$. Após estabelecer-se o equilíbrio térmico, o sistema atinge a temperatura T_f , medida pelo termômetro T (Fig. 8.1).

Como as paredes adiabáticas não permitem trocas de calor com o exterior (Seção 7.2), a quantidade de calor $\Delta Q = m_A c_A (T_A - T_f)$ perdida pela amostra é inteiramente cedida à água [$mc (T_f - T_i)$] e ao recipiente [$C (T_f - T_i)$], ou seja,

$$m_A c_A (T_A - T_f) = (mc + C)(T_f - T_i) \quad (8.2.4)$$

Conhecendo todos os demais termos que nela comparecem, a (8.2.4) permite determinar o calor específico c_A da amostra (mais precisamente, o calor específico médio no intervalo entre T_f e T_A). Este é o princípio do *calorímetro de misturas*.

Capacidade térmica molar

O calor específico de uma substância é a capacidade térmica de uma massa de 1 g dessa substância. Do ponto de vista da estrutura microscópica, é interessante definir a *capacidade térmica molar*, que é a capacidade térmica de 1 mol da substância. Lembrando que 1 mol (molécula-grama) é uma massa em g igual à massa molecular, vemos que a capacidade térmica

molar de uma substância obtém-se multiplicando o seu calor específico pela sua massa molecular (ou massa atômica, para substâncias monoatômicas).

Efetuada esse cálculo para os sólidos cujos calores específicos foram citados acima (pg. 170), obtém-se resultados (verifique!) próximos de $6 \text{ cal/mol}^\circ\text{C}$. Este fato foi primeiro observado por Dulong e Petit. A *lei de Dulong e Petit* diz que a capacidade térmica molar (a volume constante) de todos os sólidos, a temperatura suficientemente elevada, aproxima-se de $6 \text{ cal/mol}^\circ\text{C}$. “Suficientemente elevada”, significa uma temperatura $\gg T_D$, onde T_D é uma temperatura característica de cada substância, chamada *temperatura de Debye*. A explicação destes resultados foi fornecida pela teoria quântica.

Reservatório térmico

Segundo a (8.2.1), um sistema de capacidade térmica C sofre uma variação de temperatura $\Delta T = \Delta Q/C$ pela transferência de uma quantidade de calor ΔQ .

Como C é proporcional à massa, podemos tornar ΔT arbitrariamente pequeno aumentando suficientemente a massa. Como caso limite ideal, o sistema permite uma transferência de calor ΔQ sem que sua temperatura se altere apreciavelmente. Um tal sistema chama-se um *reservatório térmico*.

A atmosfera e o oceano são bons exemplos de reservatórios térmicos; para muitos fins práticos, podemos tratar como um reservatório qualquer recipiente de tamanho adequado contendo um fluido em equilíbrio térmico.

8.3 — Condução de calor

A transferência de calor de um ponto a outro de um meio se dá através de três processos diferentes: *convecção*, *radiação* e *condução*.

A *convecção* ocorre tipicamente num fluido, e se caracteriza pelo fato de que o calor é transferido pelo movimento do próprio fluido, que constitui uma corrente de convecção. Um fluido aquecido localmente em geral diminui de densidade e por conseguinte tende a subir sob o efeito gravitacional, sendo substituído por fluido mais frio, o que gera naturalmente correntes de convecção, mas elas também podem ser produzidas artificialmente, com o auxílio de bombas ou ventiladores. Os ventos, as correntes marinhas, a circulação de água quente num sistema de aquecimento central são exemplos de correntes de convecção.

A *radiação* transfere calor de um ponto a outro através de *radiação eletromagnética*, que, como a luz visível, propaga-se mesmo através do vácuo. A radiação térmica é emitida por um corpo aquecido, e, ao ser absorvida por outro corpo, pode aquecê-lo, convertendo-se em calor. A radiação solar, seja sob a forma de luz visível, seja de radiação infravermelha ou de outras regiões do espectro, é uma forma de radiação térmica emitida por uma fonte (o Sol) a temperatura muito elevada. O aquecimento solar é uma forma de aproveitamento de radiação solar para produção de calor.

A *condução de calor*, que vamos discutir de forma mais detalhada, só pode ocorrer através de um meio material, mas, ao contrário da convecção, sem que haja movimento do próprio meio; ocorre tanto em fluidos como em sólidos, sob o efeito de diferenças de temperatura. Assim, quando colocamos sobre uma chama uma panela com água, o calor se transmite da chama à água através da parede metálica da panela, por condução.

Todas as leis básicas da condução de calor podem ser ilustradas neste exemplo familiar: (a) O calor flui sempre de um ponto 1 a temperatura mais alta para um ponto 2 a temperatura mais baixa. A quantidade de calor ΔQ transportada durante um intervalo de tempo Δt é: (b)

Proporcional à diferença de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$; a água ferve mais depressa se a temperatura da chama é mais alta; (c) Inversamente proporcional à espessura Δx da chapa metálica: quanto mais espesso o fundo da panela, mais tempo leva para ferver a água. Combinando (b) e (c), vemos que ΔQ é proporcional a $\Delta T/\Delta x$, que é chamado de *gradiente de temperatura*; (d) Proporcional à área A através da qual o calor está fluindo (no exemplo considerado, a área do fundo da panela); (e) Proporcional ao intervalo de tempo Δt .

Juntando estes resultados, vemos* que ΔQ é proporcional a $A\Delta t (\Delta T/\Delta x)$, ou seja, para a condução de calor através de uma espessura infinitésima dx de um meio durante um tempo dt ,

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}$$

(8.3.1)

onde k é uma constante de proporcionalidade característica do meio condutor, que se chama de *condutividade térmica* do material ($k > 0$). O sinal (–) na (8.3. 1) exprime o fato de que o calor flui de temperaturas mais altas para temperaturas mais baixas: assim, se o gradiente de temperatura dT/dx é negativo, a corrente térmica dQ/dt é positiva.

Podemos comparar a (8.3.1) com a lei de Ohm para a condução de eletricidade (corrente elétrica). Para um condutor de comprimento l e área de secção A , a resistência elétrica R é dada por $R = l/(\sigma A)$, onde σ é a condutividade elétrica. Para uma diferença de potencial V , a intensidade da corrente $i = dq/dt$ (dq = carga elétrica transportada durante o intervalo de tempo dt) é

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} = \sigma A \frac{V}{l}$$

(8.3.2)

que é inteiramente análoga à (8.3.1): V/l representa o gradiente de potencial elétrico.

Quanto maior a condutividade térmica k , melhor condutora de calor é a substância, ou seja, maior a corrente térmica por unidade de área, para um dado gradiente de temperatura. Se medirmos dQ/dt em kcal/s, A em m^2 e dT/dx em $^{\circ}C/m$, as unidades de k são kcal/s.m. $^{\circ}C$ e valores típicos para alguns materiais são:

| Material | Cobre | Água | Madeira | Vidro | Flanela | Ar |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|
| k (em kcal/s.m $^{\circ}C$) | $9,2 \times 10^{-2}$ | $1,3 \times 10^{-4}$ | 2×10^{-5} | 2×10^{-4} | 2×10^{-5} | $5,7 \times 10^{-6}$ |

Os metais, que conduzem bem a eletricidade, também são bons condutores de calor, o que não é coincidência: segundo a *lei de Wiedemann e Franz*, a condutividade térmica de um metal é proporcional a sua condutividade elétrica.

Vidro, madeira, são maus condutores de calor. Tomamos um líquido quente numa xícara, não num copo de metal. Um objeto metálico tocado num dia frio é mais frio que um de madeira, porque a madeira isola o calor da mão no ponto de contato, ao passo que o metal o conduz e difunde.

Líquidos, como a água, são geralmente maus condutores de calor, embora possam transmiti-lo por convecção. Os melhores isolantes térmicos são os gases, como o ar. Embora o tecido de roupas e cobertores isole termicamente, o que mantém melhor o calor do corpo são as camadas de ar que ficam presas entre camadas de tecido, dificultando também as perdas por convecção.

Exemplo: Consideremos uma barra homogênea de secção A e comprimento l de um material de condutividade térmica k , cujas extremidades são mantidas em contato com reservatórios térmicos de temperaturas T_2 e T_1 (Fig. 8.2(a)); supomos a superfície lateral da barra termicamente isolada.

Em regime estacionário, ou seja, quando a temperatura ao longo da barra se torna independente do tempo (T só depende de x), a corrente térmica dQ/dt na (8.3.1) não pode depender de x , ou seja, o fluxo de calor por unidade de tempo tem de ser o mesmo através de qualquer secção da barra. Com efeito, se assim não fosse, haveria acumulação (ou rarefação) de calor em determinados pontos, cuja temperatura teria de aumentar (ou diminuir) com o tempo, contrariamente à hipótese. Logo, na (8.3.1), $dT/dx = \text{constante}$, o que dá

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T_2 - T_1}{l} \quad (8.3.3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{(T_2 - T_1)}{l} \quad (8.3.4)$$

Com o auxílio de um sistema deste tipo, podemos medir a condutividade térmica k do material da barra. Vemos que a temperatura varia linearmente ao longo da barra (Fig. 8.2(b)).

Se substituirmos a barra homogênea por outra, composta de uma de comprimento l_1 e condutividade térmica k_2 e outra de comprimento l , e condutividade k_1 (com a mesma secção A), a junção entre as duas estará a uma temperatura intermediária T_0 (Fig. 8.3(a)), e teremos, em regime estacionário,

$$\frac{dQ}{dt} = k_2 A \frac{(T_2 - T_0)}{l_2} = k_1 A \frac{(T_0 - T_1)}{l_1} \quad (8.3.5)$$

Eliminando T_0 , obtemos,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A(T_2 - T_1)}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2}} \quad (8.3.6)$$

A distribuição de temperatura correspondente está ilustrada na Fig. 8.3(b).

8.4 — O equivalente mecânico da caloria

Na Seção 8.2, definimos a unidade de quantidade de calor (caloria) em termos da variação de temperatura que produz numa dada massa de água. A identificação do calor como uma forma de energia levou, como vimos na Seção 8.1, ao problema da determinação da “taxa de câmbio” entre a caloria e a unidade mecânica de energia (1 J, no sistema MKS).

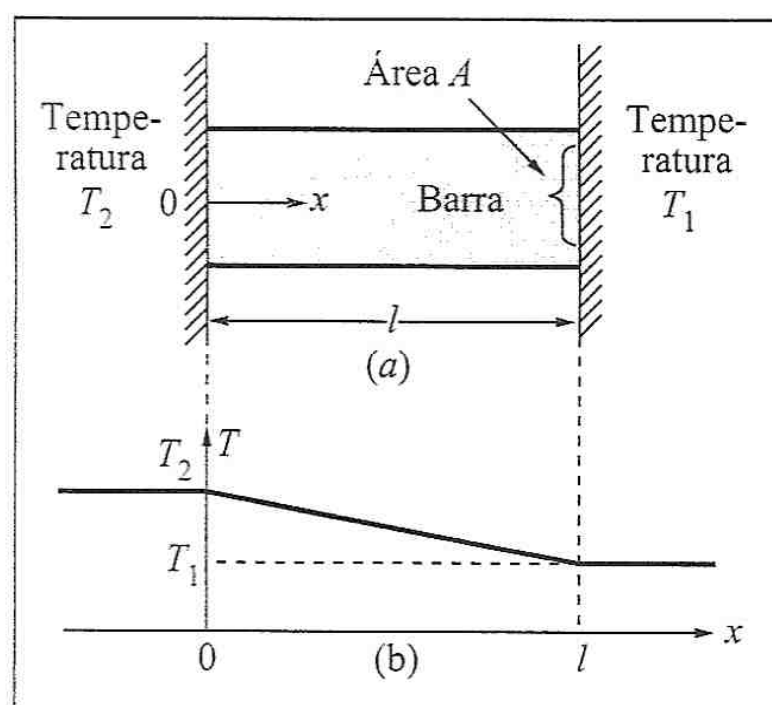


Figura 8.2 — Barra homogênea

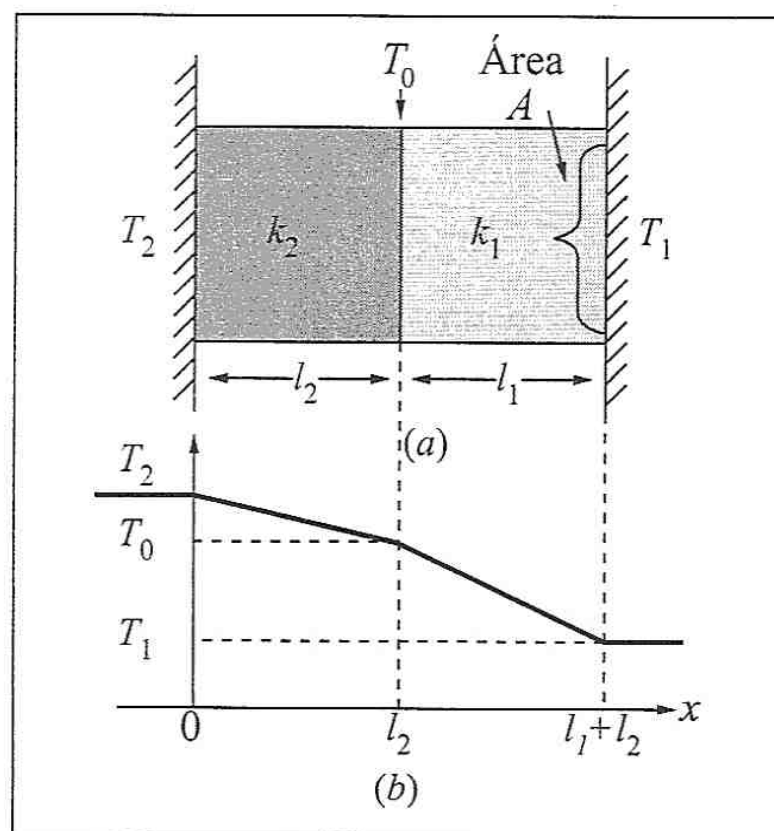


Figura 8.3 — Barra composta

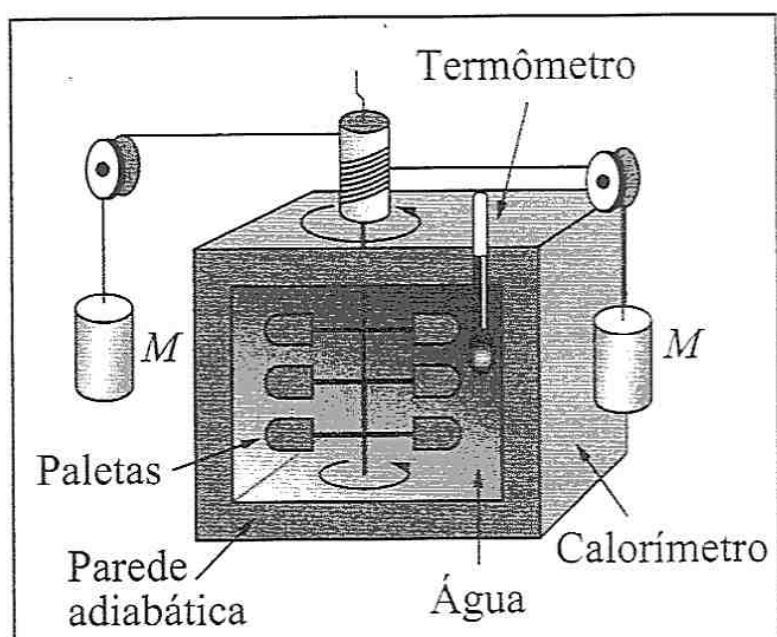


Figura 8.4 — Experimento de Joule

Vimos também que as experiências básicas para a determinação desse *equivalente mecânico da caloria* foram realizadas por Joule. O tipo de aparelho que empregou em suas experiências mais conhecidas está esquematizado na Fig. 8.4.

Num calorímetro (recipiente de paredes *adiabáticas*, ou seja, *termicamente isolado*) cheio de água, é inserido um conjunto de paletas presas a um eixo. Este é colocado em rotação pela queda de um par de pesos (massas M , através de um sistema de polias. O atrito das paletas aquece a água, cuja variação de temperatura, determinada por um termômetro, corresponde a um certo número de calorias. O trabalho

mecânico equivalente é medido pela altura de queda dos pesos.

Joule repetiu a experiência inúmeras vezes, introduzindo variantes no método: mudou a natureza do fluido aquecido e do material das paletas, bem como do processo de aquecimento. Assim, em lugar das paletas, empregou o efeito Joule, o aquecimento de um fio (resistência) provocado pela passagem de uma corrente elétrica. A energia mecânica equivalente, neste caso, corresponde ao trabalho realizado para alimentar o gerador de corrente. Os valores que obteve concordavam entre si dentro de $\sim 5\%$, e seu melhor valor difere do que é atualmente aceito por menos de 1% , o que representa um resultado notável para sua época.

Em 1879, Rowland fez uma determinação extremamente cuidadosa, e estimou o erro do seu resultado em menos de 2 partes por 1.000; de fato, concorda com o valor atual dentro de 1 parte em 2.000. O valor atualmente aceito é

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J} \quad (8.4.1)$$

Exemplo: Uma resistência de $68 \, \Omega$ é imersa em 1 l de água. Quando se faz passar uma corrente de 1 A, a temperatura da água sobe de 1°C por minuto. Qual o valor correspondente do equivalente mecânico da caloria dado por essa experiência?

A potência P dissipada em calor pelo efeito Joule é dada pela expressão bem conhecida

$$P = Ri^2 \quad (8.4.2)$$

onde R é a resistência e i a intensidade da corrente. No caso, $P = 68 \times 1 \text{ W} = 68 \text{ J/s}$, e a energia fornecida por minuto é $68 \times 60 \text{ J} = 4.080 \text{ J}$. O calor necessário para elevar de 1°C a temperatura de 1 l de água é 1 kcal, que equivale portanto a 4.080 J, de modo que esta experiência daria $1 \text{ cal} \approx 4,08 \text{ J}$.

8.5 — A primeira lei da termodinâmica

Em experiências como a de Joule, a água contida no calorímetro pode ser levada de uma temperatura inicial T_i a uma temperatura final T_f , sempre em condições de *isolamento térmico* (paredes adiabáticas: Fig. 8.4), pela realização de trabalho mecânico, de muitas formas diferentes, como vimos (paletas acionadas pela queda de pesos, trabalho fornecido a um gerador de corrente elétrica, etc.). Trabalho realizado sobre um sistema termicamente isolado chama-se *trabalho adiabático*.

Suponhamos que o fluido contido no calorímetro é um gás, em lugar de água. A Fig. 8.5 ilustra outro método de realizar trabalho adiabático sobre o sistema neste caso: variando o seu volume, através de uma compressão adiabática. Sabemos que isto também aquece o gás

(quando bombeamos ar rapidamente para encher um pneu de bicicleta, o que constitui um processo aproximadamente adiabático, ele se aquece).

Como vimos (Seção 7.3), o estado de um fluido homogêneo em equilíbrio térmico fica inteiramente determinado por um par de variáveis, que podem ser a pressão P e o volume V (neste caso, a temperatura T fica determinada), mas também podem ser (P, T) ou (V, T) .

Nas experiências de Joule, o volume V de fluido era mantido constante, de modo que o estado do fluido ficava determinado pela sua temperatura T . Passar de T_i a T_f equivale, nestas condições, a passar de um *estado inicial* i a um *estado final* f através da realização de trabalho adiabático. Joule mostrou que, fazendo isso de várias maneiras diferentes, o *trabalho adiabático necessário para passar do mesmo estado inicial i ao mesmo estado final f era sempre o mesmo*, o que lhe permitiu determinar o equivalente mecânico do número de calorias associado à passagem $T_i \rightarrow T_f$.

No exemplo da Fig. 8.5, de um gás contido num recipiente termicamente isolado com uma parede móvel (pistão), podemos representar graficamente num diagrama (P, V) a passagem de um estado inicial (P_i, V_i) a um estado final (P_f, V_f) através de processos diferentes.

Partindo do ponto inicial i de coordenadas (P_i, V_i) (Fig. 8.6), podemos, por exemplo, comprimir adiabaticamente o gás até o volume final V_f (ponto a do gráfico) e depois levá-lo até o ponto final f de coordenadas (P_f, V_f) fornecendo trabalho adiabático a volume V_f constante, através, por exemplo, de uma resistência e um gerador de corrente elétrica, como nas experiências de Joule.

Alternativamente, podemos começar a volume V_i constante, usando este processo para levar o sistema ao ponto b do gráfico acima, e depois, por compressão adiabática, levá-lo de b até f . Ilustramos assim dois caminhos alternativos, (iaf) e (ibf) , para levar o sistema, mantendo-o sempre termicamente isolado, de i até f .

Generalizando as experiências de Joule, podemos dizer que o trabalho adiabático total para passar de i a f seria o mesmo através de qualquer destes dois caminhos. Esta é uma forma de enunciar a 1.^a lei da termodinâmica:

O trabalho realizado para levar um sistema termicamente isolado de um dado estado inicial a um dado estado final é independente do caminho.

Isto significa que o trabalho adiabático para passar de i a f é o mesmo, quaisquer que sejam os estados intermediários pelos quais o sistema passa, e qualquer que seja a forma de realizar esse trabalho. Logo, esse trabalho só pode depender dos estados inicial e final.

Vimos na mecânica (1, Seção 7.3) que, quando o trabalho independia do caminho, como por exemplo num campo gravitacional, podíamos concluir a existência de uma função *energia potencial* do sistema mecânico, dependente apenas da configuração desse sistema, cuja variação entre as configurações inicial e final correspondia ao trabalho realizado.

Analogamente, decorre do enunciado acima da 1.^a lei da termodinâmica que existe uma *função do estado de um sistema termodinâmico, que chamaremos de sua energia interna U ,*

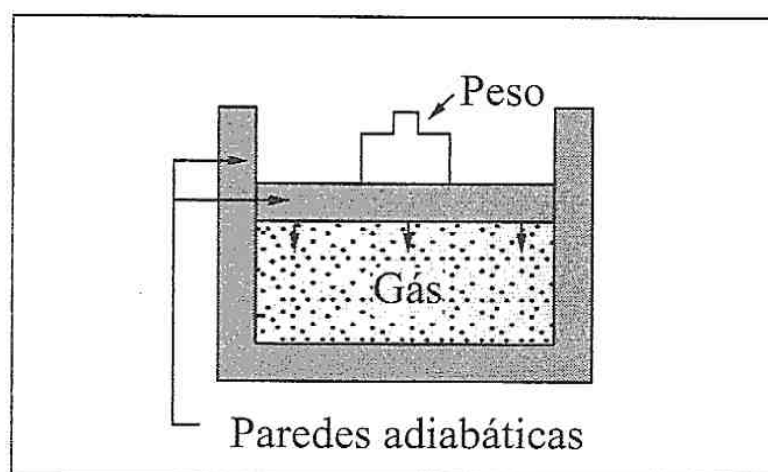


Figura 8.5 — Trabalho adiabático

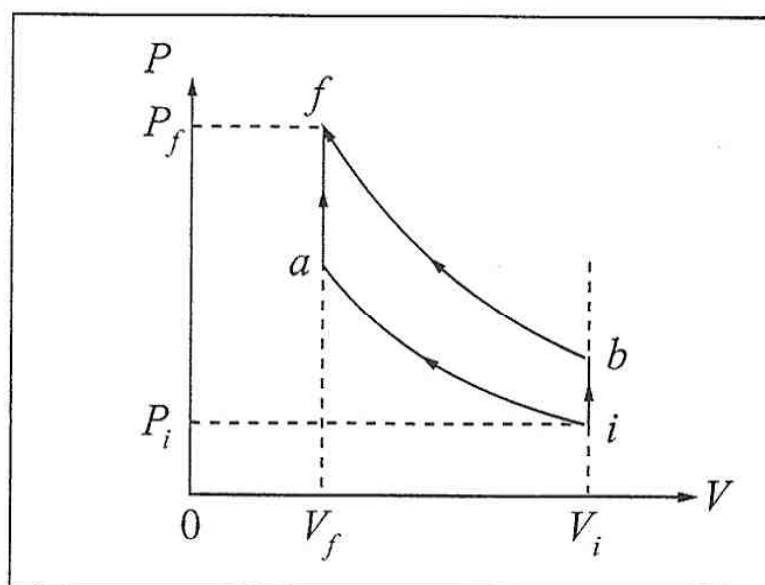


Figura 8.6 — Caminhos diferentes

cuja variação $U_f - U_i$ entre o estado inicial i e o estado final f é igual ao trabalho adiabático necessário para levar o sistema de i até f :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{i \rightarrow f} \quad (\text{adiabático}) \quad (8.5.1)$$

O sinal $(-)$ resulta da seguinte convenção, que adotaremos sempre daqui por diante:

CONVENÇÃO sobre W :

W representa sempre o trabalho realizado **POR** um sistema.

Assim, a energia interna de um sistema aumenta, $(\Delta U > 0)$ quando se realiza trabalho **SOBRE** esse sistema $(W_{i \rightarrow f} < 0)$.

Note-se que, como no caso da mecânica, somente são definidas pela (8.5.1) as *variações* de energia interna, ficando indefinida a escolha do nível zero.

A (8.5.1) também é equivalente a

$$\Delta U = U_f - U_i = +W_{f \rightarrow i} \quad (\text{adiabático}) \quad (8.5.2)$$

o que corresponde ao processo adiabático inverso, em que se passa de f para i , e podemos igualmente bem definir a variação de energia interna pela (8.5.2), em lugar da (8.5.1). Esta observação está longe de ser trivial, porque, conforme veremos mais tarde, os processos naturais geralmente não são reversíveis. Dos dois processos: $i \rightarrow f$ ou $f \rightarrow i$, pode ser que só um seja exeqüível, e por isto é importante que ΔU seja definido quer pela (8.5.1), quer pela (8.5.2).

Dizer que a energia interna U de um sistema termodinâmico é uma *função de estado* significa que U deve ficar completamente definida (a menos de uma constante aditiva arbitrária U_0 , ligada à escolha do nível zero) quando especificamos o estado do sistema. Para um *fluido homogêneo*, por exemplo, um estado de equilíbrio é especificado por qualquer par das variáveis (P, V, T) . Logo, neste caso, podemos considerar U como função de qualquer desses pares:

$$U = U(P, V); \quad U = U(P, T); \quad U(V, T) \quad (8.5.3)$$

Calor

Em lugar de levar um sistema de um estado i a um estado f por um processo adiabático, associado à realização de trabalho, podemos levá-lo do mesmo estado inicial ao mesmo estado final por processos não-adiabáticos, ou seja, sem mantê-lo em isolamento térmico. Neste caso, o recipiente que encerra o sistema deverá ter pelo menos uma parede diatérmica, permitindo a passagem de calor (Seção 7.2).

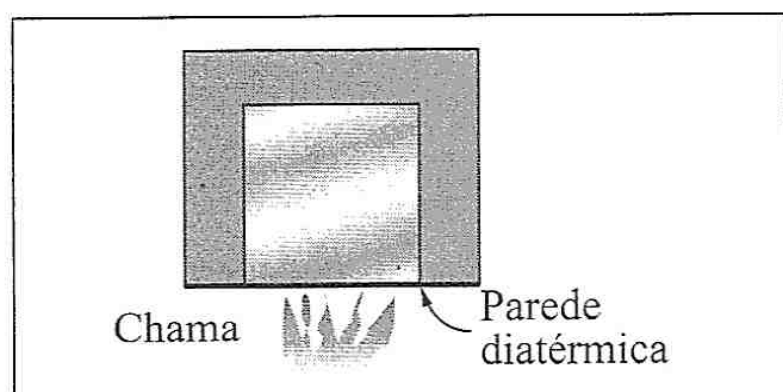


Figura 8.7 — Fornecimento de calor

Assim, por exemplo, na experiência de Joule, em lugar de aquecer a água de T_i para T_f fornecendo trabalho mecânico, podemos fazê-lo sem que qualquer trabalho mecânico esteja envolvido ($W_{i \rightarrow f} = 0$): basta que o sistema tenha uma parede diatérmica, colocada sobre uma chama de um bico de Bunsen, por exemplo (Fig. 8.7).

Analogamente, em lugar de expandir ou comprimir um gás adiabaticamente (Fig. 8.5), podemos fazê-lo isotermicamente, ou seja, mantendo-o a temperatura constante, colocando-o em contato, através de uma parede diatérmica, com um reservatório térmico (pg. 171) à temperatura T

(Fig. 8.8). Neste caso, o movimento do pistão na expansão ou compressão estará associado a um trabalho $W_{i \rightarrow f}$, mas ele não será mais igual ao que se teria no caso adiabático.

Como a energia interna do sistema é uma função de estado, e os estados i (inicial) e f (final) são sempre os mesmos, a variação de energia interna correspondente, $\Delta U = U_f - U_i$ é sempre a mesma, mas a (8.5.1) deixa de valer quando o trabalho $W_{i \rightarrow f}$ não é adiabático. A 1.^a lei da termodinâmica, que equivale ao princípio de conservação da energia, identifica a contribuição a ΔU que não é devida a trabalho fornecido ao sistema com uma nova forma de energia, o calor Q transferido ao sistema:

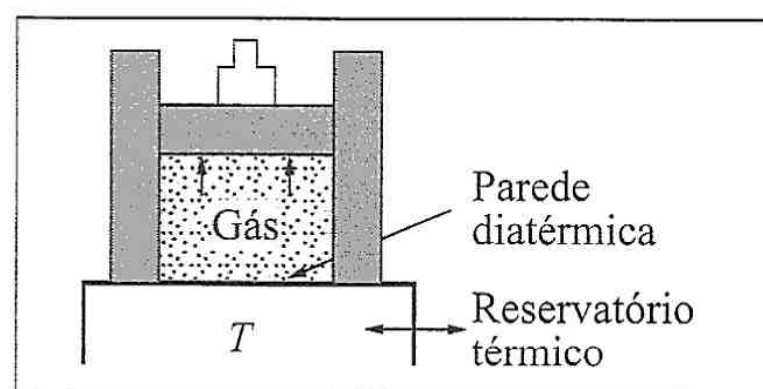


Figura 8.8 — Expansão isotérmica

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - W_{i \rightarrow f} \quad (8.5.4)$$

Na (8.5.4), que é a definição termodinâmica de Q , o calor já é medido em unidades de energia. O sinal de Q resulta da convenção que será sempre adotada:

CONVENÇÃO sobre Q :

Q representa sempre o calor fornecido A um sistema.

Assim, a energia interna de um sistema aumenta ($\Delta U > 0$) quando lhe fornecemos calor ($Q > 0$) ou realizamos trabalho sobre ele ($W_{i \rightarrow f} < 0$). As convenções de sinal sobre Q e W se originam historicamente da aplicação da termodinâmica às máquinas térmicas, para as quais é conveniente contar positivamente o calor FORNECIDO À máquina e o trabalho REALIZADO POR ela.

A (8.5.1) é um caso particular da (8.5.4): vemos que um processo é adiabático se $Q = 0$. Isto ocorre quando o sistema é isolado termicamente, mas também pode ocorrer se o processo é realizado tão rapidamente que não há tempo para uma transferência de calor apreciável para dentro ou para fora do sistema. Já vimos um exemplo em que isto acontece: as compressões ou rarefações do ar numa onda sonora (pág. 128).

A Fig. 8.7 ilustra um exemplo onde $W_{i \rightarrow f} = 0$, e a variação de energia interna se deve somente à transferência de calor. A compressão ou expansão isotérmica de um gás (Fig. 8.8) fornece um exemplo onde $Q \neq 0$ e $W_{i \rightarrow f} \neq 0$ ao mesmo tempo.

A (8.5.4) é a formulação geral da 1.^a lei da termodinâmica. Podemos enunciá-la sucintamente dizendo: a energia se conserva quando levamos em conta o calor. Neste sentido, as forças “não-conservativas” ou “dissipativas” encontradas na mecânica (1, Seção 5.2), como a força de atrito, também conservam a energia total, nela incluindo o calor.

Vemos que o calor Q representa a energia transferida entre o sistema e sua vizinhança através de uma parede diatérmica, devido a diferenças de temperatura, descontando-se a eventual transferência de trabalho.

Não é óbvio, *a priori*, que esta definição termodinâmica de Q coincida com a definição calorimétrica de Q dada na Seção 8.2, onde Q é medido, tipicamente, pelo processo ilustrado na pg. 171: um corpo A é colocado em contato térmico com um corpo B (massa de água) dentro de um recipiente isolado adiabaticamente (calorímetro). Nestas condições, nenhum trabalho é realizado, de modo que a (8.5.4) dá

$$\Delta U_A = Q_A, \quad \Delta U_B = Q_B \quad (8.5.5)$$

Para o sistema total, como o calorímetro tem paredes adiabáticas ($Q = 0$) e $W_{i \rightarrow f} = 0$, vem

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0 \{ Q_B = -Q_A$$

(8.5.6)

Logo, o calor cedido por A é transferido para B (água), ocasionando uma variação de temperatura, que é a base da definição calorimétrica. Vemos assim que as duas definições coincidem.

A subdivisão entre calor e trabalho depende do que decidimos incluir como fazendo parte do sistema ou de sua vizinhança. Assim, se aquecemos água por meio de uma resistência elétrica, e fornecemos trabalho para alimentar o gerador de corrente, há transferência de trabalho quando o gerador é incluído no sistema, mas, se considerarmos somente a água como o sistema, só há transferência de calor (devido à diferença de temperatura entre a resistência e a água).

8.6 — Processos reversíveis

Consideremos um fluido (por exemplo, um gás) em equilíbrio térmico, ocupando um

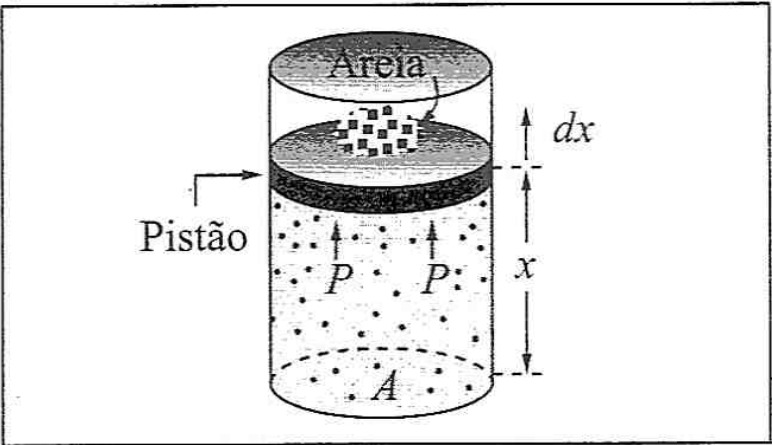


Figura 8.9 — Expansão reversível

recipiente cilíndrico de área da base A e altura x (Fig. 8.9), sobre o qual exerce uma pressão P ; o volume do recipiente é $V = Ax$. A base superior é móvel (pistão), e o gás exerce sobre ela uma força $F = PA$, equilibrada por um peso equivalente, representado na Fig. 8.9 por um monte de areia colocado sobre o pistão. Supomos que o atrito entre o pistão e as paredes é desprezível.

Vamos imaginar que o gás sofre uma expansão infinitésima, correspondente a um deslocamento infinitésimo dx do pistão: podemos concebê-lo como

resultante da remoção de um só grão de areia do monte. O trabalho realizado pelo fluido nessa expansão é

$$d'W = Fdx = PA dx = PdV$$

(8.6.1)

onde $dV = A dx$ é a variação de volume do fluido. A razão pela qual usamos a notação $d'W$ em lugar de dW é que, embora se trate de um trabalho infinitésimo, não representa a diferencial exata de uma função W , conforme será explicado mais adiante.

Se repetirmos este procedimento, levando gradativamente a uma expansão finita, o processo se diz *reversível*, desde que as seguintes condições estejam satisfeitas:

- (i) O processo se realiza *muito lentamente*,
- (ii) O atrito é desprezível.

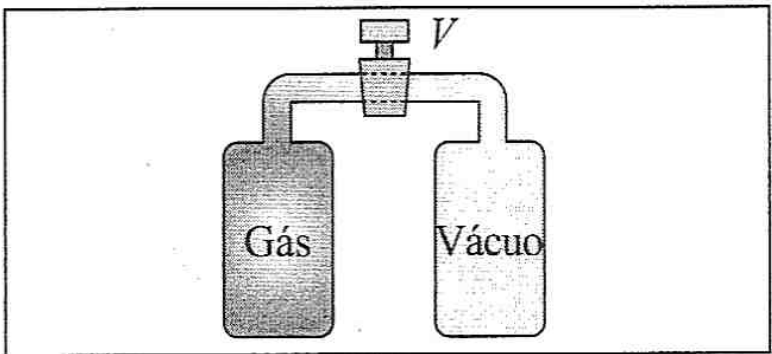


Figura 8.10 — Expansão livre

(i) Esta condição é indispensável para que o fluido passe por uma *sucessão de estados de equilíbrio térmico*, em cada um dos quais P e V são bem definidos. Para ver por que isto é necessário, é interessante considerar um contra-exemplo: a *expansão livre de um gás*. Dois recipientes, um contendo gás e outro em que se fez vácuo, estão ligados por uma tubulação em que há uma válvula V , inicialmente fechada (Fig.

8.10). Num dado instante, abre-se a válvula. O gás se expande rapidamente até preencher os dois recipientes. Depois que voltou a atingir o equilíbrio térmico, terá havido uma variação

de volume e uma variação de pressão, mas o trabalho externo realizado pelo gás na expansão livre é nulo, de modo que a (8.6.1) não pode ser aplicada.

O que acontece neste exemplo, logo após a abertura da válvula, é que se produz um escoamento turbulento (Seções. 2.1 e 2.7) do gás através da tubulação. Para descrever o processo de expansão, seria preciso empregar variáveis hidrodinâmicas (pressão, velocidade, densidade) que variariam rapidamente de ponto a ponto do gás, ou seja, os estados intermediários atravessados pelo sistema estão muito longe do equilíbrio termodinâmico, sendo impossível descrevê-los em termos das variáveis termodinâmicas P e V .

Idealmente, o processo de expansão deve ser “infinitamente lento”: a cada instante, a diferença entre o estado do sistema e um estado de equilíbrio termodinâmico deve ser infinitésima. Um tal processo se chama *quase-estático*: podemos imaginar que se retira a areia grão a grão, aguardando cada vez um tempo suficiente (tempo de relaxação) para que se restabeleça o equilíbrio após a expansão infinitésima. Na prática, o tempo de relaxação é bastante curto, e basta que a velocidade de expansão seja pequena, em confronto com a velocidade de restabelecimento do equilíbrio.

(ii) Se existe atrito entre o pistão e as paredes, a pressão externa P' durante a expansão tem de ser $< P$, a diferença representando a força necessária para vencer o atrito. Logo, o trabalho externo realizado será $P' dV < PdV$, a diferença representando o calor gerado pelo atrito.

Um processo de expansão quase-estático e sem atrito é *reversível*, ou seja, pode ser invertido. Isto se faz passando pela sucessão de estados de equilíbrio em sentido inverso: recolocamos a areia grão a grão. Como $dV < 0$, o trabalho realizado “pelo” gás $PdV < 0$ representa na realidade o trabalho que realizamos sobre ele ($-PdV > 0$) para comprimi-lo.

O trabalho realizado por um fluido num processo reversível em que o volume passa de V_i a V_f é

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{V_i}^{V_f} d'W = \int_{V_i}^{V_f} PdV \quad (8.6.2)$$

Embora tenhamos considerado à pág. 178 um recipiente cilíndrico, a (8.6.1) vale para um recipiente de forma qualquer. Com efeito, se um elemento de área dA da superfície do recipiente sofre um deslocamento para fora dn (na direção da normal) no processo de expansão (Fig. 8.11), o trabalho realizado é $PdA dn$, e o trabalho total, obtido integrando sobre toda a superfície do recipiente (P é constante) é igual a PdV , onde dV é a variação de volume do recipiente. Logo, a (8.6.1) permanece válida.

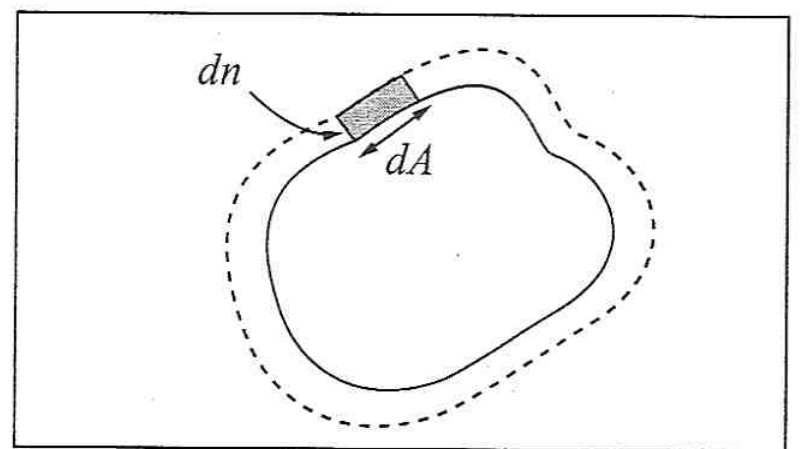


Figura 8.11 — Recipiente qualquer

Representação gráfica

Como um estado de equilíbrio termodinâmico de um fluido homogêneo fica definido por um par de variáveis, por exemplo, (P, V) , podemos representá-lo por um ponto no plano P, V . Uma *transformação termodinâmica reversível* faz o sistema passar por uma sucessão de estados de equilíbrio, o que corresponde a descrever uma curva nesse plano. Essa curva chama-se o *diagrama indicador* da transformação. Esta representação foi introduzida por James Watt, o inventor da máquina a vapor.

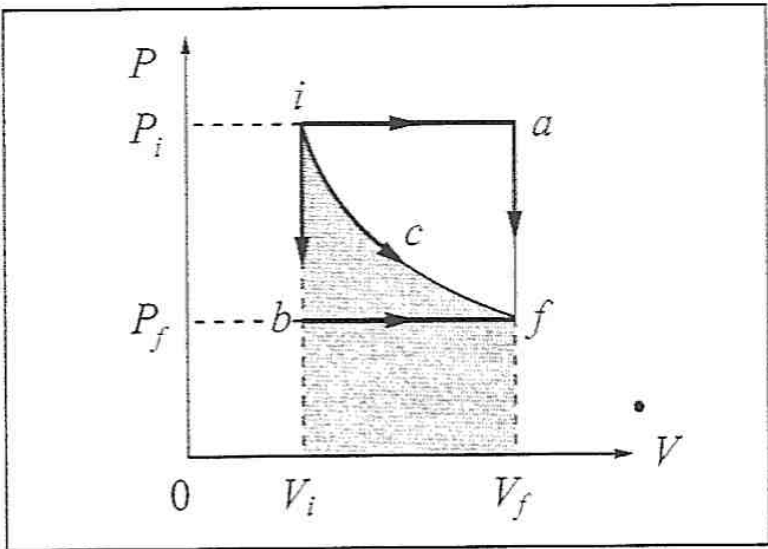


Figura 8.12 — Diagrama indicador

Como a temperatura T fica definida pelo par (P, V) , cada curva ou caminho para ir de um ponto i a um ponto f do plano define como varia a temperatura ao longo do processo. Por exemplo, na Fig. 8.12, o caminho icf pode representar uma porção de *isoterma*, ao longo da qual $T = \text{constante}$. Os caminhos iaf e ibf são compostos de porções de *isóbaras*, ao longo das quais $P = \text{constante}$ ($P = P_i$ ou $P = P_f$), e de *isócoras*, ao longo das quais $V = \text{constante}$ ($V = V_i$ ou $V = V_f$).

O trabalho $W_{i \rightarrow f}$ realizado pelo sistema num processo reversível é dado pela (8.6.2), cuja interpretação gráfica é imediata: é a área compreendida entre a curva $P = P(V)$ e o eixo dos V , entre V_i e V_f . Como $P = P(V, T)$, a curva fica definida por $T = T(V)$, ou seja, por um caminho entre i e f . Assim, na Fig. 8.12, a área sombreada representa $W_{i \rightarrow f}$, ou seja, o trabalho realizado ao longo do caminho icf . Evidentemente, o trabalho realizado ao longo de outros caminhos, tais como iaf ou ibf , seria diferente.

Logo, o trabalho $W_{i \rightarrow f}$ depende do caminho pelo qual se vai de i a f , ao contrário da variação de energia interna, $U_f - U_i$, que não depende do caminho, mas tão somente dos estados inicial e final. É por isto que *não existe uma função de estado W* , que representaria o “trabalho contido num sistema” num dado estado, da mesma forma que U é a energia interna do sistema nesse estado.

Esta é a razão pela qual adotamos a notação $d'W$ em lugar de dW : não existe uma função W da qual $d'W$ seja a diferencial. Por isto, $d'W$ é chamada de *diferencial inexata*.

Assim, se não especificamos a relação entre y e x , ydx é uma diferencial inexata, e a integral de y entre x_i e x_f depende do caminho, ou seja, da curva $y = y(x)$ escolhida para ligar x_i a x_f . Por outro lado, $x^2 dx = d(x^3/3 + \text{constante})$ é uma diferencial exata.

Como um dado caminho corresponde a um processo reversível, temos

$$W_{i \xrightarrow{c} f} = -W_{f \xrightarrow{c} i} \tag{8.6.3}$$

ou seja, se percorrermos o caminho em sentido inverso, o trabalho associado troca de sinal.

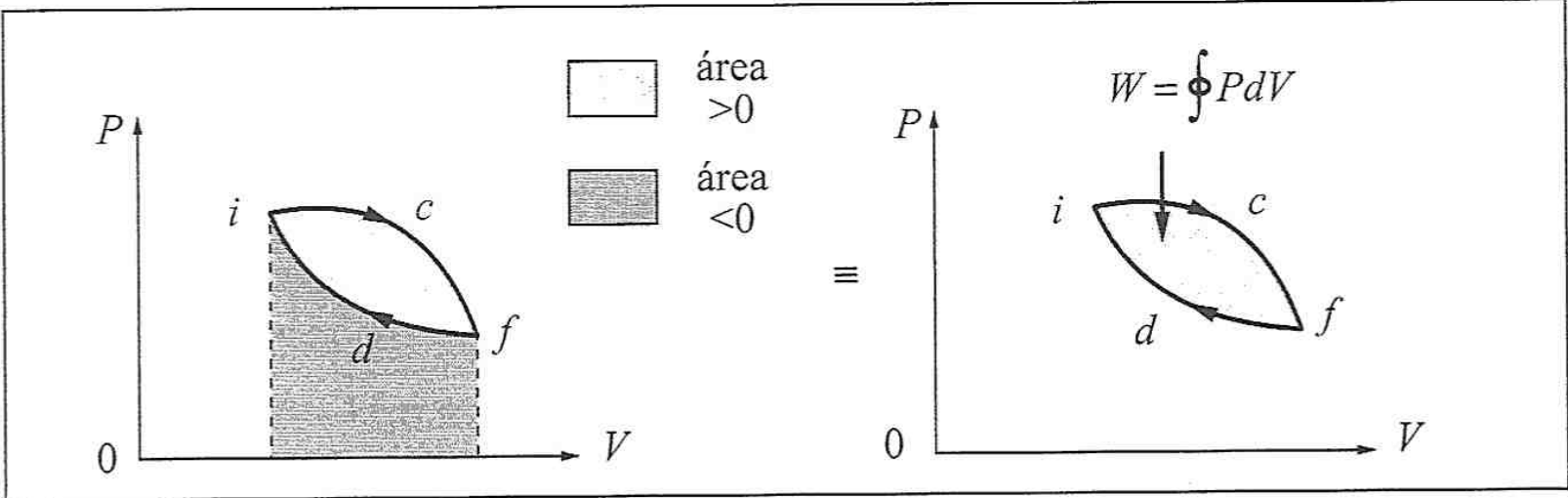


Figura 8.13 — Ciclo

Um caminho em que o sistema *volta ao seu estado inicial* chama-se um *caminho fechado* ou *ciclo*. Conforme ilustrado na Fig. 8.13, o trabalho realizado pelo sistema num ciclo corresponde à *área contida dentro da curva fechada*. Com efeito, pela (8.6.3), usando as notações da Fig. 8.13,

$$W = W_{i \xrightarrow{c} f} + W_{f \xrightarrow{d} i} = W_{i \xrightarrow{c} f} - W_{i \xrightarrow{d} f}$$

o que corresponde à área sombreada na figura da direita. Escrevemos

$$W = \oint P dV \quad (8.6.4)$$

e vemos que $W > 0$ quando o ciclo é descrito no sentido horário; se o descrevermos no sentido anti-horário teremos $W < 0$.

Calor num processo reversível

Como transferir calor a um sistema de forma reversível? A Fig. 8.14 ilustra de que forma isso pode ser feito. Partindo da temperatura inicial T_i do sistema (representado na figura em contato térmico com um reservatório térmico de temperatura T_i), transferimos o sistema para contato térmico com outro reservatório térmico à temperatura $T_i + dT$, onde dT é infinitésimo, e aguardamos até que se restabeleça o equilíbrio térmico. Daí o transferimos para novo reservatório térmico à temperatura $T_i + 2dT$, e assim sucessivamente, elevando de dT a temperatura em cada estágio, até que seja atingida a temperatura final T_f , correspondente à transferência de calor desejada. Como a temperatura de cada reservatório térmico não é afetada pela troca de calor infinitesimal, o processo todo é reversível, bastando para isso inverter a ordem das operações.

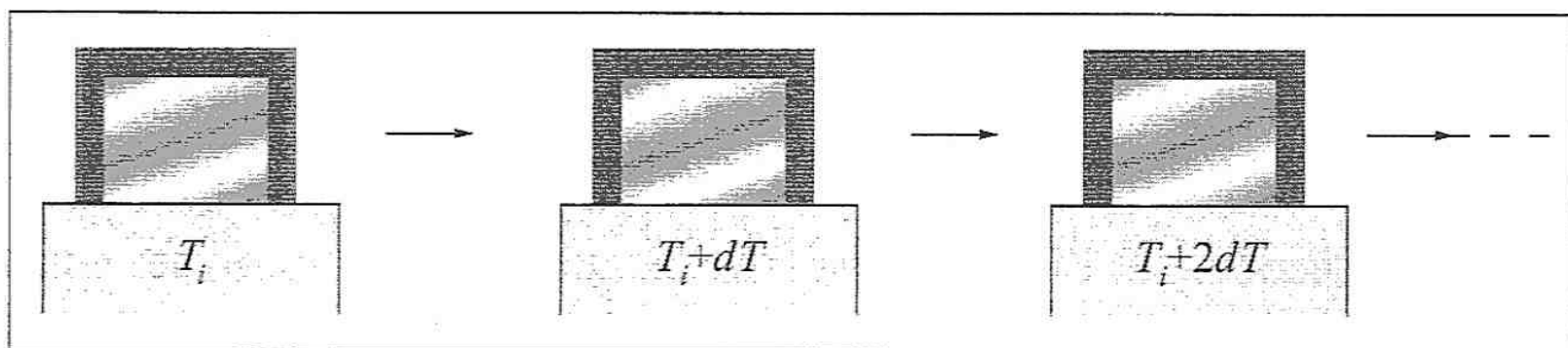


Figura 8.14 — Transferência reversível de calor

Em contraste com este procedimento, o aquecimento de uma panela de água colocada sobre uma chama não é, obviamente, um processo reversível: é inútil esperar que a água quente devolva o calor à chama e se resfrie!

Consideremos agora a (8.5.4). Como $W_{i \rightarrow f}$ num processo reversível, depende do caminho, e $\Delta U = U_f - U_i$ não depende, concluímos que Q também depende do caminho ou seja, não existe uma função de estado Q , que representaria o “calor contido num sistema”: o calor não é uma substância, ao contrário do que pretendia a teoria do calórico!

Devemos portanto representar por $d'Q$ (diferencial inexata) uma transferência de calor infinitesimal. Se essa transferência se dá por um processo reversível, produzindo uma variação dT de temperatura num sistema de capacidade térmica C , temos (8.2.1)

$$d'Q = CdT \quad (8.6.5)$$

que podemos considerar como o análogo da (8.6.1).

A formulação infinitesimal da 1.ª lei da termodinâmica (8.5.4) é portanto

$$dU = d'Q - d'W \quad (8.6.6)$$

onde a diferencial exata dU é a diferença das duas diferenciais inexatas $d'Q$ e $d'W$, da mesma forma que, somando as diferenciais inexatas ydx e xdy , obtemos a diferencial exata

$$ydx + xdy = d(xy + \text{constante}).$$

Para uma transformação reversível aplicada a um fluido homogêneo, obtemos, substituindo as (8.6.1) e (8.6.5) na (8.6.6),

$$\boxed{dU = CdT - PdV} \quad (8.6.7)$$

Da mesma forma que, na (8.6.2), P depende do caminho, podemos também escrever, para um processo reversível onde a temperatura passa de T_i a T_f ,

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} CdT \quad (8.6.8)$$

onde a *capacidade térmica* C depende do caminho. Já foi mencionado à pág. 170 que isto vale para o calor específico: o calor específico c_p a pressão constante é geralmente diferente do calor específico c_v a volume constante.

Notemos, em conclusão, que a *energia interna de um sistema num dado estado não pode ser identificada nem com calor nem com trabalho*: é impossível dizer que proporção dela representa “calor” e que proporção “trabalho”. Isto decorre diretamente do fato de que calor e trabalho não são funções de estado. Podemos produzir a mesma variação de energia interna num sistema fornecendo-lhe calor e trabalho em proporções variáveis de forma arbitrária. Os termos calor e trabalho referem-se sempre a *trocas* ou *fluxos* de energia entre um sistema e sua vizinhança.

8.7 — Exemplos de processos

(a) Ciclo

Para um processo cíclico (Fig. 8.13), o sistema volta sempre exatamente ao seu estado inicial. Logo, $\Delta U = 0$ e a 1.ª lei dá

$$\boxed{W = Q} \quad (8.7.1)$$

ou seja, o trabalho produzido pelo sistema num ciclo reversível é igual ao calor que lhe é fornecido. Este resultado se aplica em particular às máquinas térmicas, que operam em ciclos sempre repetidos.

(b) Processo isobárico

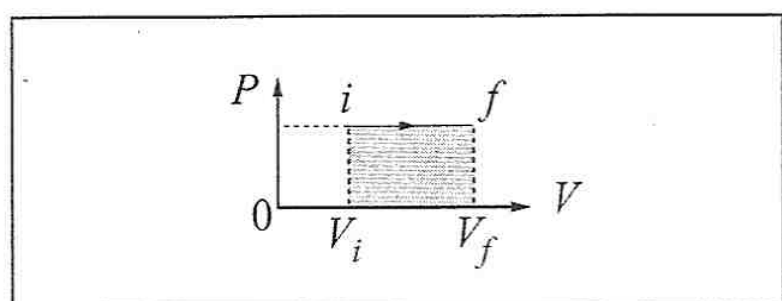


Figura 8.15 — Processo isobárico

É, por definição, um processo em que a *pressão* P permanece constante: por exemplo, processos que ocorrem à pressão atmosférica. Pela (8.6.2), o trabalho realizado num processo isobárico reversível é (Fig 8.15)

$$W_{i \rightarrow f} = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) \quad (8.7.2)$$

e a 1.ª lei fica

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = Q - P(V_f - V_i)} \quad (\text{isobárico}) \quad (8.7.3)$$

Exemplo: Na caldeira de uma máquina a vapor, a água é primeiro aquecida até a temperatura de ebulição, e depois vai sendo vaporizada a pressão constante.

Podemos esquematizar o processo, para cada porção de água convertida em vapor, da forma indicada na Fig. 8.16. No estado inicial i , temos uma certa massa de água em forma líquida, ocupando um volume V_l . A caldeira fornece um calor Q para vaporizar a água à pressão constante P ; idealizamos a caldeira como um reservatório térmico. O volume de vapor de água produzido é V_v . Geralmente, $V_v \gg V_l$, de modo que houve uma *expansão isobárica* do fluido.

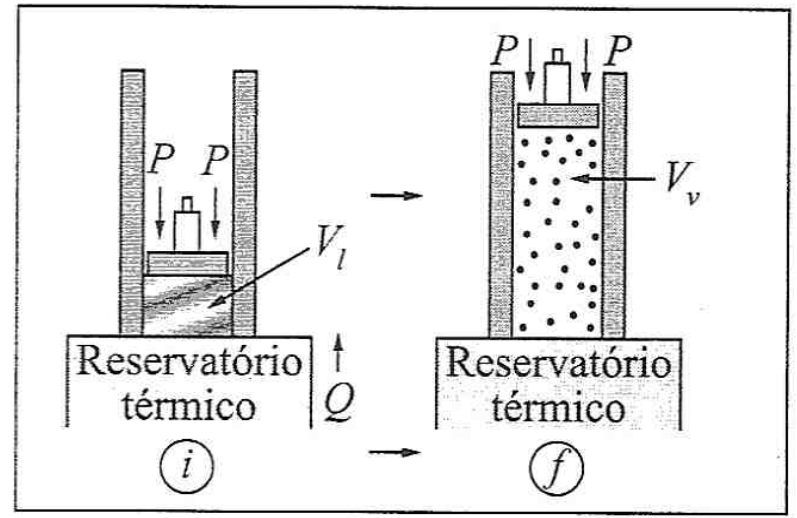


Figura 8.16 — Expansão isobárica

Para vaporizar 1 g de água, é preciso fornecer-lhe uma quantidade de calor L chamada de *calor latente de vaporização*. Para a água a $P = 1 \text{ atm}$ e $T = 100^\circ\text{C}$, tem-se $L = 539 \text{ cal/g}$; na caldeira de uma máquina a vapor, em geral, a pressão e a temperatura são bem mais elevadas.

Se o sistema consiste em m gramas de água, temos portanto, por definição,

$$Q = mL \quad (8.7.4)$$

e o trabalho realizado na expansão isobárica é dado pela (8.7.2), com $V_i = V_l$ e $V_f = V_v$. Logo, a (8.7.3) dá

$$\Delta U = mL - P(V_v - V_l) \quad (8.7.5)$$

Esta variação de energia interna necessária para levar o sistema do estado líquido ao de vapor pode ser interpretada, do ponto de vista microscópico, como a energia necessária para romper as forças de atração entre as moléculas de água no líquido.

(c) Processo adiabático

É um processo que ocorre sem que haja trocas de calor entre o sistema e sua vizinhança, ou seja,

$$Q = 0 \quad (8.7.6)$$

Logo, a 1.ª lei volta a assumir a forma (8.5.1):

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{i \rightarrow f} \quad (\text{adiabático}) \quad (8.7.7)$$

É importante notar que a (8.7.7) é aplicável quer o processo seja reversível, quer não seja: esta forma da 1.ª lei representa simplesmente a lei de conservação da energia. Para um processo reversível num fluido, a diferença é que a (8.6.2) também pode ser aplicada; se o processo não é reversível, $W_{i \rightarrow f}$ deixa de ser dado pela (8.6.2), mas a (8.7.7) permanece válida.

Exemplos: (i) Na compressão adiabática de um gás (Fig. 8.17), temos $W_{i \rightarrow f} < 0$, de modo que $U_f > U_i$. Geralmente isto implica que a temperatura aumenta: $T_f > T_i$, ou seja, a compressão adiabática aquece o gás. Reciprocamente, uma expansão adiabática resfria um gás, o que é utilizado na produção de baixas temperaturas.

(ii) Qualquer processo realizado num calorímetro de paredes adiabáticas, como a experiência de Joule ilustrada na Fig. 8.4, é adiabático.

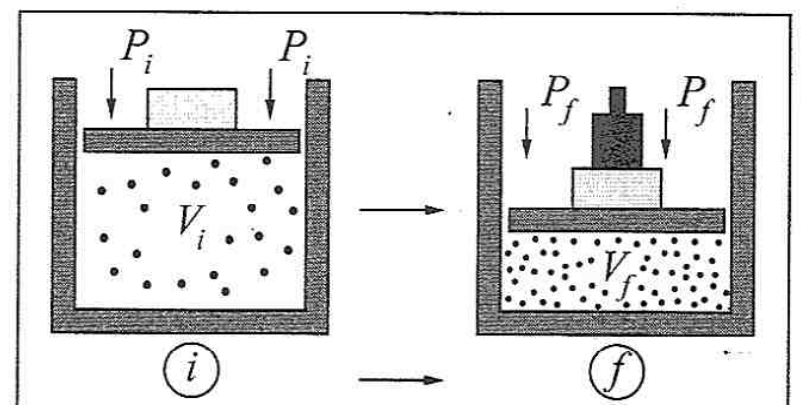


Figura 8.17 — Compressão adiabática

(iii) Conforme já foi mencionado à pág. 177, qualquer processo suficientemente rápido para que não haja tempo de transferir calor (a transmissão de calor por condução e convecção é relativamente lenta num meio isolante como um gás) pode ser tratado como adiabático. *Exemplos:* a propagação de ondas sonoras; o aquecimento do ar quando bombeamos um pneu de bicicleta; a expansão do vapor entre a caldeira e o condensador de uma máquina a vapor; a expansão da mistura de gases aquecidos num motor de automóvel.

(iv) A *experiência de Joule de expansão livre*: Joule realizou a experiência da expansão livre, ilustrada na pág. 178, com o sistema todo imerso num calorímetro de água com paredes adiabáticas. Como vimos à pág. 179, tem-se $W_{i \rightarrow f} = 0$ neste caso (o volume do sistema total não se altera, de modo que não há trabalho externo realizado). Logo, a (8.7.7) dá

$$\Delta U = 0 \quad (8.7.8)$$

ou seja, a energia do gás não varia neste processo adiabático irreversível.

Note que, neste exemplo, embora os estados inicial e final sejam de equilíbrio termodinâmico, podendo pois ser representados por pontos i e f num gráfico (P, V) , por exemplo (Fig. 8.12), os estados intermediários da expansão *não são estados de equilíbrio termodinâmico* (pág. 179), e não podem pois ser representados nesse gráfico.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 8

1. Verifique se a estimativa de Joule para a variação de temperatura da água entre o sopé e o topo das cataratas de Niagara (pág. 169) era correta, calculando a máxima diferença de temperatura possível devida à queda da água. A altura de queda é de 50 m.
2. A capacidade térmica molar (a volume constante) de um sólido a baixas temperaturas, $T \ll T_D$, onde T_D é a temperatura de Debye (pág. 171), é dada por: $C_V \approx 464 (T/T_D)^3$ cal/mol.K. Para o NaCl, $T_D \approx 281$ K. (a) Calcule a capacidade térmica molar média \bar{C}_V do NaCl entre $T_i = 10$ K e $T_f = 20$ K. (b) Calcule a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 kg de NaCl de 10 K para 20 K.
3. Um bloco de gelo de 1 tonelada, destacado de uma geleira, desliza por uma encosta de 10° de inclinação com velocidade constante de 0,1 m/s. O calor latente de fusão do gelo (quantidade de calor necessária para liquefação por unidade de massa) é de 80 cal/g. Calcule a quantidade de gelo que se derrete por minuto em consequência do atrito.
4. A *constante solar*, quantidade de energia solar que chega à Terra por unidade de tempo e área, acima da atmosfera e para um elemento de área perpendicular à direção dos raios solares, é de $1,36$ kW/m². Para um elemento de área cuja normal faz um ângulo θ com a direção dos raios solares, o fluxo de energia varia com $\cos \theta$. (a) Calcule a quantidade total de energia solar que chega à Terra por dia. *Sugestão:* Para um elemento de superfície dS , leve em conta a interpretação de $dS \cos \theta$ como projeção sobre um plano (Capítulo 1, problema 8). (b) Sabe-se que $\approx 23\%$ da energia solar incidente sobre a água vão produzir evaporação. O calor latente de vaporização da água à temperatura ambiente (quantidade de calor necessária para vaporizá-la por unidade de massa) é ≈ 590 cal/g. Sabendo que $\approx 71\%$ da superfície da Terra são cobertos por oceanos, calcule a profundidade da camada de água dos oceanos que seria evaporada por dia pela energia solar que chega à Terra.

5. Um calorímetro de alumínio de 250 g contém 0,5 l de água a 20°C, inicialmente em equilíbrio. Coloca-se dentro do calorímetro um bloco de gelo de 100 g. Calcule a temperatura final do sistema. O calor específico do alumínio é 0,21 cal/g°C e o calor latente de fusão do gelo é de 80 cal/g (durante o processo de fusão, o gelo permanece a 0°C).
6. Um calorímetro de latão de 200 g contém 250 g de água a 30°C, inicialmente em equilíbrio. Quando 150 g de álcool etílico a 15°C são despejadas dentro do calorímetro, a temperatura de equilíbrio atingida é de 26,3°C. O calor específico do latão é 0,09 cal/g. Calcule o calor específico do álcool etílico.
7. Um calorímetro de capacidade térmica igual a 50 cal/g contém uma mistura de 100 g de água e 100 g de gelo, em equilíbrio térmico. Mergulha-se nele um aquecedor elétrico de capacidade térmica desprezível, pelo qual se faz passar uma corrente, com potência P constante. Após 5 minutos, o calorímetro contém água a 39,7°C. O calor latente de fusão é 80 cal/g. Qual é a potência (em W) do aquecedor?

8. O calor específico de um fluido pode ser medido com o auxílio de um calorímetro de fluxo (Fig. P.1). O fluido atravessa o calorímetro num escoamento estacionário, com vazão de massa V_m (massa por unidade de tempo) constante. Penetrando à temperatura T_i , o fluido passa por um aquecedor elétrico de potência P constante e emerge com temperatura T_f (fig.), em regime estacionário. Numa experiência com benzeno, tem-se $V_m = 5$ g/s, $P = 200$ W, $T_i = 15^\circ\text{C}$ e $T_f = 38,3^\circ\text{C}$. Determine o calor específico do benzeno.

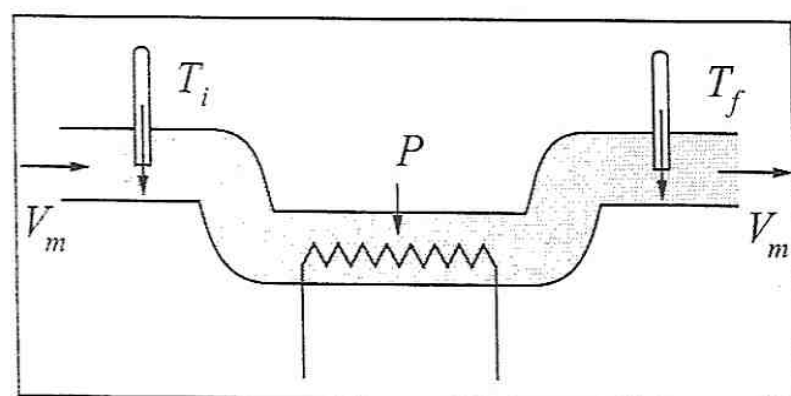


Figura P.1

9. Num dos experimentos originais de Joule (pág. 174), o trabalho era produzido pela queda de uma massa de 26,3 kg de uma altura de 1,60 m, repetida 20 vezes. O equivalente em água da massa da água e do calorímetro que a continha era de 6,32 kg e a variação de temperatura medida foi de 0,313°C. Que valor para o equivalente mecânico da caloria resulta destes dados experimentais?
10. A uma temperatura ambiente de 27°C, uma bala de chumbo de 10 g, com uma velocidade de 300 m/s, penetra num pêndulo balístico de massa igual a 200 g e fica retida nele. Se a energia cinética dissipada pela bala fosse totalmente gasta em aquecê-la, daria para derreter uma parte dela? Em caso afirmativo, quantas gramas? O calor específico do chumbo é 0,031 cal/g°C, sua temperatura de fusão é de 327°C e o calor latente de fusão é 5,85 cal/g.
11. Uma barra de secção transversal constante de 1 cm² de área tem 15 cm de comprimento, dos quais 5 cm de alumínio e 10 cm de cobre. A extremidade de alumínio está em contato com um reservatório térmico a 100°C, e a de cobre com outro, a 0°C. A condutividade térmica do alumínio é 0,48 cal/s.cm.°C e a do cobre é 0,92 cal/s.cm.°C. (a) Qual é a temperatura da barra na junção entre o alumínio e o cobre? (b) Se o reservatório térmico a 0°C é uma mistura de água com gelo fundente, qual é a massa de gelo que se derrete por hora? O calor latente de fusão do gelo é 80 cal/g.
12. Uma barra metálica retilínea de secção homogênea é formada de três segmentos de materiais diferentes, de comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , e condutividades térmicas k_1 , k_2 e k_3 , respectivamente. Qual é a condutividade térmica k da barra como um todo (ou seja, de uma barra equivalente de um único material e comprimento $l_1 + l_2 + l_3$)?

13. Duas esferas metálicas concêntricas, de raios r_1 e $r_2 > r_1$, são mantidas respectivamente às temperaturas T_1 e T_2 , e estão separadas por uma camada de material homogêneo de condutividade térmica k (Fig. P.2). Calcule a taxa de transmissão de calor por unidade de tempo através dessa camada. *Sugestão:* Considere uma superfície esférica concêntrica intermediária de raio r ($r_1 < r < r_2$) e escreva a lei de condução do calor através dessa superfície. Integre depois em relação a r , de $r = r_1$ até $r = r_2$.

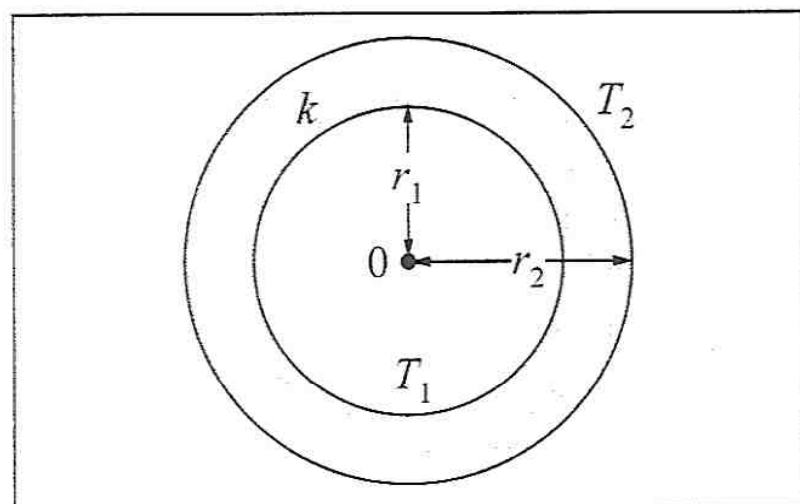


Figura P.2

14. Generalize o resultado de Problema 13 ao caso da condução do calor através de uma camada de material de condutividade térmica k entre dois cilindros concêntricos de raios ρ_1 e $\rho_2 > \rho_1$ e de comprimento $l \gg \rho_2$, de modo que se possam desprezar efeitos das extremidades. (a) Calcule a taxa de transmissão de calor por unidade de tempo através da camada. (b) Aplique o resultado a uma garrafa térmica cilíndrica, com $\rho_1 = 5$ cm, $\rho_2 = 5,5$ cm e $l = 20$ cm, com uma camada de ar entre as paredes interna e externa. A condutividade térmica do ar é de $5,7 \times 10^{-5}$ cal/s.cm.°C. A garrafa contém café inicialmente a 100°C e a temperatura externa é de 25°C . Quanto tempo demora para que o café esfrie até a temperatura ambiente?
15. Uma chaleira de alumínio contendo água em ebulição, a 100°C , está sobre uma chama. O raio do fundo da chaleira é de 7,5 cm e sua espessura é de 2 mm. A condutividade térmica do alumínio é 0,49 cal/s.cm.°C. A chaleira vaporiza 1 l de água em 5 min. O calor de vaporização da água a 100°C é de 540 cal/g. A que temperatura está o fundo da chaleira? Despreze as perdas pelas superfícies laterais.
16. Num país frio, a temperatura sobre a superfície de um lago caiu a -10°C e começa a formar-se uma camada de gelo sobre o lago. A água sob o gelo permanece a 0°C : o gelo flutua sobre ela e a camada de espessura crescente em formação serve como isolante térmico, levando ao crescimento gradual de novas camadas de cima para baixo. (a) Exprima a espessura l da camada de gelo formada, decorrido um tempo t do início do processo de congelamento, como função da condutividade térmica k do gelo, da sua densidade ρ e calor latente de fusão L , bem como da diferença de temperatura ΔT entre a água e a atmosfera acima do lago. *Sugestão:* Considere a agregação de uma camada de espessura dx à camada já existente, de espessura x , e integre em relação a x . (b) No exemplo acima, calcule a espessura da camada de gelo 1 h após iniciar-se o congelamento, sabendo que $k = 4 \times 10^{-3}$ cal/s.cm.°C, $\rho = 0,92$ g/cm³ e $L = 80$ cal/g.
17. À pressão atmosférica, a vaporização completa de 1 l de água a 100°C gera $1,671$ m³ de vapor de água. O calor latente de vaporização da água a esta temperatura é 539,6 cal/g. (a) Quanto trabalho é realizado pela expansão do vapor no processo de vaporização de 1 l de água? (b) Qual é a variação de energia interna do sistema nesse processo?
18. Um fluido homogêneo pode passar de um estado inicial i a um estado final f no plano (P, V) através de dois caminhos diferentes, representados por iaf e ibf no diagrama indicador (Fig. P.3). A diferença de energia interna entre os estados inicial e final é $U_f - U_i = 50$ J. O trabalho realizado pelo sistema na passagem de i para b é de 100 J. O trabalho realizado pelo sistema quando descreve o ciclo $(iafbi)$ é de 200 J. A partir destes dados,

determine, em magnitude e sinal: (a) a quantidade de calor $Q_{(ibf)}$, associada ao caminho ibf ; (b) o trabalho $W_{i \rightarrow f}$; (c) a quantidade de calor $Q_{(iaf)}$ associada ao caminho iaf ; (d) Se o sistema regressa do estado final ao estado inicial seguindo a diagonal fci do retângulo (Fig.), o trabalho $W_{(fci)}$ e a quantidade de calor $Q_{(fci)}$ associados a esse caminho.

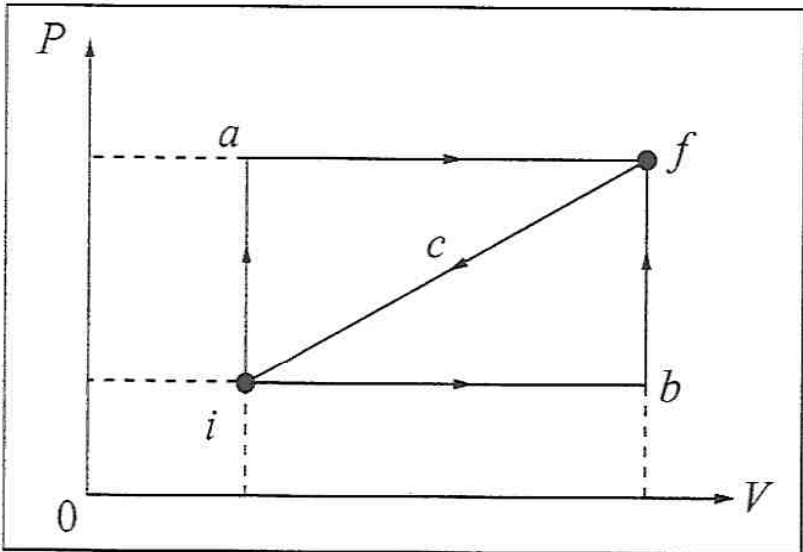


Figura P.3

19. O diagrama indicador da Fig. P.4, onde a pressão é medida em bar e o volume em l, está associado com um ciclo descrito por um fluido homogêneo. Sejam W , Q e ΔU respectivamente o trabalho, quantidade de calor e variação de energia interna do sistema associados com cada etapa do ciclo e com o ciclo completo, cujos valores (em J) devem ser preenchidos na tabela abaixo.

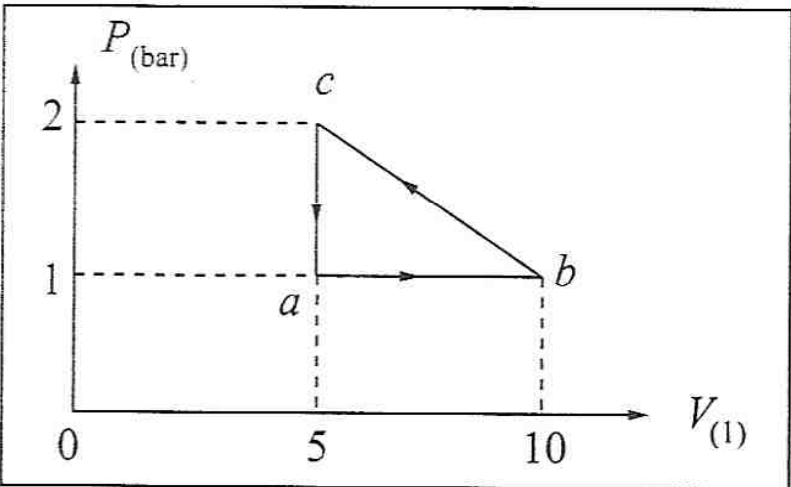


Figura P.4

| Etapa | W (J) | Q (J) | ΔU (J) |
|------------------|---------|---------|----------------|
| ab | | 800 | |
| bc | | | |
| ca | | | -100 |
| Ciclo ($abca$) | | | |

Complete a tabela, preenchendo todas as lacunas.

PROPRIEDADES DOS GASES

9.1 — Equação de estado dos gases ideais

As substâncias que têm o comportamento termodinâmico mais simples são os gases. Já vimos que, não só para um gás, mas para qualquer fluido homogêneo, um estado de equilíbrio termodinâmico fica inteiramente caracterizado por qualquer par das três variáveis (P , V , T). Isto significa que a terceira é uma função das outras duas, ou seja, que existe uma relação funcional do tipo

$$f(P, V, T) = 0 \quad (9.1.1)$$

que se chama a *equação de estado* do fluido.

A equação de estado assume uma forma especialmente simples para um *gás ideal* (também chamado de *gás perfeito*). Conforme o próprio nome está dizendo, trata-se de uma idealização de um gás real, no limite de rarefação extrema. Quanto mais distante a temperatura do gás em relação a seu ponto de liquefação e quanto menor a pressão, mais ele se aproxima do comportamento de um gás ideal. Na prática, trata-se de uma excelente aproximação na maioria dos casos.

(a) A lei de Boyle

Já vimos (Seção 1.5) que a experiência de Torricelli (1643) evidenciou e levou à interpretação correta da pressão atmosférica, cuja variação com a altitude foi investigada por Pascal (1648).

Em 1662, o físico inglês Robert Boyle publicou um livro intitulado “A Mola do Ar”, contendo uma nova lei relativa à elasticidade do ar, ou seja, relacionando sua pressão com seu volume.

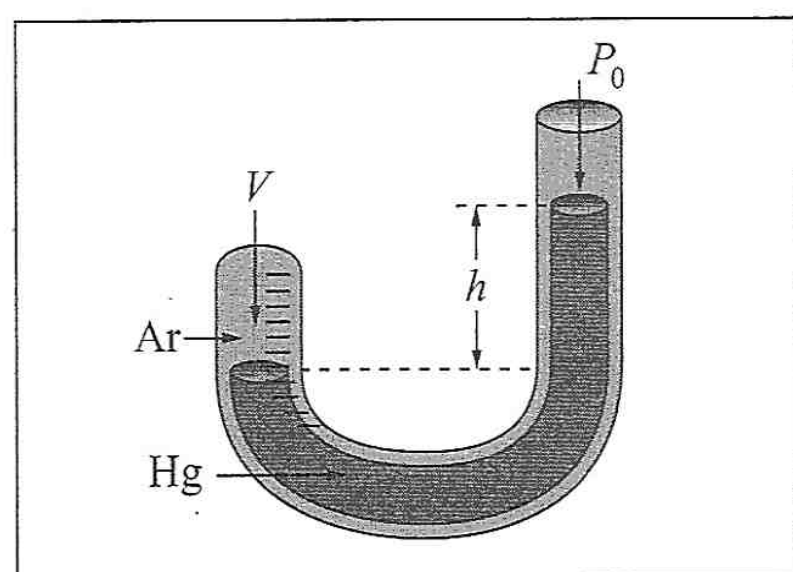


Figura 9.1 — Experimento de Boyle

A experiência realizada por Boyle para obter a sua lei está ilustrada na Fig. 9.1. Foi usado um tubo manométrico em U, aberto numa extremidade à pressão atmosférica P_0 e fechado na outra, onde a coluna de mercúrio aprisiona um volume V de ar (lido diretamente na escala graduada do tubo). A pressão P exercida sobre o volume V é

$$P = P_0 + \rho gh \quad (9.1.2)$$

onde h é o desnível entre os dois ramos do tubo (Fig.) e ρ a densidade do mercúrio.

A experiência era realizada a uma temperatura T constante (temperatura ambiente), com uma quantidade fixa de gás (ar) aprisionado. A pressão P podia ser variada, despejando mais mercúrio no ramo aberto. O resultado foi que, nessas condições, o volume V era inversamente proporcional a P :

$$V = k / P \{ PV = k = \text{constante} \} \quad (9.1.3)$$

Esta é a *Lei de Boyle*:

O volume de uma dada quantidade de gás, a temperatura constante, varia inversamente com a pressão.

A constante k , na (9.1.3), depende da temperatura e da quantidade de gás. No plano (P, V) a (9.1.3), que representa uma *isoterma*, é a equação de uma *hipérbole*.

A lei de Boyle foi redescoberta independentemente por Mariotte em 1676.

(b) A lei de Charles

O passo seguinte é investigar como V ou P variam com T , quando a outra variável é mantida constante. Estudar a dependência de V com a temperatura, a pressão constante, equivale a estudar o *coeficiente de dilatação volumétrica* β do gás [cf. (7.5.5)].

Seja V_θ o volume do gás à temperatura θ na escala Celsius e V_0 o volume correspondente a 0°C , ambos à pressão de 1 atm. Temos então, pela definição de β ,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_\theta - V_0}{V_0} = \beta \theta \quad (P = 1 \text{ atm}) \quad (9.1.4)$$

Em 1787, o físico francês Jacques Charles observou que *todos os gases têm aproximadamente o mesmo coeficiente de dilatação volumétrica*, $\beta \approx 1/273$. Isto foi verificado experimentalmente com maior precisão em 1802, por Joseph Louis Gay-Lussac. O valor atualmente aceito é

$$\beta \approx \frac{1}{273,15} ^\circ\text{C}^{-1} \quad (9.1.5)$$

Logo, substituindo na (9.1.4),

$$V_\theta = V_0(1 + \beta\theta) = \frac{V_0}{273,15} (\theta + 273,15)_{^\circ\text{C}}$$

= T pela (7.4.6)

ou seja, com $T_0 = 273,15 \text{ K} (\cong 0^\circ\text{C})$,

$$\frac{V(T)}{V(T_0)} = \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \quad (P = P_0 = \text{constante}) \quad (9.1.6)$$

que é a *lei de Charles*: a pressão constante, o volume de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta.

Esta lei é tanto melhor verificada quanto mais baixa a pressão P_0 ; no limite $P_0 \rightarrow 0$, pode ser usada para definir a escala termométrica de gás ideal, usando um termômetro de gás a pressão constante.

Analogamente, já vimos, ao estudar o termômetro de gás a volume constante, que

$$\frac{P(T)}{P(T_0)} = \frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0} \quad (V = V_0 = \text{constante}) \quad (9.1.7)$$

no limite em que $P_0 \rightarrow 0$, o que corresponde à (7.4.7) (na qual tomamos o ponto triplo da água, $\theta = 0,01^\circ\text{C}$, em lugar de 0°C).

(c) A lei dos gases perfeitos

Podemos obter a equação de estado de um gás ideal combinando a lei de Boyle com a lei de Charles. Para isto, vejamos como se pode passar de um estado (P_0, V_0, T_0) a (P, V, T) .

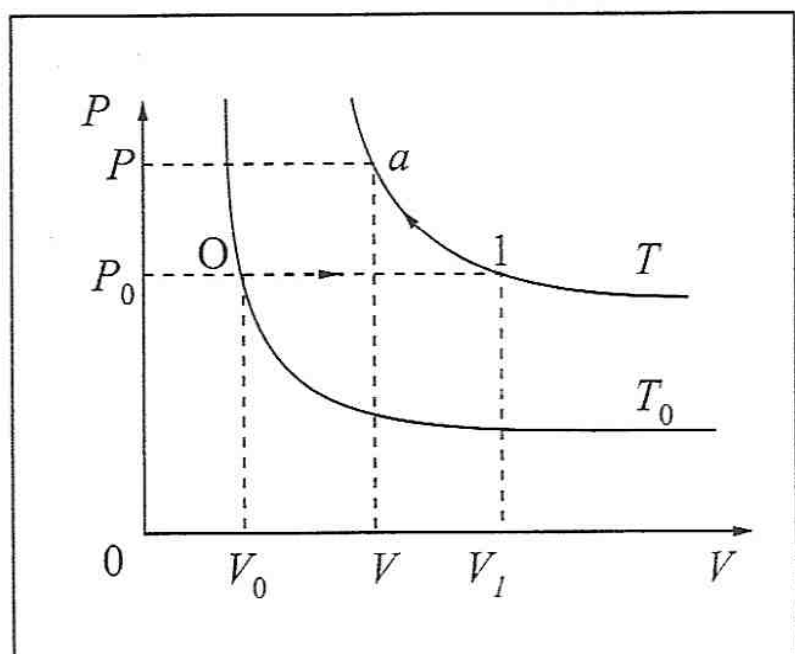


Figura 9.2

A Fig. 9.2 mostra as isothermas (hipérboles) associadas à lei de Boyle (9.1.3) no plano (P, V) , para uma dada massa de gás. Queremos passar do ponto O ao ponto a do plano.

Para isto, podemos passar primeiro do ponto O ao ponto 1 (Fig.), a pressão P_0 constante, e depois de 1 até a, a temperatura T constante.

A passagem de O (P_0, V_0, T_0) a 1 (P_0, V_1, T) se obtém pela lei de Charles (9.1.6):

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T}{T_0} \quad (\text{com } P = P_0) \quad (9.1.8)$$

A passagem de 1 (P_0, V_1, T) até a (P, V, T) se obtém pela lei de Boyle (9.1.3)

$$P_0 V_1 = PV \quad (T = \text{constante}) \quad (9.1.9)$$

Substituindo V_1 na (9.1.9) pelo seu valor tirado da (9.1.8), obtemos

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \text{constante} \quad (9.1.10)$$

que é o resultado desejado.

A constante na (9.1.10) depende apenas da natureza do gás e de sua quantidade. Para obter a forma dessa dependência, vamos antecipar um resultado que decorre da *lei de Avogadro* (1811), que será discutida mais detalhadamente no Capítulo 11.

Chama-se 1 *mol* de uma substância pura uma massa dessa substância, em gramas, igual à sua massa molecular. Assim, por exemplo,

$$1 \text{ mol H}_2 = 2 \text{ g}; \quad 1 \text{ mol O}_2 = 32 \text{ g}; \quad 1 \text{ mol H}_2\text{O} = 18 \text{ g}$$

As condições NTP (normais de temperatura e pressão) correspondem a $T = T_0 = 273.15 \text{ K}$ e $P = P_0 = 1 \text{ atm}$. A lei de Avogadro leva ao seguinte resultado:

Um mol de qualquer gás, nas condições NTP, ocupa sempre o mesmo volume, a saber, $V_0 = 22,415 \text{ l}$.

Segue-se que, se aplicarmos a (9.1.10) a 1 mol de gás, o resultado será sempre o mesmo para qualquer gás, ou seja, será uma *constante universal* R , que se chama a *constante universal dos gases*:

$$R \approx \frac{1 \text{ atm} \times 22,4 \text{ l}}{273 \text{ K}} \approx \frac{1,013 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0,0224 \text{ m}^3}{2,73 \times 10^2 \text{ K}}$$

o que dá

$$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1,986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \quad (9.1.11)$$

Levando na (9.1.10), vem, para 1 mol de gás,

$$V = RT / P \quad (1 \text{ mol}) \quad (9.1.12)$$

Como o volume é proporcional à quantidade de gás, uma massa de n moles, nas mesmas condições, ocupa um volume n vezes maior, o que dá, finalmente,

$$\boxed{PV = nRT} \quad (n \text{ moles}) \quad (9.1.13)$$

Esta é a *equação de estado dos gases ideais*, também conhecida como *lei dos gases perfeitos*.

Embora nenhum gás real obedeça exatamente a esta equação de estado, ela é uma boa aproximação para a maioria dos gases, tanto melhor quanto mais rarefeito o gás e mais longe estiver de seu ponto de liquefação. Como os pontos de liquefação à pressão normal (1 atm) do hidrogênio (-253°C) e do hélio (-269°C) são especialmente baixos, esses gases teriam o comportamento mais próximo de um gás ideal, por exemplo num termômetro de gás a volume constante.

Exemplo: Qual é a densidade do oxigênio à temperatura $\theta = 27^\circ\text{C}$ e à pressão $P = 2 \text{ atm}$?

Sabemos que, nas condições NTP, 1 mol de $\text{O}_2 = 32\text{g}$ ocupa 22,4 l, de modo que a densidade nessas condições é

$$\rho_0 \approx \frac{3,2 \times 10^{-2} \text{ kg}}{2,24 \times 10^{-2} \text{ m}^3} \approx 1,43 \text{ kg} / \text{m}^3$$

com $P_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 273\text{K}$. Pela (9.1.13), para uma massa dada (n fixo), a densidade ρ é proporcional a $1/V$, ou seja, a P/T . Logo, é preciso multiplicar ρ_0 por $(\theta = 27^\circ\text{C} \cong T = 300 \text{ K})$

$$\frac{P}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} = \frac{2 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} \cdot \frac{273 \text{ K}}{300 \text{ K}} \approx 1,82$$

o que dá $\rho \cong 2,6 \text{ kg/m}^3$.

(d) Trabalho na expansão isotérmica de um gás ideal

Como aplicação da equação de estado de um gás ideal, vamos calcular o trabalho $W_{i \rightarrow f}$ realizado na *expansão isotérmica reversível* de um gás ideal, de um volume V_i até V_f .

Pela (8.6), temos

$$\boxed{W_{i \rightarrow f} = \int_{V_i}^{V_f} P dV} \quad (9.1.14)$$

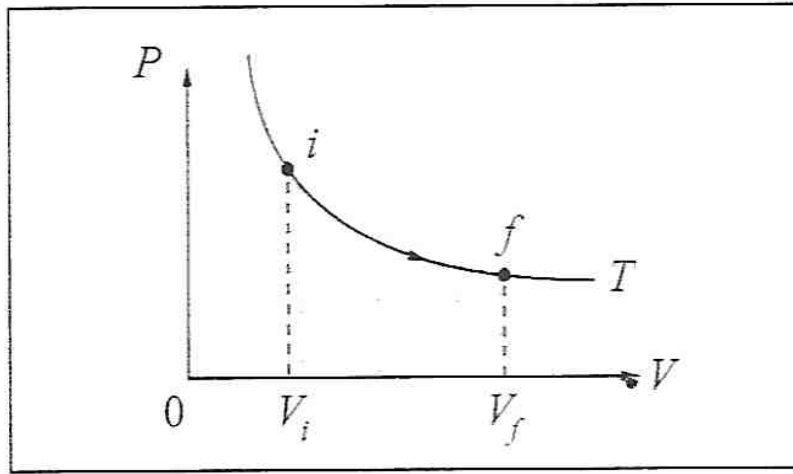


Figura 9.3 — Expansão isotérmica

onde o caminho de integração é ao longo de uma isoterma (Fig. 9.3). Pela equação de estado (9.1.13),

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (T = \text{constante})$$

de modo que a (9.1.14) fica

$$W_{i \rightarrow f} = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f}$$

onde \ln é o logaritmo neperiano. Finalmente,

$$W_{i \rightarrow f} = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (\text{isotérmico}) \quad (9.1.15)$$

Para $V_f > V_i$ (expansão), é $W_{i \rightarrow f} > 0$; para $V_f < V_i$ (compressão), temos $W_{i \rightarrow f} < 0$, como deveria ser.

9.2 — Energia interna de um gás ideal

(a) A experiência de Joule

Um dos métodos empregados por Joule, para medir o equivalente mecânico da caloria, consistia em aquecer o calorímetro pela compressão de um gás, contido num recipiente imerso na água do calorímetro. O trabalho realizado sobre o gás podia ser facilmente determinado, e daria o calor fornecido ao calorímetro, desde que se convertesse inteiramente em calor, sem alterar a energia interna do gás. A fim de verificar se esta hipótese era correta, Joule procurou investigar se a energia interna de um gás varia com seu volume.

Para este fim, Joule realizou a experiência de *expansão livre* (págs. 178, 184) mergulhando os dois recipientes (Fig. 8.10), um evacuado e o outro contendo ar a ~ 20 atm, num calorímetro *pequeno*, contendo o mínimo possível de água e termicamente isolado. Após medir a temperatura inicial T_i da água, Joule abriu a válvula, produzindo a expansão livre, e tornou a medir a temperatura final T_f da água após este processo. Nenhuma variação de temperatura foi detectada, ou seja,

$$\Delta T = T_f - T_i = 0 \quad (\text{Joule}) \quad (9.2.1)$$

A razão para ter tomado um calorímetro pequeno foi para reduzir sua capacidade térmica, tornando-o mais sensível a pequenas variações de temperatura.

Vejamos que conclusão o resultado de Joule (9.2.1) permite tirar sobre a variação da energia interna de um gás com seu volume. Como vimos na (8.5.3), a energia interna U pode ser considerada como função de qualquer par de variáveis independentes, em particular V e T : $U = U(V, T)$. Como se calcula uma pequena variação ΔU de uma tal função de duas variáveis, associada com variações ΔV e ΔT das variáveis independentes?

Para uma função de uma só variável, $Z = f(x)$, sabemos que $\Delta Z = \left(\frac{df}{dx} \right) \Delta x$, (diferencial).

Para uma função de duas variáveis independentes, $Z = f(x, y)$, temos

$$\Delta Z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Delta y \quad (9.2.2)$$

onde $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$ por exemplo, indica a *derivada parcial* (1, Seção 7.4) de f em relação a x : o índice y serve para lembrar que Z é considerado como função de x e y , e que y é mantido constante.

Por exemplo, se $Z = x^2 y^3$ e x varia de 1 a 1,01 e y de 2 a 2,02, temos

$$\Delta Z = (1,01)^2 \cdot (2,02)^3 - 2^3 \approx 8,40 - 8 = 0,40; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = 3x^2 y^2$$

o que dá, com $x = 1$, $y = 2$,

$$\begin{aligned} \Delta x = 0,01, \quad \Delta y = 0,02, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \Delta y &= 2 \times 1 \times 8 \times 0,01 + 3 \times 1 \times 4 \times 0,02 \approx \\ &\approx 0,16 + 0,24 = 0,40 = \Delta Z \end{aligned}$$

o que ilustra a (9.2.2).

Aplicando a (9.2.2) a $U(V, T)$, vem

$$\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Delta T \quad (9.2.3)$$

Para a experiência de Joule de expansão livre, vimos na (8.7.8) que $\Delta U = 0$. Admitindo o resultado experimental (9.2.1), vem então

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \underbrace{\Delta T}_{=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \Delta V$$

Como $\Delta V = V_f - V_i \neq 0$ na expansão livre, concluímos que

$$\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0} \quad (9.2.4)$$

ou seja, a *energia interna do gás não depende do volume*.

Como consideramos U como função de V e T , e resulta ser independente de V , a conclusão final é que

$$\boxed{U = U(T)} \quad (9.2.5)$$

ou seja, a *energia interna do gás só depende de sua temperatura*.

Na realidade, apesar das precauções tomadas por Joule, a capacidade térmica da água e do calorímetro ainda eram $\sim 10^3$ vezes maiores que a do ar contido nos recipientes, de modo que uma variação de 1°C da temperatura do ar só teria produzido uma variação $\sim 10^{-3}^\circ\text{C}$ na temperatura da água do calorímetro, que não teria sido detectada pelo termômetro. Sabemos hoje que, nas condições em que a experiência foi realizada, o ar deve ter sofrido uma variação ΔT de vários graus. Para qualquer gás real, $\Delta T \neq 0$, mas se torna cada vez menor à medida que o gás vai se rarefazendo. Por conseguinte, podemos considerar válidas as (9.2.1) e (9.2.5) no caso limite de um gás ideal.

(b) A experiência de Joule-Thomson

Para eliminar a dificuldade de detectar uma variação de temperatura na experiência de Joule, Joule e William Thomson (Lord Kelvin) realizaram a *experiência do tampão poroso*, em que a expansão livre é substituída por uma expansão através de uma parede porosa (tampão), que reduz a pressão do gás. O gás se expande num recipiente de paredes adiabáticas, através de um tampão que pode ser constituído, por exemplo, de lã de vidro.

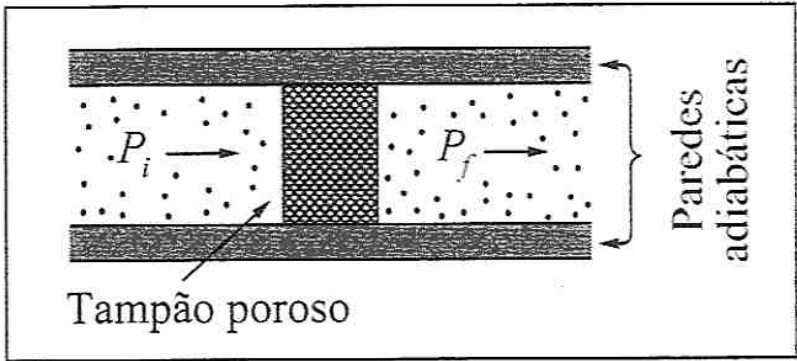


Figura 9.4 — Tampão poroso

Na prática, é mantido um fluxo estacionário de gás através do tampão (Fig. 9.4), por bombeamento; a pressão cai de P_i para P_f ao atravessar o tampão. Neste regime estacionário, não há fluxo de calor do gás para as paredes, cuja distribuição de temperatura permanece constante, de modo que mesmo uma pequena variação de temperatura do gás devido à expansão pode ser detectada.

Para aplicar a 1.^a lei da termodinâmica a uma dada massa de gás que atravessa o tampão, podemos imaginar que esta massa está contida inicialmente entre o tampão e um pistão adiabático A sobre o qual se exerce uma pressão P_i , ocupando um volume inicial V_i (Fig. 9.5). À direita do tampão, existe outro pistão adiabático B, sobre o qual se exerce uma pressão P_f . Deslocando para a direita o pistão A, o gás passa através do tampão e desloca para a direita o tampão B, até que, no estado final f , toda a massa atravessou o tampão, ocupando um volume final V_f (Fig. 9.5).

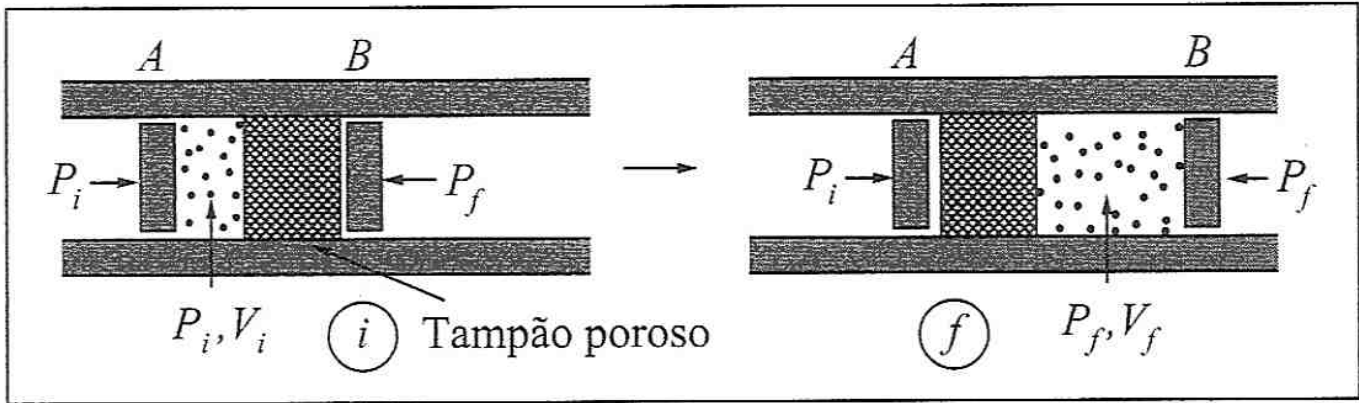


Figura 9.5 — Experiência de Joule-Thomson

Como o gás à esquerda passa isobaricamente, à pressão P_i , do volume V_i ao volume 0, o trabalho por ele realizado nessa compressão isobárica é, pela (8.7.2), $P_i(0 - V_i) = -P_i V_i$. Analogamente, o gás à direita sofre uma expansão isobárica, à pressão P_f , do volume 0 ao volume V_f , realizando um trabalho $P_f(V_f - 0) = P_f V_f$. O trabalho total realizado pelo gás é portanto

$$W_{i \rightarrow f} = P_f V_f - P_i V_i$$

(9.2.6)

Como todas as paredes são adiabáticas, temos

$$Q = 0$$

(9.2.7)

Substituindo as (9.2.6) e (9.2.7) na 1.^a lei da Termodinâmica (8.5.4), obtemos

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{i \rightarrow f} = P_i V_i - P_f V_f$$

(9.2.8)

Joule e Kelvin mediram as temperaturas T_i (à esquerda do tampão), e T_f (à direita). Para o ar a 20°C, passando de $P_i = 2$ atm a $P_f = 1$ atm, acha-se $\Delta T = T_f - T_i \approx -0,26^\circ\text{C}$. Para o hidrogênio, ΔT é extremamente pequeno. Extrapolando ao caso limite de um gás ideal, concluímos que, para um gás ideal,

$$\boxed{\Delta T = T_f - T_i = 0} \quad (\text{Joule-Thomson}) \quad (9.2.9)$$

com precisão experimental muito superior à da (9.2.1).

Como $T_i = T_f$ para um gás ideal, o último membro da (9.2.8) se anula neste caso, pela lei de Boyle. Logo,

$$\Delta U = 0 \quad (\text{gás ideal}) \quad (9.2.10)$$

e, sendo $\Delta V = V_f - V_i \neq 0$, somos levados novamente à (9.2.4), da qual decorre a (9.2.5):

$$\boxed{U = U(T)} \quad (\text{gás ideal}) \quad (9.2.11)$$

Logo, a energia interna de um gás ideal depende somente da sua temperatura.

Um gás ideal é caracterizado termodinamicamente por duas condições: a (9.2.11) e a equação de estado (9.1.13). Gases reais a pressões ≤ 2 atm podem ser tratados como gases ideais; o erro nos resultados obtidos é tipicamente de alguns por cento apenas.

(c) Entalpia

Decorre imediatamente da (9.2.8) a seguinte propriedade:

$$\boxed{H = U_i + PV_i = U_f + PV_f} \quad (9.2.12)$$

ou seja, a grandeza

$$\boxed{H = U + PV} \quad (9.2.13)$$

assume o mesmo valor nos estados inicial e final.

Como U , P e V são funções de estado, H é também uma função de estado, que se chama a *entalpia* do sistema. A (9.2.12) mostra que a entalpia de um gás não se altera quando ele é submetido a um processo de Joule-Thomson (expansão através de um tampão poroso).

Diferenciando a (9.2.13), vem

$$dH = dU + PdV + VdP$$

Pelas (8.6.5) e (8.6.7), isto equivale a

$$\boxed{dH = d'Q + VdP} \quad (9.2.14)$$

que dá a *variação de entalpia num processo infinitesimal reversível*. Em particular, num processo isobárico, é $P = \text{constante}$, $\therefore dP = 0$, o que dá

$$\boxed{dH = d'Q} \quad (\text{processo isobárico reversível}) \quad (9.2.15)$$

o que significa que, *num processo isobárico reversível, a variação $H_f - H_i$ de entalpia é igual ao calor Q transferido*. Como processos isobáricos são comuns (por exemplo, à pressão atmosférica), a entalpia desempenha um papel importante, especialmente em química e engenharia.

O mesmo raciocínio que levou à conservação da entalpia no fluxo estacionário de um gás através de um tampão poroso, na ausência de um fluxo de calor, se generaliza ao fluxo estacionário de um fluido de densidade $\rho = M/V$ ($M = \text{massa}$). Para a unidade de massa do fluido, temos $V = 1/\rho$, e a entalpia é $u + P/\rho$, onde u é a energia interna por unidade de massa. Se o fluido se desloca no campo gravitacional, é preciso acrescentar ainda as energias cinética

$\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ e potencial (gz) por unidade de massa. O resultado é que a grandeza

$$h = u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz$$

(9.2.16)

se conserva, ao longo de um filete de corrente, o que é uma *generalização da equação de Bernoulli* (2.4.6). No caso particular de um fluido *incompressível*, a energia interna u é constante e recaímos na (2.4.6).

9.3 — Capacidades térmicas molares de um gás ideal

Se aplicarmos a (8.6.5) a 1 mol de uma substância,

$$d'Q = CdT$$

(9.3.1)

C representa a *capacidade térmica molar* (pág. 170). Como vimos na Seção 8.6, C depende do caminho pelo qual se efetua a transferência de calor $d'Q$. Se ele é transferido a *pressão constante*,

$d'Q_P = C_P dT$

$(P = \text{constante})$

(9.3.2)

C_P é a *capacidade térmica molar a pressão constante*; se a transferência se efetua a *volume constante*,

$d'Q_V = C_V dT$

$(V = \text{constante})$

(9.3.3)

C_V é a *capacidade térmica molar a volume constante*. Como acontece com os calores específicos correspondentes (pág. 169), C_P e C_V chamam-se as *capacidades térmicas molares principais*.

A Fig. 9.6 (a) e (b) ilustra a diferença entre os processos (9.3.2) e (9.3.3). Em ambos os casos, o recipiente contendo o gás, inicialmente em equilíbrio com um reservatório térmico à temperatura T , é levado a ter contato térmico com outro reservatório à temperatura $T + dT$, que lhe transfere reversivelmente uma quantidade de calor $d'Q$.

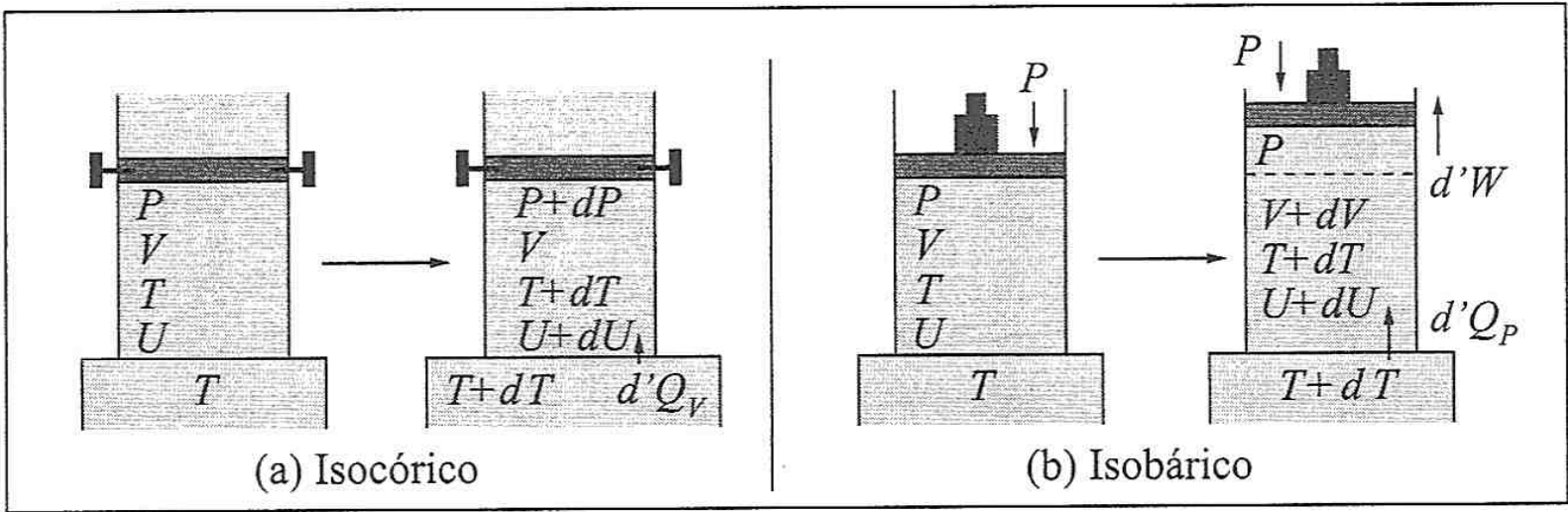


Figura 9.6 — Processo isocórico (a) e isobárico (b)

Em (a), o processo é *isocórico*, ou seja, o volume V é mantido constante (o pistão indicado na Fig. está preso por dois parafusos), e o calor é $d'Q_V$. Em (b), o processo é *isobárico*: a pressão P é mantida constante e equilibrada pelo peso indicado na Fig. Como a temperatura aumenta de dT , o gás se expande de dV , realizando um trabalho

$$d'W = PdV$$

e absorvendo calor $d'Q_P$.

A Fig. 9.7 ilustra o processo no plano (P, V) : (a) corresponde à passagem $a \rightarrow b$ e (b) a $a \rightarrow c$, entre as isotermas T e $T + dT$. A variação de energia interna em cada um dos processos

é dada pela 1ª lei (8.6.7). Para o processo isocórico, $V = \text{constante}$, $dV = 0$, $C = C_V$:

$$dU = d'Q_V = C_V dT \quad (9.3.4)$$

Para o processo isobárico, $P = \text{constante}$, $d'W$ é dado pela (8.6.1) e $C = C_P$:

$$dU = d'Q_P - d'W = C_P dT - PdV \quad (9.3.5)$$

Em ambos os casos, passamos da temperatura T a $T + dT$. Para um gás ideal, como U só depende da temperatura [cf. (9.2.11)], U e $U + dU$ são os mesmos nos dois casos. Logo dU é o mesmo, e podemos identificar as (9.3.4) e (9.3.5):

$$C_V dT = C_P dT - PdV \quad (\text{gás ideal}) \quad (9.3.6)$$

Mas, para 1 mol de um gás ideal, vale a equação de estado (9.1.13) com $n = 1$:

$$PV = RT \quad (1 \text{ mol}) \quad (9.3.7)$$

o que permite calcular a variação de temperatura dT no processo isobárico:

$$PdV + \underbrace{VdP}_{=0 \text{ para } P = \text{const.}} = RdT \quad \{ PdV = RdT \} \quad (9.3.8)$$

Substituindo na (9.3.6), vem

$$C_V dT = C_P dT - RdT$$

o que dá

$$\boxed{C_P = C_V + R} \quad (\text{gás ideal}) \quad (9.3.9)$$

Logo, para um gás ideal, a capacidade térmica molar a pressão constante é maior do que a volume constante, e a diferença é dada pela constante universal dos gases R .

Este resultado é conhecido como *fórmula de Mayer*, porque foi Mayer quem o obteve e empregou para estimar o equivalente mecânico da caloria (pág. 168): na (9.3.6), as quantidades de calor podem ser medidas em calorias e PdV em unidades de energia mecânica.

Se medirmos C_P e C_V em cal/mol K, a (9.1.11) dá

$$\boxed{C_P - C_V \approx 2 \text{ cal / mol K}} \quad (9.3.10)$$

Este resultado concorda com a experiência, com erro $\leq 1\%$, para inúmeros gases à temperatura ambiente, mostrando que a aproximação de gases ideais é aplicável.

Energia interna de um gás ideal

A (9.3.4) dá, para 1 mol de um gás ideal,

$$\boxed{C_V = \frac{dU}{dT} = C_V(T)} \quad (1 \text{ mol}) \quad (9.3.11)$$

Com efeito, como U só depende de T neste caso, o mesmo vale para $dU/dT = C_V$.

Para n moles de gás, como a energia interna é proporcional à massa de gás, temos

$$dU = nC_V(T)dT \quad (9.3.12)$$

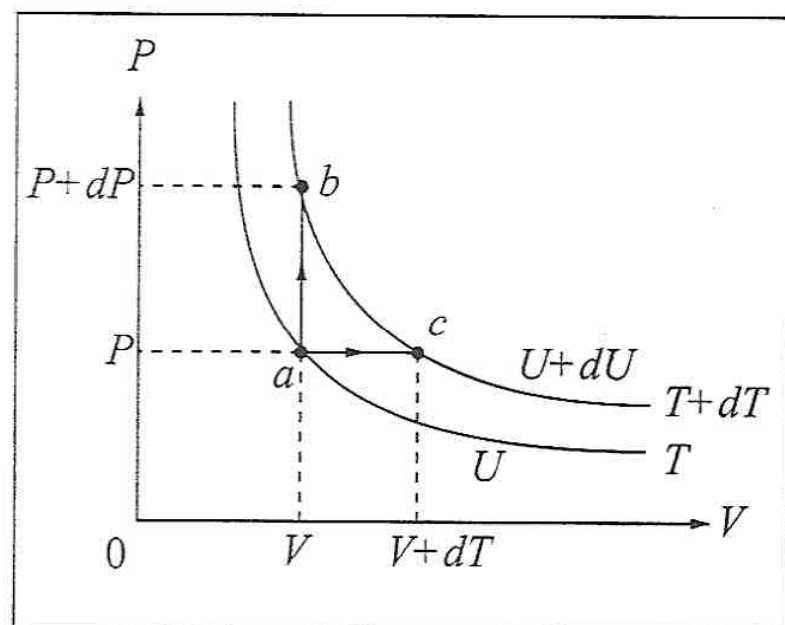


Figura 9.7 — Diagrama indicador

Integrando os dois membros em relação a T entre T_0 (temperatura de referência arbitrária) e T , vem

$$\boxed{U(T) = U(T_0) + n \int_{T_0}^T C_V(T') dT'} \quad (\text{gás ideal, } n \text{ moles}) \quad (9.3.13)$$

A (9.3.13) dá explicitamente a energia interna de um gás ideal como função da temperatura, desde que conheçamos a variação com T da capacidade térmica molar a volume constante $C_V(T)$.

Veremos mais adiante (Cap. 11) que $C_V = \text{constante}$ para um gás ideal, de modo que a (9.3.13) dá

$$\boxed{U = nC_V T + U_0} \quad (9.3.14)$$

onde U_0 é uma constante.

9.4 — Processos adiabáticos num gás ideal

A lei de Boyle (9.1.3) relaciona P com V num gás ideal que passa por um *processo adiabático reversível*, que pode ser uma compressão ou expansão adiabática.

Num processo adiabático, temos, por definição

$$d'Q = 0 \quad (9.4.1)$$

de modo que a 1.ª lei [cf. (8.6.6) e (8.6. 1)] fica

$$dU = -PdV \quad (9.4.2)$$

Para n moles de um gás ideal, a (9.3.12) dá

$$dU = nC_V dT \quad (9.4.3)$$

Por outro lado, diferenciando a equação de estado dos gases ideais (9.1.13), vem

$$PdV + VdP = nRdT \quad (9.4.4)$$

ou seja, pelas (9.4.2) e (9.4.3)

$$VdP = -PdV + nRdT = n(C_V + R)dT$$

o que, pela (9.3.9), equivale a

$$VdP = nC_P dT \quad (9.4.5)$$

As (9.4.2) e (9.4.3) dão

$$-PdV = nC_V dT \quad (9.4.6)$$

Substituindo a (9.4.6) na (9.4.5), vem

$$VdP = \frac{C_P}{C_V} \cdot nC_V dT = -\frac{C_P}{C_V} PdV$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}} \quad (9.4.7)$$

onde

$$\boxed{\gamma = C_P / C_V} \quad (9.4.8)$$

é a razão das capacidades térmicas molares a pressão constante e a volume constante.

A relação de Mayer (9.3.9) mostra que $\gamma > 1$. Em princípio [cf. (9.3.11)], C_P e C_V poderiam depender da temperatura, mas, conforme foi mencionado na obtenção da (9.3.14), C_V , e por conseguinte também C_P , são *constantes* para um gás ideal, de modo que $\gamma = \text{constante}$. Isto nos permite integrar ambos os membros da (9.4.7) entre um estado inicial (P_0, V_0) e um estado final (P, V):

$$\int_{P_0}^P \frac{dP'}{P'} = \ln P' \Big|_{P_0}^P = \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = -\gamma \int_{V_0}^V \frac{dV'}{V'} = -\gamma \ln V' \Big|_{V_0}^V = -\gamma \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = \ln \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \right]$$

o que dá, finalmente

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \left\{ \begin{array}{l} \boxed{PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma = \text{constante}} \\ \text{gás ideal, processo adiabático} \end{array} \right. \quad (9.4.9)$$

Veremos no Cap. 11 que, para gases ideais *monoatômicos*, tem-se $\gamma = 5/3 = 1,67$; para gases *diatômicos*, $\gamma = 7/5 = 1,40$, valor este que, com boa aproximação, também se aplica ao ar (mistura de N_2 e O_2).

A relação (9.4.9) representa para um processo adiabático o análogo da lei de Boyle (9.1.3) para um processo isotérmico. Vimos à pág. 190 que a (9.1.3) define, no diagrama (P, V), uma família de hipérboles que são as *isotermas*. Da mesma forma, para cada valor da constante na (9.4.9), ela define uma curva no plano (P, V), o que leva a uma família de curvas denominadas *adiabáticas*.

A equação das isotermas é da forma $P = \text{constante}/V$, ao passo que a das adiabáticas é da forma $P = \text{constante}/V^\gamma$. Como $1/V^\gamma$ para $\gamma > 1$, cai mais rapidamente do que $1/V$, as adiabáticas caem mais depressa com V do que as isotermas, conforme ilustrado na Fig. 9.8, onde $\gamma = 1,40$. Assim, num ponto de intersecção entre uma adiabática e uma isoterma, como os pontos *a, b, c* ou *d* da Fig., a declividade (coeficiente angular da tangente à curva) é mais abrupta para a adiabática do que para a isoterma.

Isto também resulta diretamente da comparação de dP/dV nos dois casos: para a adiabática, dP/dV se obtém da (9.4.7); para a isoterma, da (9.4.4) com $dT = 0$, o que leva a

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V} \quad (\text{isoterma}); \quad \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V} \quad (\text{adiabática}) \quad (9.4.10)$$

mostrando que a declividade da adiabática é γ vezes maior.

Em consequência da declividade maior, se considerarmos uma dada adiabática, como a que passa pelos pontos *b* e *c* na Fig. 9.8, onde intercepta as isotermas de temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente, temos $T_1 > T_2$. Logo, numa *expansão adiabática* (processo $b \rightarrow c$), a *temperatura cai*. Pela (8.5.1), isto deveria efetivamente acontecer, pois o trabalho realizado pelo gás no

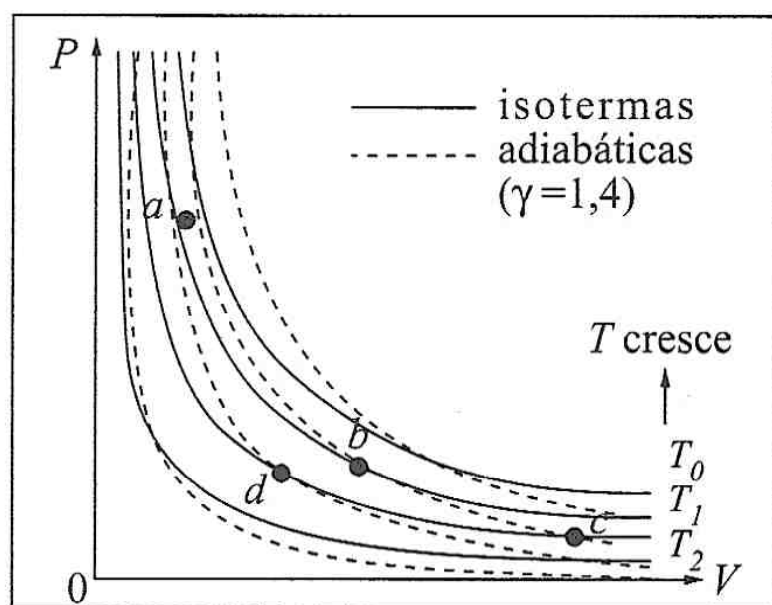


Figura 9.8 — Isotermas e adiabáticas

processo de expansão diminui sua energia interna (uma vez que não há trocas de calor), e por conseguinte [cf. (9.3.4)] também diminui a temperatura.

A equação das adiabáticas pode ser reescrita em termos de (V, T) ou (P, T) , bastando para isso eliminar a variável restante na (9.4.9), com o auxílio da equação de estado dos gases ideais na forma (9.1.10).

Assim, como P é proporcional a T/V , a (9.4.9) equivale a

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{constante}} \quad (9.4.11)$$

mostrando mais uma vez que T diminui quando V aumenta ($\gamma - 1 > 0$), ou seja, numa expansão adiabática. Analogamente, sendo V proporcional a T/P , a (9.4.9) também equivale a

$$P\left(\frac{T}{P}\right)^{\gamma} = T^{\gamma} / P^{\gamma-1} = \text{constante}$$

ou seja,

$$\boxed{T / P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{constante}} \quad (9.4.12)$$

mostrando que a temperatura aumenta com P (compressão adiabática).

Trabalho numa expansão adiabática

O trabalho realizado por um gás numa expansão adiabática reversível é dado pela (8.6.2), onde, pela (9.4.9),

$$PV^{\gamma} = P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma} = C \quad (\text{constante}) \quad (9.4.13)$$

de modo que

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{V_i}^{V_f} P dV = C \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV = C \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \bigg|_{V_i}^{V_f} = \frac{1}{1-\gamma} (C V_f^{1-\gamma} - C V_i^{1-\gamma})$$

ou seja, substituindo C pela (9.4.13),

$$\boxed{W_{i \rightarrow f} = -\frac{(P_f V_f - P_i V_i)}{\gamma - 1}} \quad (9.4.14)$$

Usando a equação de estado dos gases ideais (9.1.13), a (9.4.14) também se escreve

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= -\frac{nR}{(\gamma - 1)} (T_f - T_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pela (9.4.8)}}}{=} -\frac{nR}{\left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right)} (T_f - T_i) \\ &= -\frac{nR C_V}{(C_P - C_V)} (T_f - T_i) \left\{ \boxed{W_{i \rightarrow f} = -n C_V (T_f - T_i) = -(U_f - U_i)} \right\} \\ &\quad \underset{= R \text{ pela (9.3.9)}}{\substack{\uparrow \\ \text{pela (9.3.14)}}} \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

o que concorda com a (8.5.1).

Exemplo: Um litro de oxigênio à temperatura de 27°C e a uma pressão de 10 atm se expande adiabaticamente até quintuplicar de volume. Quais são a pressão e a temperatura finais?

Pela (9.4.13), temos ($\gamma = 1,4$ para O_2)

$$P_i / P_f = (V_f / V_i)^\gamma = 5^{1,4} \approx 9,5 \left\{ P_f \approx \frac{10}{9,5} \text{ atm} \approx 1,05 \text{ atm} \right.$$

A temperatura inicial é $T_i = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$. Pela (9.4.11),

$$T_i / T_f = (V_f / V_i)^{\gamma-1} \approx 5^{0,4} \approx 1,9 \left\{ T_f \approx \frac{300}{1,9} \text{ K} \right.$$

o que dá $T_f \approx 158 \text{ K} \approx -115^\circ\text{C}$, correspondendo a um abaixamento de temperatura de $\approx 142^\circ\text{C}$ devido à expansão adiabática! Como a temperatura de liquefação do oxigênio a 1 atm é $\approx 90\text{K} \approx -183^\circ\text{C}$, bem abaixo de T_f , a aproximação de gás ideal ainda é razoável à temperatura T_f .

Qual é o trabalho realizado pelo gás na expansão? Pela (9.4.14), com

$$P_i = 10 \text{ atm} \approx 1,013 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \quad V_i = 1\text{l} = 10^{-3} \text{ m}^3 \\ P_f = 1,05 \text{ atm} \approx 1,064 \times 10^5 \text{ N/m}^2, \quad V_f = 5\text{l} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

temos

$$W_{i \rightarrow f} \approx -\frac{0,532 - 1,013}{0,4} \times 10^3 \approx 1,2 \times 10^3 \text{ J}$$

Se a expansão tivesse sido isotérmica em lugar de adiabática, teríamos, pela lei de Boyle,

$$P_i / P_f = V_i / V_f = 5 \quad \{ P_f = 2 \text{ atm}$$

e o trabalho realizado seria, pela (9.1.15),

$$W_{i \rightarrow f} = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = P_i / V_i \ln 5 \approx 1,61 \times 1,013 \times 10^3 \approx 1,63 \times 10^3 \text{ J}$$

que é maior do que no caso da expansão adiabática. Isto é óbvio no diagrama da pg. 199: partindo do mesmo ponto (P_i, V_i) e chegando ao mesmo V_f , a isoterma acaba com P_f maior que a adiabática; por conseguinte, $W_{i \rightarrow f}$, que é a área debaixo da curva (pg. 180), é maior para a expansão adiabática.

Aplicação à velocidade do som

Como vimos na (6.2.27), a velocidade do som num fluido é dada por $v = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_0}$ onde a derivada parcial da pressão em relação à densidade é calculada em torno dos valores de equilíbrio.

Newton supôs que as compressões e expansões do ar numa onda sonora ocorressem isotermicamente e obteve o resultado (6.2.29), em desacordo com a experiência.

Na verdade, como vimos à pág. 128, as compressões e expansões numa onda sonora ocorrem tão rapidamente que não há tempo para trocas de calor, ou seja, são *adiabáticas*. A relação entre pressão e densidade é então a (6.2.12), que equivale à (9.4.9). Daí resulta a expressão correta (6.2.31) para a velocidade do som.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 9

- O tubo de vidro de um barômetro de mercúrio tem secção reta de 1 cm^2 e 90 cm de altura acima da superfície livre do reservatório de mercúrio. Num dia em que a temperatura ambiente é de 20°C e a pressão atmosférica verdadeira é de 750 mm/Hg, a altura da coluna barométrica é de 735 mm. Calcule a quantidade de ar (em moles) aprisionada no espaço acima da coluna de mercúrio.
- Dois recipientes fechados de mesma capacidade, igual a 1 l, estão ligados um ao outro por um tubo capilar de volume desprezível. Os recipientes contêm oxigênio, inicialmente à temperatura de 25°C e pressão de 1 atm. (a) Quantas gramas de O_2 estão contidas nos recipientes? (b) Aquece-se um dos recipientes até a temperatura de 100°C , mantendo o outro a 25°C . Qual é o novo valor da pressão? (c) Quantas gramas de O_2 passam de um lado para o outro? Despreze a condução de calor através do capilar.
- Um recipiente de paredes adiabáticas é munido de um pistão adiabático móvel, de massa desprezível e 200 cm^2 de área, sobre o qual está colocado um peso de 10 kg. A pressão externa é de 1 atm. O recipiente contém 3 l de gás hélio, para o qual $C_V = \frac{3}{2}R$, à temperatura de 20°C . (a) Qual é a densidade inicial do gás? Faz-se funcionar um aquecedor elétrico interno ao recipiente, que eleva a temperatura do gás, gradualmente, até 70°C . (b) Qual é o volume final ocupado pelo gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás? (d) Qual é a variação de energia interna do gás? (e) Quanto calor é fornecido ao gás?
- Um mol de um gás ideal, com $\gamma = 7/5$, está contido num recipiente, inicialmente a 1 atm e 27°C . O gás é, sucessivamente: (i) comprimido isobaricamente até $3/4$ do volume inicial V_0 ; (ii) aquecido, a volume constante, até voltar à temperatura inicial; (iii) expandido a pressão constante até voltar ao volume inicial; (iv) resfriado, a volume constante, até voltar à pressão inicial. (a) Desenhe o diagrama P - V associado; (b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás; (c) Calcule o calor total fornecido ao gás nas etapas (i) e (ii); (d) Calcule as temperaturas máxima e mínima atingidas; (e) Calcule a variação de energia interna no processo (i) + (ii).
- Um mol de um gás ideal, contido num recipiente munido de um pistão móvel, inicialmente a 20°C , se expande isotermicamente até que seu volume aumenta de 50%. A seguir, é contraído, mantendo a pressão constante, até voltar ao volume inicial. Finalmente, é aquecido, a volume constante, até voltar à temperatura inicial. (a) Desenhe o diagrama P - V associado; (b) Calcule o trabalho total realizado pelo gás neste processo.
- 0,1 mol de um gás ideal, com $C_V = \frac{3}{2}R$, descreve o ciclo representado na Fig. P.1 no plano (P, T) . (a) Represente o ciclo no plano (P, T) , indicando P (em atm) e V (em l) associados aos pontos A, B e C. (b) Calcule ΔW , ΔQ e ΔU para os processos AB, BC, CA e o ciclo.

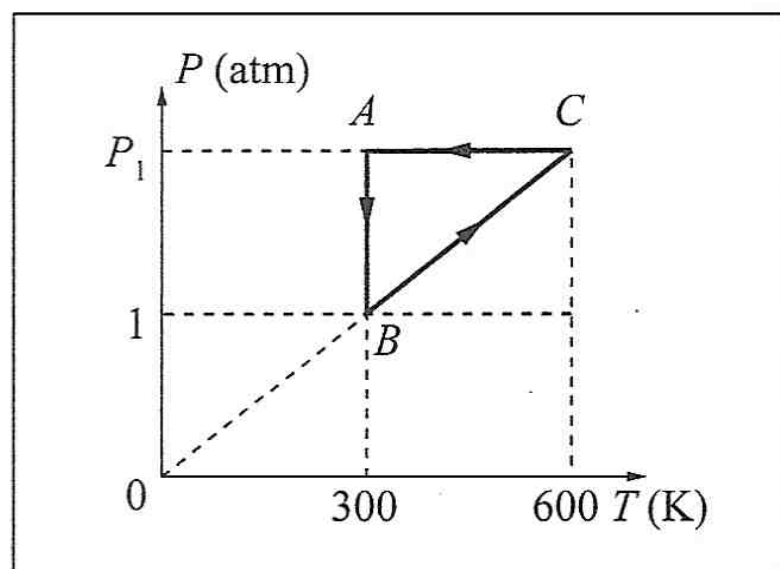


Figura P.1

7. 1 g de gás hélio, com $C_V = \frac{3}{2}R$, inicialmente nas condições NTP, é submetida aos seguintes processos: (i) Expansão isotérmica até o dobro do volume inicial; (ii) Aquecimento a volume constante, absorvendo 50 cal; (iii) Compressão isotérmica, até voltar ao volume inicial. (a) Represente os processos no plano (P, V), indicando P (em atm), V (em l) e T (em K) associado a cada ponto. (b) Calcule ΔU e ΔW para os processos (i), (ii) e (iii).
8. Um mol de um gás ideal descreve o ciclo ABCDA representado na Fig. P.2 no plano (P, V), onde $T = T_1$ e $T = T_2$ são isotermas. Calcule o trabalho total associado ao ciclo, em função de P_0, V_0, T_1 e T_2 .

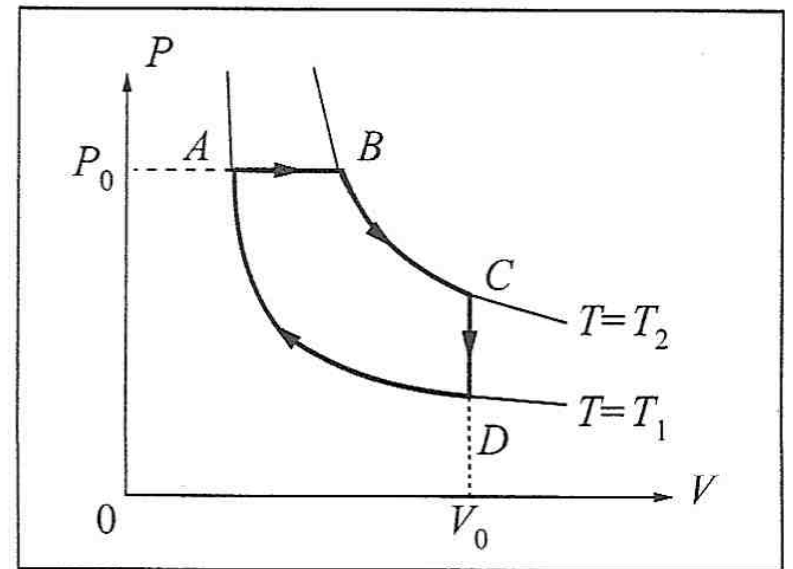


Figura P.2

9. Um mol de gás hélio, com $C_V = \frac{3}{2}R$, inicialmente a 10 atm e 0°C , sofre uma expansão adiabática reversível até atingir a pressão atmosférica, como primeiro estágio num processo de liquefação do gás. (a) Calcule a temperatura final (em $^\circ\text{C}$); (b) Calcule o trabalho realizado pelo gás na expansão.
10. 1 l de H_2 (para o qual $\gamma = 7/5$), à pressão de 1 atm e temperatura de 27°C , é comprimido adiabaticamente até o volume de 0,5 l e depois resfriado, a volume constante, até voltar à pressão inicial. Finalmente, por expansão isobárica, volta à situação inicial. (a) Represente o processo no plano (P, V), indicando P (atm), V (l) e T (K) para cada vértice do diagrama. (b) Calcule o trabalho total realizado; (c) Calcule ΔU e ΔQ para cada etapa.
11. Um mol de um gás ideal, com $C_V = \frac{3}{2}R$, a 17°C , tem sua pressão reduzida à metade por um dos quatro processos seguintes: (i) a volume constante; (ii) isotermicamente; (iii) adiabaticamente; (iv) por expansão livre. Para um volume inicial V_i , calcule, para cada um dos quatro processos, o volume e a temperatura finais, ΔW e ΔU .
12. No método de Rüchhardt para medir $\gamma = C_P/C_V$ do ar, usa-se um grande frasco com um gargalo cilíndrico estreito de raio a , aberto para a atmosfera ($p_0 =$ pressão atmosférica), no qual se ajusta uma bolinha metálica de raio a e massa m . Na posição de equilíbrio O da bolinha, o volume de ar abaixo dela no frasco é V (Fig. P.3). (a) Calcule a força restauradora sobre a bolinha quando ela é empurrada de uma distância x para baixo a partir do equilíbrio, o movimento sendo suficientemente rápido para que o processo seja adiabático. Mostre que a bolinha executa um movimento harmônico simples e calcule o período τ em função de a, m, V, p_0 e γ . (b) Numa

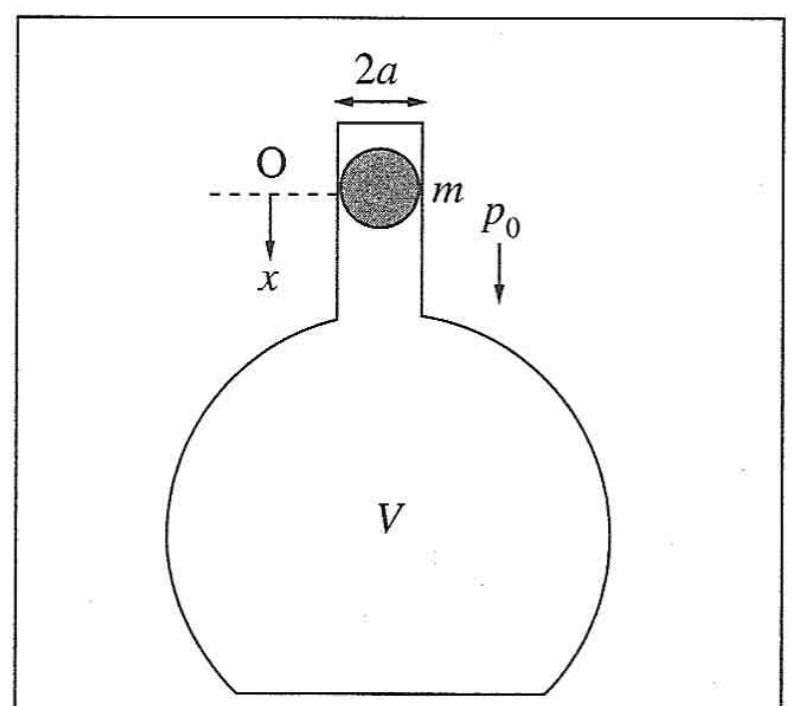


Figura P.3

experiência em que $a = 0,5$ cm, $m = 10$ g, $V = 5$ l, $p_0 = 1$ atm, o período observado é $\tau = 1,5$ s. Determine o valor correspondente de γ para o ar.

13. Um mol de um gás ideal, partindo das condições NTP, sofre: (i) uma compressão isotérmica até um volume de 5 l, seguida de (ii) uma expansão adiabática até retornar ao volume inicial, atingindo uma pressão final de 0,55 atm. (a) Calcule P ao fim da etapa (i) e T ao fim de (ii). (b) Calcule C_P e C_V , para este gás; (c) Calcule a variação total de energia interna; (d) Calcule o trabalho total realizado.

Capítulo 10

A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

10.1 — Introdução

A 1.^a lei da termodinâmica, como vimos, incorpora ao princípio geral de conservação da energia o reconhecimento de que o calor é uma forma de energia.

Qualquer processo em que a energia total seja conservada é compatível com a 1.^a lei. Se um dado processo ocorre num certo *sentido* ou *seqüência temporal*, conservando a energia em cada instante, nada impediria, de acordo com a 1.^a lei, que ele ocorresse em sentido inverso (invertendo a seqüência temporal), ou seja, o processo seria *reversível*.

No entanto, a experiência mostra que os processos observados na escala macroscópica tendem a ocorrer num só sentido, ou seja, são *irreversíveis*. Vejamos alguns exemplos:

- (i) Para elevar de 1°C a temperatura de 1 l de água, gastamos 1 kcal. Resfriando de 1°C 1 l de água, deveria então ser possível extrair 1 kcal de energia. Um navio poderia ser propelido por essa energia e ao mesmo tempo resfriar sua carga: o oceano constituiria um reservatório praticamente inesgotável de energia. Por que isto não funciona?
- (ii) Na experiência de Joule descrita à pág. 174, quando os pesos são soltos, eles caem e a água se aquece pelo atrito com as pás, convertendo energia mecânica em energia térmica. Seria igualmente compatível com a 1.^a lei que a água se resfriasse espontaneamente, fazendo subir os pesos. Por que isto não ocorre?
- (iii) Analogamente, o atrito sempre tende a *frear* corpos em movimento, convertendo sua energia cinética em calor. Por que não ocorre o processo inverso, acelerando corpos com resfriamento do meio ambiente?
- (iv) Uma pessoa que mergulha numa piscina converte energia mecânica em energia térmica da água. Num filme que registre o mergulho, exibido de trás para diante, o processo é invertido e o mergulhador impulsionado de volta para o trampolim — o que não contradiz em nada a conservação da energia. Entretanto, o absurdo da cena é evidente e provoca risos na platéia. Por quê?
- (v) Fala-se muito, em nossos dias, da crise de energia, e são feitas campanhas no sentido de “conservar” (economizar, não desperdiçar) a energia. Se a energia sempre se conserva, que sentido tem isso?
- (vi) Quando um corpo quente (temperatura elevada) é colocado em contato térmico com um corpo frio (temperatura mais baixa), a 1.^a lei só permite concluir [cf. (8.5.6)] que o calor perdido por um dos corpos é ganho pelo outro. No entanto, a experiência mostra que é o mais quente que se resfria e o mais frio que se aquece. Quando colocamos sobre uma chama uma panela com água, nunca ocorre que a água se congele e a temperatura da chama aumente. Por quê?

(vii) Na experiência de expansão livre (pág. 178), quando abrimos a válvula, o gás se expande até preencher o recipiente onde havia vácuo. O processo inverso, em que ele voltaria espontaneamente a passar para o outro recipiente, restabelecendo o vácuo naquele para onde passou, não viola a 1.^a lei. O que impede sua ocorrência?

Podemos dizer, de forma mais geral, que todas as leis físicas fundamentais que discutimos até agora, em particular as leis do movimento, são *reversíveis*: nada nelas permite distinguir um sentido de sucessão de eventos (*sentido do tempo*) do sentido inverso. O que determina então o sentido do tempo? Qual é a origem física da distinção entre passado e futuro?

A resposta às questões acima está relacionada com a 2.^a lei da termodinâmica. Ela contribui para esclarecer a origem da “seta do tempo”; voltaremos mais tarde à discussão deste problema, que é um dos mais profundos da física.

Historicamente, a formulação da 2.^a lei esteve ligada com um problema de engenharia, surgido pouco após a invenção da máquina a vapor: como se poderia aumentar o rendimento de uma máquina térmica, tornando-a o mais eficiente possível?

Esta questão foi abordada em 1824 por um jovem (28 anos) e genial engenheiro francês, Nicolas Sadi Carnot, em seu opúsculo “Reflexões sobre a potência motriz do fogo”. Ele escreveu:

“A máquina a vapor escava nossas minas, propõe nossos navios, escava nossos portos e rios, forja o ferro... Retirar hoje da Inglaterra suas máquinas a vapor seria retirar-lhe ao mesmo tempo o carvão e o ferro. Secariam todas as suas fontes de riqueza... Apesar do trabalho de toda sorte realizado pelas máquinas a vapor, não obstante o estágio satisfatório de seu desenvolvimento atual, a sua teoria é muito pouco compreendida.”

É notável que o trabalho de Carnot foi muito anterior à formulação precisa da 1.^a lei da termodinâmica. Embora Carnot empregue a expressão “calórico”, há indícios de que ele próprio já teria formulado a 1.^a lei, embora de forma um tanto obscura.

Após o trabalho de Carnot que conduziu à 2.^a lei, ela foi formulada de maneira mais precisa por Clausius em 1850 e por Thomson (Lord Kelvin) em 1851. Embora estas formulações sejam diferentes, veremos que são equivalentes.

10.2 — Enunciados de Clausius e Kelvin da segunda lei

Freqüentemente (inclusive em livros didáticos) se procura traduzir o conteúdo da 2.^a lei na afirmação de que, embora seja fácil converter energia mecânica completamente em calor (por exemplo, na experiência de Joule), é impossível converter calor inteiramente em energia mecânica. Isto não é verdade!

Com efeito, consideremos um recipiente de paredes diatérmicas, à temperatura ambiente T , um gás comprimido a uma pressão inicial P_i maior que a pressão atmosférica P_0 , e munido de um pistão. Podemos deixar o gás *expandir-se isotermicamente*, absorvendo uma quantidade de calor ΔQ da atmosfera (reservatório térmico à temperatura T). Neste processo, o gás realizará um trabalho ΔW dado pela (9.1.15). Podemos geralmente, com muito boa aproximação, tratá-lo como um gás ideal. Como $\Delta T = 0$ (processo isotérmico), a (9.2.11) implica $\Delta U = 0$, ou seja, a energia interna do gás não muda.

Logo, pela 1.^a lei da termodinâmica (8.5.4), temos

$$\Delta Q = \Delta W \quad (10.2.1)$$

ou seja, o calor absorvido da atmosfera transforma-se completamente em trabalho. Entretanto, a pressão final P_f do gás é menor que a inicial ($P_f/P_i = V_i/V_f$), e só há expansão enquanto $P_f > P_0$: o processo termina quando a pressão atinge a pressão atmosférica, e só pode ser executado

uma única vez. Para obter uma *máquina térmica*, precisamos de um processo que possa ser *repetido* indefinidamente, enquanto se mantenha o fornecimento de calor, ou seja, o sistema precisa *voltar ao estado inicial*, descrevendo um *ciclo* (pág. 180).

É muito fácil ter um ciclo em que trabalho é completamente convertido em calor. Basta, na experiência de Joule, suspender novamente os pesos cada vez que caem, recolocando-os na posição inicial.

Entretanto, se pudessemos ter um *ciclo* em que calor se transformasse completamente em trabalho, teríamos realizado um “moto perpétuo de 2.^a espécie” (exemplo (i) da pág. 205): a energia térmica dos oceanos ou da atmosfera constituiria um reservatório praticamente inesgotável de energia (um “moto perpétuo de 1.^a espécie” criaria energia, violando a 1.^a lei). Nenhum processo físico conhecido permite construir um tal “motor miraculoso”, o que leva ao enunciado de Kelvin (K) da 2.^a lei da termodinâmica:

(K): *É impossível realizar um processo cujo único efeito seja remover calor de um reservatório térmico e produzir uma quantidade equivalente de trabalho.*

Note-se que *único* efeito significa que o sistema tem de voltar ao estado inicial, ou seja, que o processo é *cíclico*. O exemplo dado acima (expansão isotérmica de um gás inicialmente comprimido) não contradiz (K), porque o estado final do gás difere do inicial ($V_f > V_i$): não se trata portanto de um ciclo.

Consequências imediatas do enunciado de Kelvin:

(a) A geração de calor por atrito a partir de trabalho mecânico é irreversível

Com efeito, se conseguíssemos inverter completamente um tal processo, por exemplo, tornando a suspender os pesos na experiência de Joule após sua queda, por “antiatrito”, resfriando a água do calorímetro, poderíamos utilizar a energia potencial armazenada nos pesos para realizar trabalho, fazendo-os descer até a posição inicial. Com isso fecharíamos um ciclo, tendo como único efeito a produção de trabalho a partir do calor da água, o que violaria (K).

(b) A expansão livre de um gás é um processo irreversível

Com efeito, na expansão livre de um gás ideal, como vimos (pág. 184), é $\Delta Q = \Delta W = 0$.

Logo, se pudessemos inverter esse processo, passando de um volume V_f para $V_i < V_f$ (compressão do gás) com $\Delta Q = \Delta W = 0$, poderíamos depois voltar de V_i para V_f , fechando um ciclo, por uma expansão isotérmica, com $\Delta Q = \Delta W > 0$ (processo que levou à (10.2.1)).

Outro processo irreversível (exemplo (vi) da pág. 205) é a condução de calor, que se dá sempre no sentido de um corpo mais quente para um corpo mais frio. O *enunciado de Clausius* (C) da 2.^a lei baseia-se neste fato experimental:

(C) *É impossível realizar um processo cujo único efeito seja transferir calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.*

Novamente, a qualificação “único” implica que o processo é *cíclico*, e ela é essencial. Se não exigirmos que o sistema volte ao estado inicial, a transferência é perfeitamente possível.

Para efetuá-la, poderíamos por exemplo colocar um recipiente contendo um gás em contato térmico com o corpo mais frio e absorver calor ΔQ dele por *expansão isotérmica* à temperatura T_1 desse corpo (realizando trabalho na expansão). Em seguida, o gás pode ser aquecido por *compressão adiabática* (absorvendo trabalho), até atingir a temperatura $T_2 > T_1$ do corpo mais quente. Colocando-o em contato térmico com esse corpo, pode-se transferir o calor ΔQ para ele por *compressão isotérmica* do gás à temperatura T_2 . Nada impede que o trabalho total realizado neste processo seja $= 0$, mas o estado final do gás é diferente do estado inicial: sua temperatura aumentou de T_1 para T_2 . Logo, o processo não é um ciclo e não há violação de (C).

Um aparelho que violasse (K) seria, como vimos, um “motor miraculoso” (moto contínuo de 2.^a espécie). Analogamente, um aparelho que violasse (C) seria um “refrigerador miraculoso”, pois permitiria um resfriamento contínuo (remoção de calor de um corpo mais frio para um mais quente) sem que fosse necessário fornecer trabalho para este fim.

10.3 — Motor térmico. Refrigerador. Equivalência dos dois enunciados

(a) Motor térmico

Uma máquina térmica (motor) produz trabalho a partir de calor, operando ciclicamente. Pelo enunciado (K), isto é impossível com um único reservatório térmico: precisamos ter pelo menos dois reservatórios térmicos a temperaturas diferentes, $T_1 > T_2$. Chamaremos de *fonte quente* o reservatório a temperatura T_1 mais elevada, e *fonte fria* o outro, a temperatura T_2 .

Seja Q_1 o calor fornecido ao sistema pela fonte quente (*absorvido* da fonte quente), e Q_2 o calor fornecido pelo sistema à fonte fria (*transferido* à fonte fria) [note que para Q_2 estamos usando uma convenção de sinal *oposta* à que foi introduzida à pag. 177!] em cada ciclo. Seja W o trabalho realizado pelo motor num ciclo. Então, pela 1.^a lei (8.7.1)

$$W = Q_1 - Q_2$$

(10.3.1)

[Com a convenção de sinal da pág. 177, teríamos

$$Q_2 \rightarrow -Q_2, \quad W = Q_1 + Q_2$$

(10.3.2)

concordando com a (8.7. 1)].

Não pode ser $Q_2 = 0$, porque se fosse não precisaríamos da fonte fria: Q_1 teria sido completamente convertido em W , e teríamos um “motor miraculoso”, violando (K).

Também não pode ser $Q_2 < 0$ (o que equivaleria a absorver calor de ambas as fontes). Com efeito, se fosse $Q_2 < 0$, bastaria estabelecer contato térmico entre as duas fontes até que, por condução de calor, fosse transferida uma quantidade de calor $-Q_2 > 0$ da fonte quente para a fria, para trazer a fonte fria de volta à condição inicial (note que, pela definição de reservatório térmico, sua temperatura não se altera nesse processo).

O resultado líquido seria produção de trabalho retirando calor apenas da fonte quente, violando novamente (K).

Por conseguinte, tem de ser $Q_2 > 0$, ou seja, na (10.3.1), $W < Q_1$. Para fixar as idéias, ilustramos na Fig. 10.1 o diagrama esquemático de uma *máquina a vapor*. A água é convertida em vapor na caldeira, absorvendo calor Q_1 da fonte quente (fornalha). O

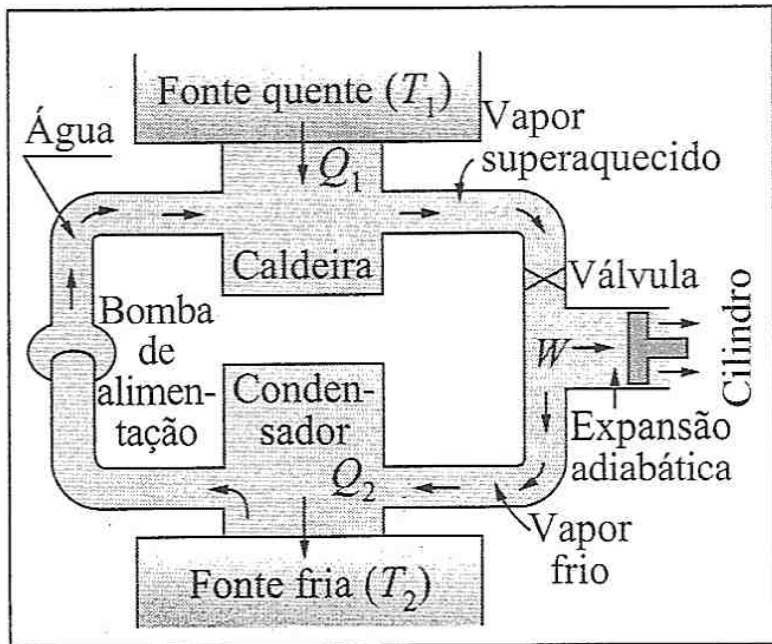


Figura 10.1 — Máquina a vapor

vapor superaquecido passa para o cilindro, onde se expande de forma aproximadamente adiabática, produzindo trabalho W pelo deslocamento de um pistão. A expansão adiabática resfria o vapor, que passa para o condensador (Fig. 10.1), onde se liquefaz pelo contato com a fonte fria (que pode ser a atmosfera ou resfriamento por água corrente). O calor Q_2 cedido à fonte fria é, neste caso, o *calor latente de condensação*, produzido pela condensação do vapor quando se converte em água. Finalmente, a água é aspirada por uma bomba e levada de volta à caldeira, fechando o ciclo.

Podemos representar esquematicamente um motor térmico pelo “diagrama de fluxo” da Fig. 10.2. Pela (10.3.1), temos $Q_1 = W + Q_2$, o que é representado pela bifurcação da coluna sombreada associada a Q_1 em dois “canais”, de espessuras proporcionais a W e a Q_2 .

O “investimento” em energia térmica fornecida é representado por Q_1 (custo de carvão para aquecer a caldeira da máquina a vapor, por exemplo). O “trabalho útil” fornecido é W . O calor Q_2 é um “sub-produto” não aproveitado (na máquina a vapor, é dissipado na atmosfera ou na água de resfriamento do condensador). Logo, é natural definir o rendimento (ou eficiência) do motor térmico por

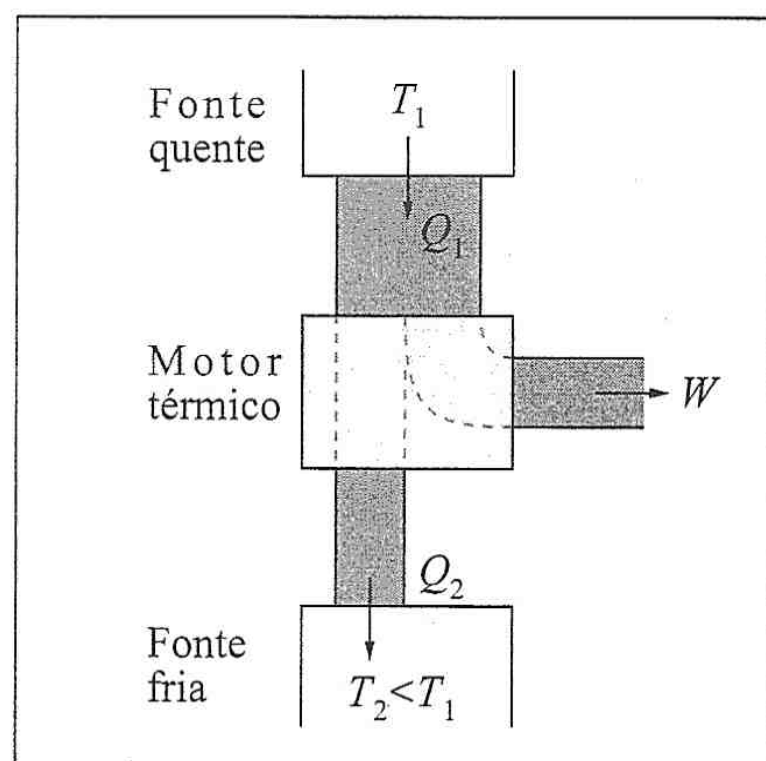


Figura 10.2 — Motor térmico

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{\text{Trabalho fornecido}}{\text{Calor consumido}} \quad (10.3.3)$$

Pela (10.3.1), temos

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (10.3.4)$$

Vemos pela (10.3.4) que $Q_2 > 0$ equivale a $\eta < 1$, ou seja, o rendimento é inferior a 100%.

(b) Refrigerador

Numa máquina a vapor, a água é o *agente*, ou seja, a substância que é submetida ao processo cíclico. Num refrigerador, esse agente é o *refrigerante*, que se escolhe como uma substância cujo calor latente de vaporização (pág. 183) é elevado, como a amônia ou o freon.

O objetivo de um refrigerador é remover calor Q_2 de um reservatório térmico (fonte fria) à temperatura T_2 (ex.: interior de uma geladeira doméstica), transferindo calor Q_1 para uma fonte quente à temperatura T_1 (atmosfera à temperatura ambiente, no exemplo da geladeira). Não é possível que seja $Q_1 = Q_2$, porque isso violaria (C): é indispensável fornecer um trabalho W para realizar o processo, com

$$Q_1 = W + Q_2 \quad (10.3.5)$$

O diagrama de fluxo associado a um refrigerador está representado na Fig. 10.3. Comparando-o com a Fig. 10.1, vemos que um refrigerador pode ser pensado como um motor térmico funcionando “ao contrário”.

Na prática, o refrigerante remove calor da fonte fria evaporando-se (calor latente de vaporização) e transfere calor à fonte quente condensando-se (calor latente de liquefação),

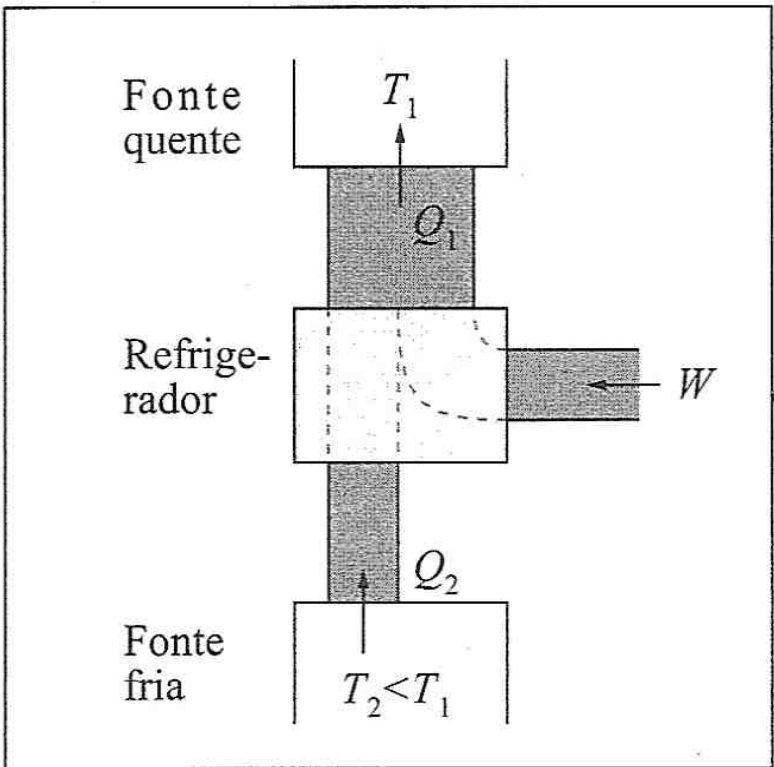


Figura 10.3 — Diagrama de fluxo de refrigerador

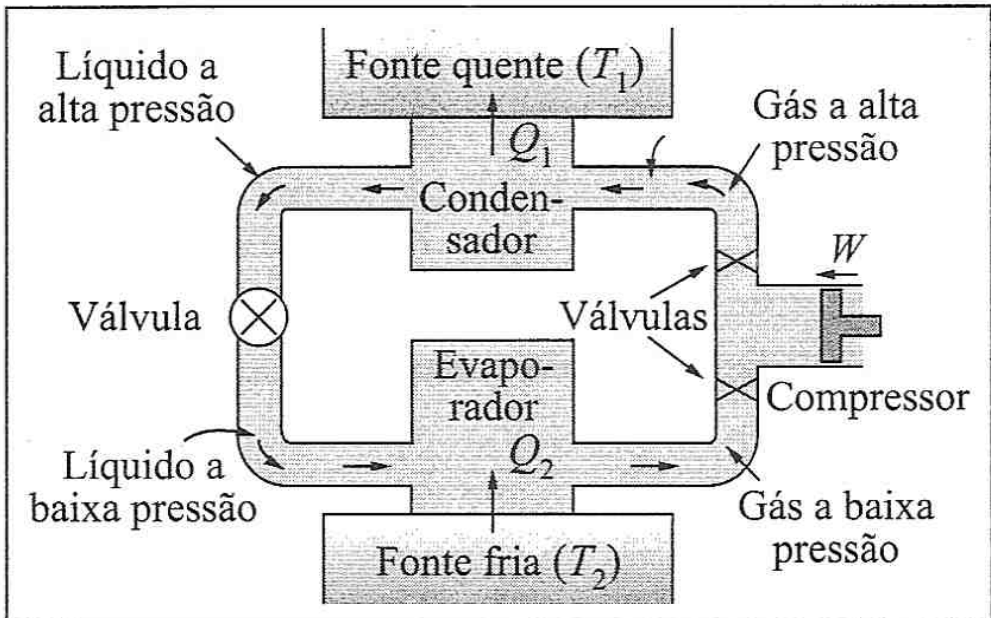


Figura 10.4 — Refrigerador

esquerda na Fig. 10.4) onde sofre um processo do tipo Joule-Thomson (pág. 194).

Comparando a Fig. 10.4 com o esquema da máquina a vapor (Fig. 10.1), vemos novamente que o refrigerador corresponde ao motor térmico funcionando em sentido inverso.

(c) Equivalência entre os enunciados (K) e (C)

Vamos mostrar agora que os enunciados de Kelvin e Clausius da 2.^a lei da termodinâmica são equivalentes. Para isto, ilustramos primeiro por diagramas de fluxo (Fig. 10.5) os dois enunciados: (K) afirma que não existe um “motor miraculoso”, como o ilustrado, e (C) que

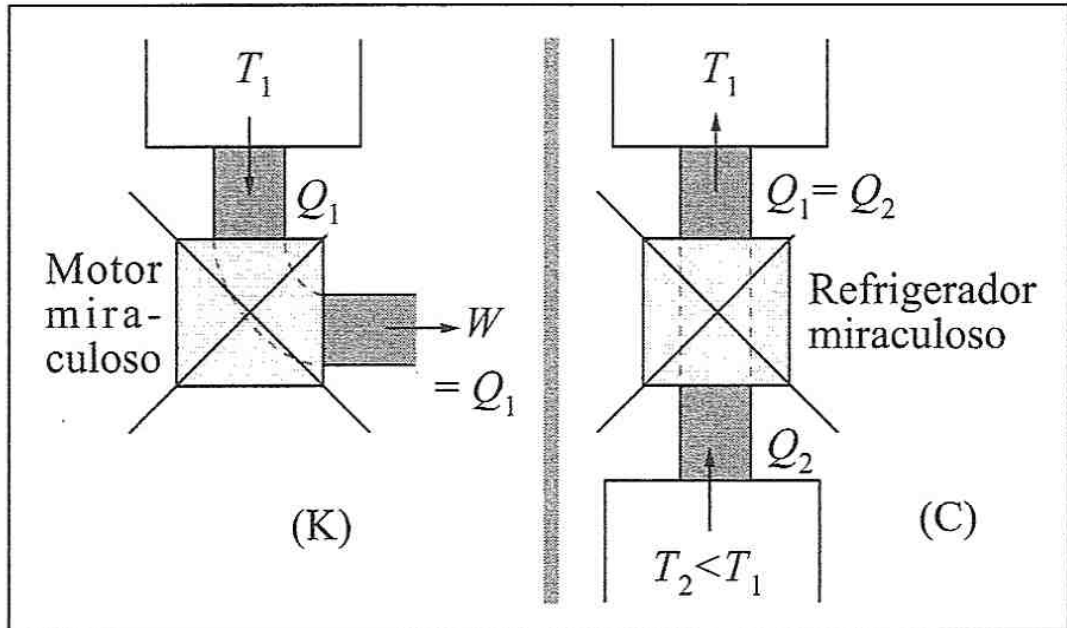


Figura 10.5 — Motor e refrigerador miraculosos

que é também o contrário do que acontece na máquina a vapor. Para conseguir que a substância se vaporize a uma temperatura mais baixa e liquefaça a temperatura mais elevada, é preciso que ela se vaporize a baixa pressão e liquefaça a alta pressão, e é dessa forma que o trabalho W é introduzido: é fornecido pelo compressor (acionado pelo motor numa geladeira doméstica). A temperatura de vaporização, como é sabido, diminui com a pressão (a água ferve a temperatura mais baixa em altitudes elevadas).

O diagrama esquemático do funcionamento de um refrigerador está representado na Fig. 10.4. O líquido a baixa pressão remove calor da fonte fria vaporizando-se no evaporador (serpentina, numa geladeira doméstica). Após ser isolado do evaporador pela passagem através de uma válvula, o gás é comprimido pelo compressor até uma pressão suficiente para liquefazer-se no condensador, cedendo calor à fonte quente. Para passar do líquido a alta pressão resultante ao líquido a baixa pressão a ser reinjetado no evaporador, fechando o ciclo, é preciso baixar a pressão. Em lugar de fazer isso por expansão adiabática (a compressão do gás pelo compressor é aproximadamente adiabática), na prática se faz passar o líquido por uma válvula (à

não existe um “refrigerador miraculoso”, como o da figura.

(i) O enunciado (K) implica (C)

Se (K) não implicasse (C), um motor térmico real (Fig. 10.2) poderia ser acoplado com um refrigerador miraculoso (já que (C) não seria válido), o qual devolveria à fonte quente (Fig. 10.6) o calor Q_2 transferido à fonte fria pelo motor térmico. O resultado líquido seria remover calor $Q_1 - Q_2$ da fonte quente e convertê-lo inteiramente em trabalho W , ou seja, seria equivalente à existência de um motor miraculoso, contradizendo a hipótese da validade de (K). Logo, $(K) \Rightarrow (C)$.

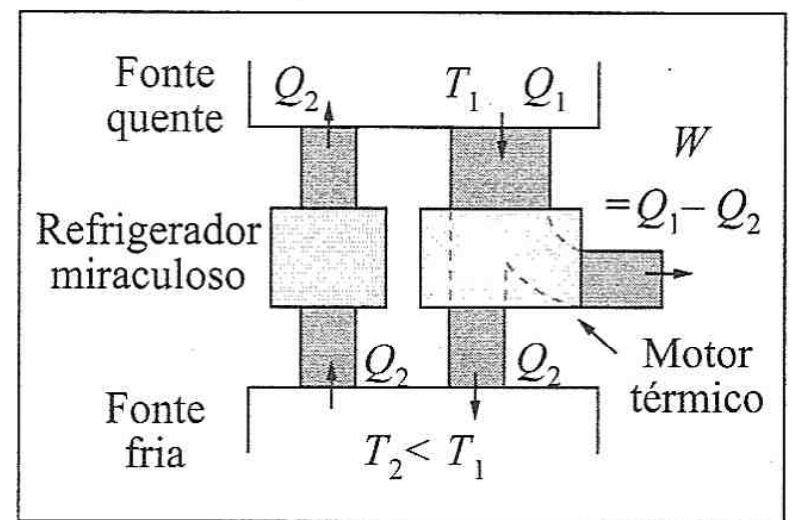


Figura 10.6 — (K) implica (C)

(ii) O enunciado (C) implica (K)

Se (C) não implicasse (K), um refrigerador real (Fig. 10.3) poderia ser acoplado com um motor miraculoso (já que (K) não seria válido), o qual converteria totalmente em trabalho W a diferença $Q_1 - Q_2$ entre o calor cedido à fonte quente e o calor absorvido da fonte fria pelo refrigerador real. Esse mesmo trabalho W alimentaria o refrigerador real (Fig. 10.7). O resultado líquido do ciclo seria transferência integral do calor Q_2 da fonte fria à quente, sem qualquer outro efeito, ou seja, seria equivalente a um refrigerador miraculoso (violação de (C)), contra a hipótese. Logo, $(C) \Rightarrow (K)$.

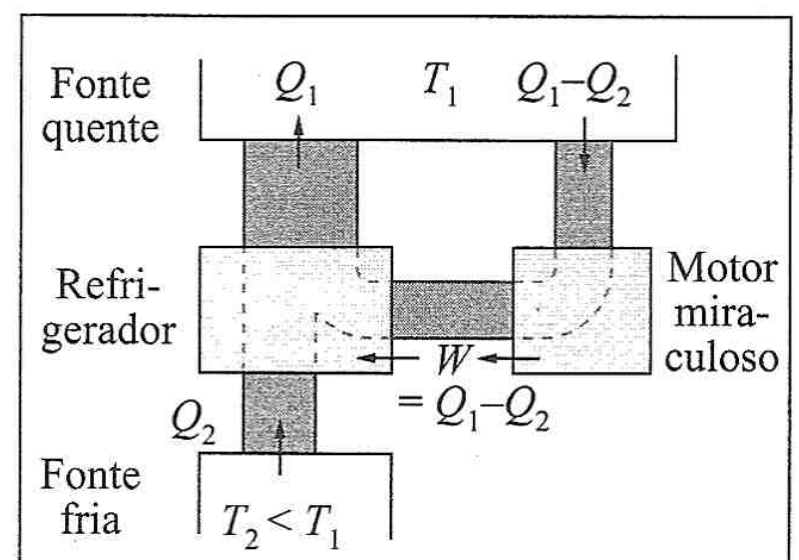


Figura 10.7 — (C) implica (K)

Combinando (i) e (ii) acima, concluímos que os enunciados de Kelvin e de Clausius da 2.^a lei da termodinâmica são equivalentes.

10.4 — O ciclo de Carnot

Podemos abordar agora o problema que Carnot se propôs a resolver: *dadas uma fonte quente e uma fonte fria, qual é o máximo rendimento que se pode obter de um motor térmico operando entre essas duas fontes?*

Para que se obtenha o máximo rendimento, é necessário que o processo seja reversível. Na Seção 10.1, vimos diversos exemplos de processos irreversíveis, e é fácil ver que a ocorrência de processos deste tipo sempre diminui o rendimento de uma máquina térmica.

Assim, por exemplo, a existência de atrito reduz o rendimento, porque energia mecânica, que poderia produzir trabalho útil, é convertida irreversivelmente em calor, havendo pois um desperdício (cf. pág. 205). Analogamente, se corpos a temperaturas diferentes entram em contato térmico, transferindo calor por condução, a energia térmica correspondente não pode ser recuperada num processo cíclico, porque isso implicaria na transferência de calor de um corpo frio a outro mais quente, violando (C).

Logo, devemos restringir-nos a máquinas térmicas reversíveis. Como seria uma máquina térmica deste tipo operando entre duas fontes? Como a condução de calor é irreversível, o sistema utilizado só pode trocar calor com as fontes quando está à mesma temperatura que elas. Logo, a absorção de calor Q_1 da fonte quente tem de ser feita isotermicamente, à temperatura T_1 dessa fonte, e o calor Q_2 cedido à fonte fria também deve ser transferido isotermicamente, à temperatura T_2 da fonte fria. Pela mesma razão, as porções do ciclo em

que há variação da temperatura do sistema, ou seja, quando ele passa de T_1 a T_2 ou volta de T_2 a T_1 , devem ocorrer *sem troca de calor*, ou seja, como *processos adiabáticos reversíveis*.

Vemos assim que um *ciclo reversível* com duas fontes é necessariamente formado de *duas porções de isotermas ligadas por duas porções de adiabáticas*. Um tal ciclo chama-se *ciclo de Carnot* e uma máquina térmica reversível chama-se *máquina de Carnot*.

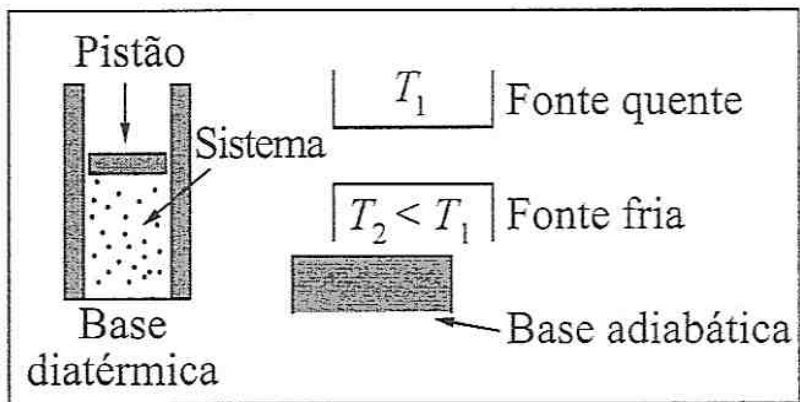


Figura 10.8 — Componentes de uma máquina de Carnot

Para fixar as idéias, é útil considerar um exemplo específico de máquina de Carnot, em que o sistema (agente) é um gás contido num recipiente de paredes adiabáticas, exceto pela sua base, que é diatérmica, e munido de um pistão. Há também uma base adiabática, sobre a qual o sistema pode ser colocado, e as fontes quente e fria. Esses ingredientes estão representados na Fig. 10.8.

A Fig. 10.9 ilustra os 4 estágios de um ciclo de Carnot e o diagrama (P, V) correspondente para esse sistema. (1) Partindo do ponto a , faz-se uma *expansão isotérmica reversível* à temperatura T_1 , até o ponto b . O gás realiza trabalho e absorve uma quantidade de calor Q_1 da fonte quente. (2) A partir de b , o sistema, colocado sobre a base isolante, sofre uma *expansão adiabática reversível*: o gás realiza trabalho e sua energia interna diminui, com conseqüente queda de temperatura de T_1 para T_2 (ponto c). (3) Partindo de c , o recipiente é colocado em contato térmico com a fonte fria e é submetido a uma *compressão isotérmica reversível* à temperatura T_2 da fonte fria. O gás recebe trabalho e fornece uma quantidade de calor Q_2 à fonte fria, até chegar ao ponto d da figura, situado sobre a adiabática que passa por a . (4) Finalmente, a partir de d , o sistema é recolocado sobre a base isolante e submetido a uma *compressão adiabática reversível*, aquecendo o gás até que ele retorne à temperatura T_1 da fonte quente. Isto permite recolocá-lo em contato com essa fonte, voltando a (1) e fechando o ciclo.

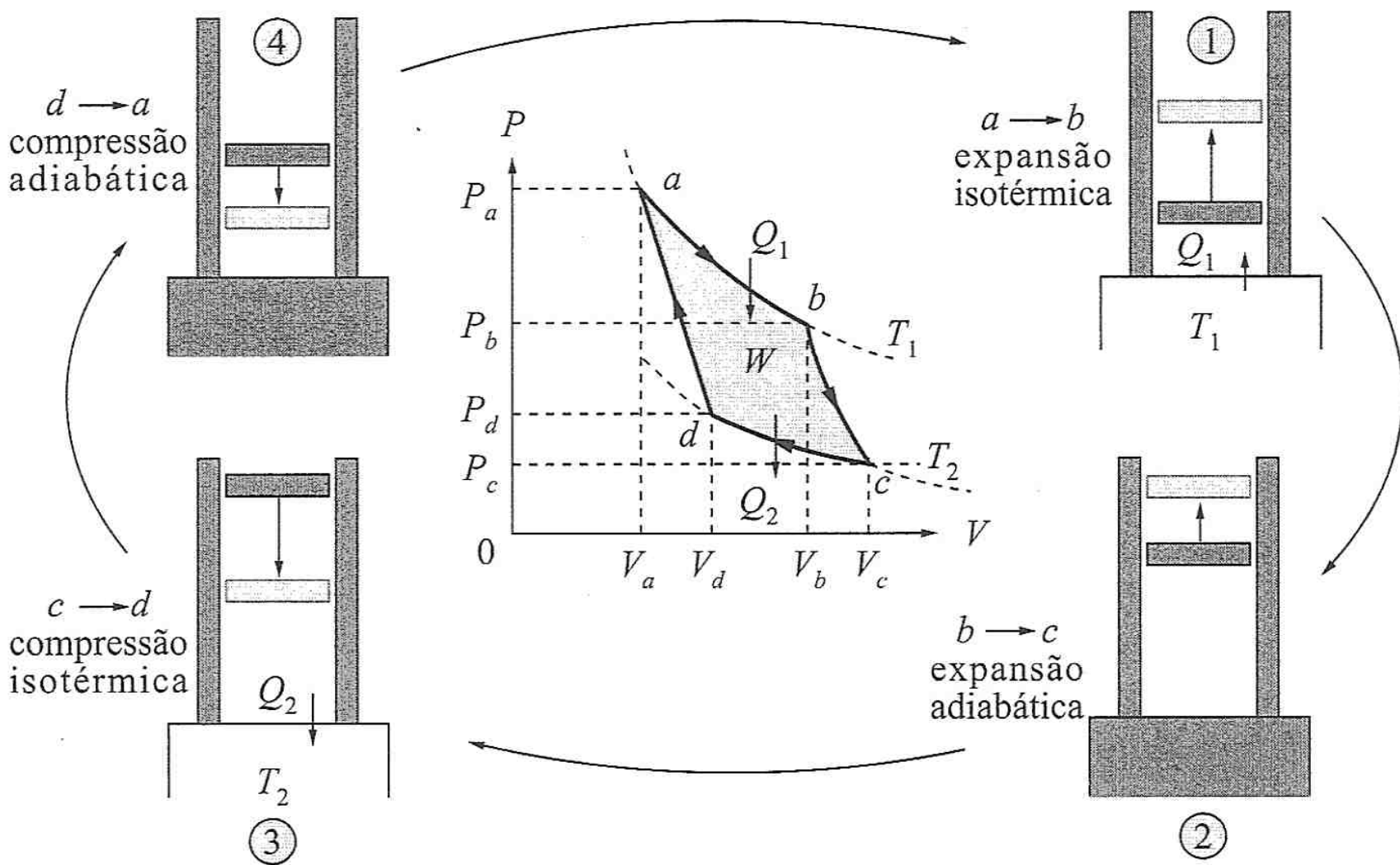


Figura 10.9 — Ciclo de Carnot

O trabalho total $W = Q_1 - Q_2$ realizado pelo sistema no decorrer de um ciclo é representado graficamente pela área sombreada no diagrama (P, V) acima. Como o ciclo é descrito no sentido horário, temos $W > 0$ [cf. (8.6.4)].

Uma vez que o ciclo de Carnot é reversível, ele pode ser descrito em sentido oposto. Neste caso, temos $W < 0$, ou seja, *realizamos* trabalho sobre o sistema para que ele *remova* calor Q_2 da fonte fria e *forneça* calor Q_1 à fonte quente: em lugar de um *motor térmico*, a máquina de Carnot, funcionando em sentido inverso, corresponde a um *refrigerador*.

Teorema de Carnot

- (a) *Nenhuma máquina térmica que opere entre uma dada fonte quente e uma dada fonte fria pode ter rendimento superior ao de uma máquina de Carnot*
- (b) *Todas as máquinas de Carnot que operem entre essas duas fontes terão o mesmo rendimento.*

- (a) Seja R um motor térmico de Carnot e seja I outro motor térmico qualquer, operando entre as mesmas duas fontes.

Sempre podemos ajustar os ciclos das duas máquinas para que as duas produzam a mesma quantidade de trabalho W . Com efeito, se fosse $W_R \neq W_I$, sempre poderíamos encontrar dois inteiros m e n tais que, com aproximação tão boa como quisermos, $W_R/W_I = m/n$, ou seja, $nW_R = mW_I = W$. Basta ajustar então n ciclos de R em correspondência com m ciclos de I .

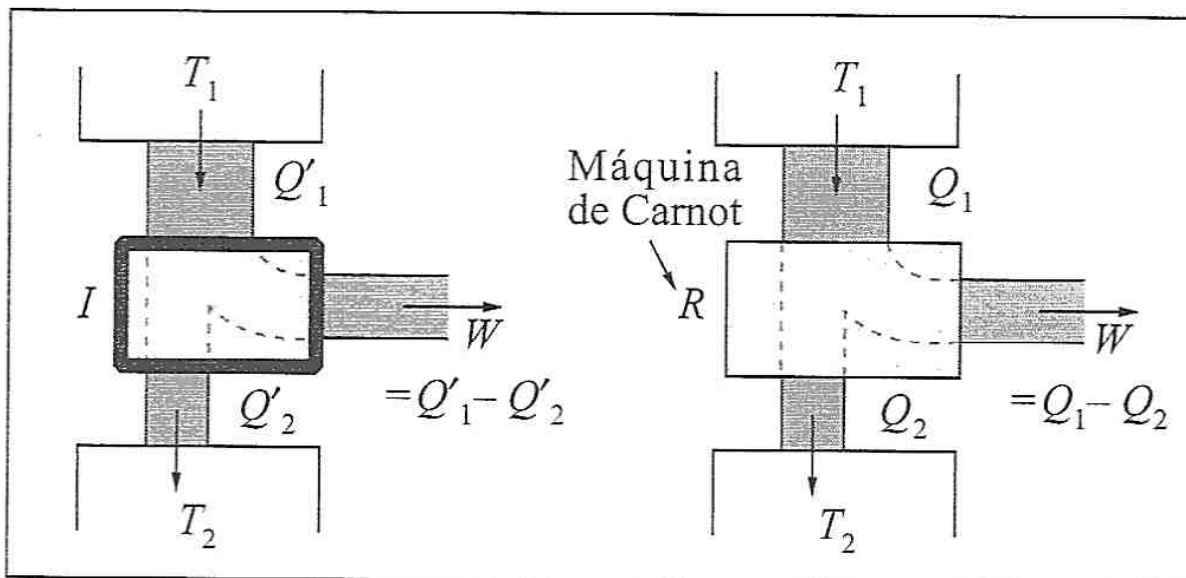


Figura 10.10 — Ajuste dos ciclos

A Fig. 10.10 pressupõe o ajuste já feito, para que W seja o mesmo, e define as quantidades de calor trocadas com as duas fontes: Q'_1, Q'_2 , para I e Q_1, Q_2 para R . Pela (10.3.4), os rendimentos correspondentes são:

$$\eta_R = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1} \quad (10.4.1)$$

$$\eta_I = 1 - \frac{Q'_2}{Q'_1} = \frac{W}{Q'_1} \quad (10.4.2)$$

Suponhamos que pudesse ser

$$\eta_I > \eta_R, \quad \therefore Q'_1 < Q_1 \quad (10.4.3)$$

Seria então também

$$Q'_2 = Q'_1 - W < Q_2 = Q_1 - W \quad (10.4.4)$$

Como R é reversível, poderíamos usar o trabalho W produzido por I , funcionando como motor térmico, para acionar R , funcionando como refrigerador (Fig. 10.11), com

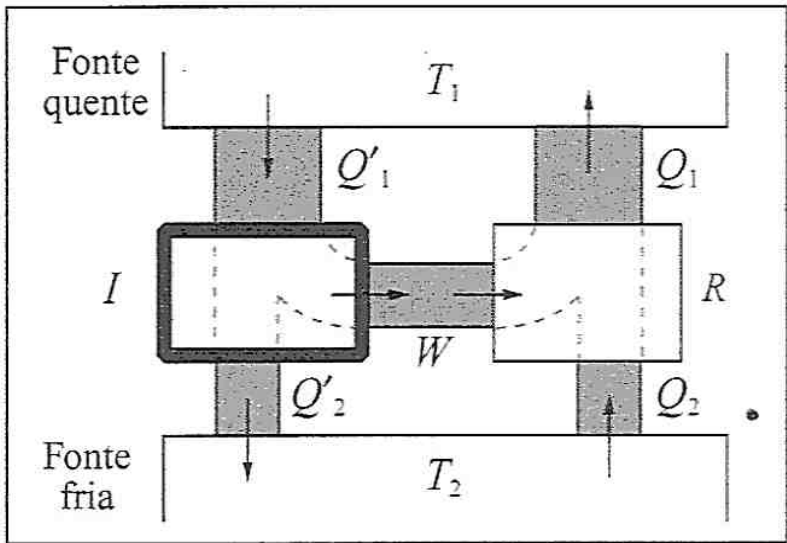


Figura 10.11 — Teorema de Carnot

$$W = Q'_1 - Q'_2 = Q_1 - Q_2$$

O resultado líquido do acoplamento de I com R , como vemos pela figura, seria equivalente, em cada ciclo, a transferir calor $Q_2 - Q'_2 = Q_1 - Q'_1 > 0$ da fonte fria para a fonte quente, sem nenhum outro efeito, violando o enunciado de Clausius da 2.^a lei. Logo, não pode valer a (10.4.3), ou seja, tem de ser

$\eta_I \leq \eta_R$

(10.4.5)

o que demonstra a parte (a) do teorema de Carnot.

(b) Se I também é uma máquina de Carnot R' , portanto *reversível*, podemos repetir o mesmo raciocínio trocando os papéis de R' e R (ou seja, usando R' como refrigerador e R como motor), o que daria $\eta_R \leq \eta_{R'}$, ao passo que a (10.4.5) daria $\eta_{R'} \leq \eta_R$. Combinando essas duas desigualdades, concluímos que

$\eta_R = \eta_{R'}$

(10.4.6)

ou seja, que todas as máquinas de Carnot que operam entre as mesmas fontes são *igualmente eficientes*, demonstrando assim a parte (b) do teorema de Carnot.

Podemos imaginar uma grande variedade de sistemas, de natureza muito diferente, utilizáveis em princípio numa máquina de Carnot. Mesmo no exemplo da pág. 211, qualquer gás (que não precisa ser próximo de um gás ideal) pode ser empregado, e poderíamos utilizar um fluido — ou mesmo uma mistura de líquido com vapor, no lugar do gás (neste último caso, conforme veremos mais adiante, os processos isotérmicos não seriam do tipo considerado no exemplo). Pela (10.4.6), o rendimento independe da natureza do sistema ou da substância empregada como agente.

10.5 — A escala termodinâmica de temperatura

As únicas características das fontes quente e fria que entram no ciclo de Carnot são as respectivas temperaturas T_1 e T_2 , que especificam as isotermas empregadas. O rendimento η_R , de uma máquina de Carnot operando entre essas duas fontes, dado pela (10.4.1), deve representar portanto, conforme acabamos de ver, uma função *universal* de T_1 e T_2 , independente das propriedades específicas do sistema ou do agente empregado na máquina de Carnot. Devemos ter, portanto, para qualquer máquina de Carnot [cf. (10.4.1)],

$\frac{Q_1}{Q_2} = f(T_1, T_2)$

(10.5.1)

onde f é uma *função universal*, no sentido acima.

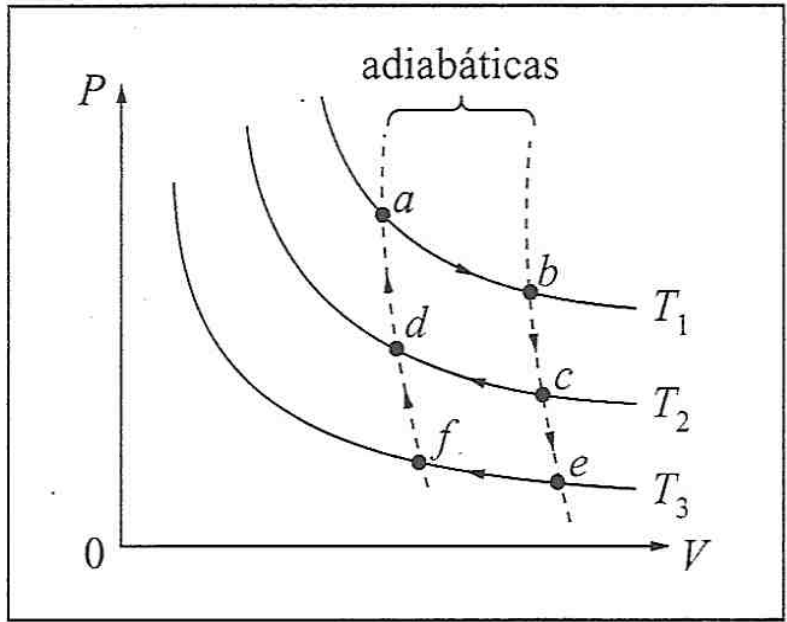


Figura 10.12 — Ciclos de Carnot

Consideremos, além das duas adiabáticas e duas isotermas T_1, T_2 no plano (P, V) que definem um dado ciclo de Carnot, mais uma terceira isoterma qualquer T_3 , que intercepta as duas adiabáticas nos pontos e, f , conforme ilustrado na Fig. 10.12. Podemos construir três ciclos de Carnot, $abcd$, $dcef$ e $abef$ com essas isotermas e adiabáticas. Sejam Q_1, Q_2 e Q_3 as quantidades de calor associadas às porções isotérmicas

desses ciclos, ab , cd e ef , respectivamente (note que o ciclo $abef$ pode ser considerado como resultante de percorrer sucessivamente $abcd$ e $dcef$, onde Q_2 é transferido em cd e removido em dc). Aplicando a (10.5.1) a cada ciclo, vem

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} &= f(T_1, T_2) \\ \frac{Q_2}{Q_3} &= f(T_2, T_3) \\ \frac{Q_1}{Q_3} &= f(T_1, T_3) \\ \frac{Q_1}{Q_2} &= \frac{Q_1 / Q_3}{Q_2 / Q_3} \end{aligned} \right\} f(T_1, T_2) = \frac{f(T_1, T_3)}{f(T_2, T_3)} \quad (10.5.2)$$

Como T_3 pode ser escolhido de forma arbitrária, a (10.5.2) só é possível se o 2.º membro é efetivamente independente de T_3 , ou seja, a função universal f tem de ser da forma

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = f(T_1, T_2) = \frac{F(T_1)}{F(T_2)}} \quad (10.5.3)$$

o que leva à propriedade (10.5.2) qualquer que seja T_3 . Na (10.5.3), $F(T)$ é uma função universal da temperatura, independente das propriedades específicas de qualquer substância.

Conforme foi percebido por Kelvin, esta é a situação ideal para permitir a introdução de uma *escala termodinâmica absoluta de temperatura*, que não só não depende de propriedades específicas de uma dada substância, como a escala termométrica empírica de mercúrio, por exemplo (pág. 160), mas também independe da existência e propriedades de uma classe de substâncias, como os gases, na qual se baseia a escala de gás ideal (pág. 162).

Definimos esta nova *escala absoluta de temperatura* τ escolhendo a função F na (10.5.3) por

$$F(\tau) = \tau \quad (10.5.4)$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}} \quad (10.5.5)$$

Entretanto, isto define apenas a *razão* de duas temperaturas absolutas. Em princípio, para medi-la, bastaria medir as quantidades de calor trocadas com fontes a essas temperaturas num ciclo de Carnot.

Para definir completamente a escala absoluta, basta atribuir um valor a uma dada temperatura de referência padrão, que se escolhe como a do ponto triplo da água (pág. 162), a saber,

$$\tau_{tr} = 273,16 \text{ K}$$

A *temperatura termodinâmica absoluta* τ de um corpo qualquer fica então definida através de uma máquina de Carnot que opere entre a temperatura deste corpo e a do ponto triplo, por

$$\frac{\tau}{\tau_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}} \quad (10.5.6)$$

Identidade entre a escala termodinâmica absoluta e a escala de gás ideal

Vamos mostrar agora que a escala termodinâmica absoluta de temperatura, que acabamos de definir, *coincide* com a escala de gás ideal, definida na Seção 7.4.

Para isto, vamos calcular o rendimento do ciclo de Carnot para o sistema descrito à pág. 212, tomando como agente um *gás ideal*, cujas propriedades serão expressas na escala termométrica de gás ideal, que vínhamos utilizando até aqui (temperatura T).

Para calcular Q_1 e Q_2 neste caso, basta notar que, como a energia interna de um gás ideal não varia ao longo de uma isoterma [cf. (9.2.11)], Q é igual ao trabalho realizado isotermicamente, que é dado pela (9.1.15). Logo, para a expansão isotérmica $a \rightarrow b$ na Fig. 10.9,

$$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) \quad (10.5.7)$$

Analogamente, como $Q_2 > 0$ com a convenção de sinal usada na (10.4.1),

$$Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right) \quad (10.5.8)$$

corresponde à compressão isotérmica $c \rightarrow d$ na Fig. 10.9. Dividindo membro a membro a (10.5.7) pela (10.5.8), vem

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln(V_b / V_a)}{T_2 \ln(V_c / V_d)} \quad (10.5.9)$$

Por outro lado, ao longo das adiabáticas $b \rightarrow c$ e $d \rightarrow a$, V e T estão relacionados, para um gás ideal, pela (9.4.11), que dá

$$\left. \begin{aligned} V_b^{\gamma-1} T_1 &= V_c^{\gamma-1} T_2 \\ V_a^{\gamma-1} T_1 &= V_d^{\gamma-1} T_2 \end{aligned} \right\} \left(\frac{V_b}{V_a} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d} \right)^{\gamma-1} \quad (10.5.10)$$

Logo, $V_b/V_a = V_c/V_d$, de modo que os termos logarítmicos no numerador e denominador da (10.5.9) se cancelam, levando a

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}} \quad (10.5.11)$$

onde T é a temperatura da escala de gás ideal.

Comparando a (10.5.11) com a (10.5.5), e notando que $\tau_{tr} = T_{tr} = 273,16$ K (cf. pág. 162), concluímos finalmente que

$$\boxed{\tau = T} \quad (10.5.12)$$

ou seja, a escala termodinâmica absoluta de temperatura coincide com a escala de gás ideal, conforme já se havia mencionado na Seção 7.4.

Finalmente, substituindo a (10.5.11) na (10.4. 1), obtemos a solução do problema que Carnot se havia proposto: se T_1 e T_2 são as temperaturas absolutas das fontes quente e fria, respectivamente, o máximo rendimento de um motor térmico operando entre elas é o rendimento de uma máquina de Carnot, dado por

$$\boxed{\eta_R = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \quad (10.5.13)$$

Conforme Carnot afirmou em 1824: “A potência motriz do fogo é independente dos agentes utilizados para aproveitá-la: é determinada exclusivamente pela temperatura dos corpos entre os quais se produz uma transferência de calor”. O que Carnot chama de “potência motriz” é o rendimento.

Como foi mencionado no final da Seção 10.4, o ciclo de Carnot pode ser realizado utilizando, em lugar de um gás, qualquer outro agente, tal como, por exemplo, uma mistura de líquido e vapor em equilíbrio, nos processos de vaporização e condensação. Conforme é bem conhecido, durante o processo de vaporização a uma dada temperatura (temperatura de ebulição), a pressão permanece constante (pressão de vapor), e a absorção de calor é utilizada para aumentar a proporção de vapor na mistura (calor latente de vaporização), até que todo o líquido esteja vaporizado. O inverso ocorre durante a liquefação.

Assim, o diagrama (P, V) de um ciclo de Carnot com este sistema teria a forma ilustrada na Fig. 10.13 (compare com a Fig. 10.9). A porção $a \rightarrow b$ corresponde à vaporização isotérmica à temperatura T_1 e pressão de vapor P_1 , e $c \rightarrow d$ à condensação isotérmica, à temperatura T_2 e pressão de vapor P_2 ; $b \rightarrow c$ e $d \rightarrow a$ continuam correspondendo a uma expansão e uma compressão adiabáticas, respectivamente.

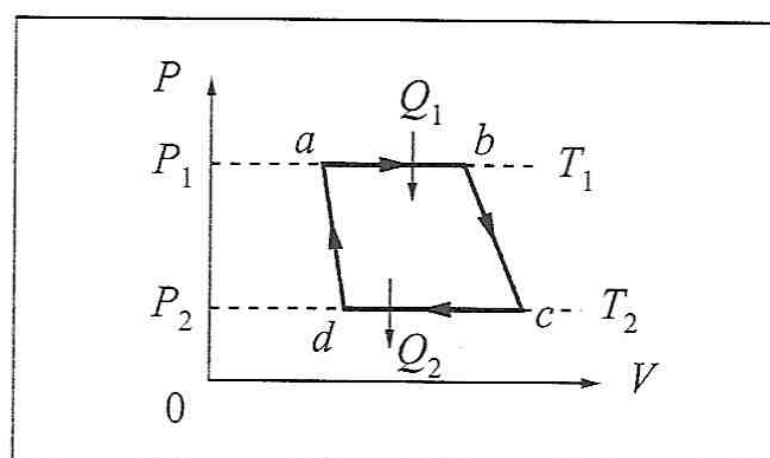


Figura 10.13 — Ciclo de Carnot de máquina a vapor ideal

Este ciclo definiria uma máquina a vapor ideal, de eficiência máxima, em que $a \rightarrow b$ representaria a vaporização na caldeira e $c \rightarrow d$ a condensação no condensador. Numa máquina a vapor real, esquematizada na Fig. 10.1, a porção $d \rightarrow a$ é substituída pela transferência do condensador à caldeira produzida pela bomba de alimentação, após o que a água ainda tem de ser aquecida na fornalha até a temperatura T_1 . Este processo é irreversível, bem como muitos outros que não foram levados em conta (atrito entre o pistão e o cilindro, condução de calor, etc.), de modo que o rendimento de uma máquina a vapor real é muito inferior ao ideal, dado pela (10.5.13).

Exemplo: Suponhamos que a caldeira de uma máquina a vapor esteja a 180°C ($T_1 \approx 453\text{ K}$) e que o vapor escape diretamente na atmosfera, conforme acontece numa locomotiva a vapor. Isto significa que a pressão de vapor P_2 na Fig. 10.13 é igual à pressão atmosférica, à qual a temperatura de ebulição da água é de 100°C , de modo que $T_2 \approx 373\text{ K}$. Pela (10.5.13), o rendimento máximo ideal seria

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx \frac{80}{453} \approx 0,18$$

ou seja, de cada 100 calorias geradas na caldeira, somente 18 no máximo estariam produzindo trabalho útil. Na prática, o rendimento atingido seria pouco mais da metade deste valor.

A vantagem do condensador numa máquina a vapor é não somente evitar que o vapor se perca na atmosfera, permitindo reciclá-lo em circuito fechado, mas também permitir que ele seja resfriado (por exemplo, por água corrente, numa serpentina) a uma temperatura T_2 próxima da temperatura ambiente, $T_2 \sim 300\text{ K}$. Isto aumenta o rendimento ideal, no exemplo acima, para

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx \frac{153}{453} \approx 0,33$$

ou seja, permite quase duplicá-lo.

Como é difícil, na prática, utilizar uma fonte fria a temperatura menor que a ambiente, procura-se aumentar o rendimento por elevação da temperatura da fonte quente. Assim, elevando-a para 400°C, o rendimento ideal passa a $(T_1 - T_2)/T_1 \approx 370/673 \approx 55\%$. Hoje em dia, com turbinas a vapor especialmente projetadas, atingem-se rendimentos próximos de 50%. A eficiência de um motor de automóvel a gasolina é ~ 25%; a de um motor Diesel é ~ 40%.

Zero absoluto

A (10.5.6) se aplica obviamente a temperaturas T abaixo de $T_{tr} = 273,16$ K, que são definidas por

$$T = \frac{T_{tr}}{Q_{tr}} Q \tag{10.5.14}$$

onde Q é o calor transferido isotermicamente à temperatura T da fonte fria ($T < T_{tr}$) entre duas adiabáticas, num ciclo de Carnot entre T e T_{tr} .

O menor valor possível de Q , obtido fazendo $Q \rightarrow 0$, define portanto o menor valor possível de T , a *temperatura zero absoluto*. Por conseguinte, *um sistema estaria à temperatura zero absoluto se um processo isotérmico reversível nessa temperatura ocorresse sem transferência de calor ($Q = 0$)*. Logo, *no zero absoluto, isothermas e adiabáticas se confundiriam*.

Pela (10.5.13), a eficiência ideal de uma máquina térmica só poderia atingir 100% se pudéssemos utilizar como fonte fria um reservatório térmico à temperatura zero absoluto ($T_2 = 0$).

Uma série de considerações, que não podemos desenvolver aqui, levou à formulação da *3.ª lei da termodinâmica*: *Não é possível, por qualquer série finita de processos, atingir a temperatura zero absoluto*. Logo, é impossível, mesmo em princípio, existir uma máquina térmica 100% eficiente.

Temperaturas inferiores a de milikelvin ($T < 0,001$ K) já foram atingidas por técnicas especiais.

10.6 — O teorema de Clausius

Vimos na (10.5.11) que, quando uma máquina térmica executa um ciclo reversível entre dois reservatórios térmicos de temperaturas T_1 e T_2 (ciclo de Carnot), vale a relação

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \tag{10.6.1}$$

onde $Q_1 > 0$ é a quantidade de calor fornecida ao sistema pela fonte quente e $Q_2 > 0$ é a quantidade de calor fornecida *pelo* sistema à fonte fria. Esta convenção de sinal para Q_2 , conforme foi enfatizado à pág. 207, é oposta à que havia sido adotada desde a Seção 8.5 (pág. 177).

Vamos agora (e daqui por diante) voltar à convenção da Seção. 8.5, segundo a qual Q *sempre representa a quantidade de calor fornecida ao sistema*. Por conseguinte, na (10.6.1), devemos fazer a substituição $Q_2 \rightarrow -Q_2$, o que leva a

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \equiv \sum \frac{Q}{T} = 0 \\ \text{num ciclo de Carnot (reversível)} \end{array} \right. \tag{10.6.2}$$

Vamos mostrar agora que um resultado análogo vale para *qualquer ciclo reversível*, ou seja, qualquer transformação *reversível* representada por um caminho C fechado (Fig. 10.14) num diagrama (P, V) (por exemplo).

A idéia básica da demonstração consiste em reduzir C a uma sucessão de ciclos de Carnot infinitésimos, para os quais vale a (10.6.2). Como primeiro passo, vamos mostrar que se pode substituir uma pequena porção de C por um caminho formado por porções de uma isoterma e duas adiabáticas, sem alterar o trabalho ΔW e o calor ΔQ associados com essa porção de C .

Com efeito, consideremos uma pequena porção de C entre os pontos i e f , bem como as adiabáticas que passam por i e f , e seja ab (Fig. 10.15) uma porção de isoterma situada entre essas duas adiabáticas, escolhida de tal forma que a área entre o caminho $ia + ab + bf$ e o eixo dos V (sombreada na figura), que representa o trabalho ΔW_{iabf} associado a esse caminho (pág. 180), seja igual a ΔW_{if} , o trabalho associado ao arco if ao longo de C (área entre if e o eixo dos V).

Temos então, por construção,

$$\Delta W_{iabf} = \Delta W_{if} \quad (10.6.3)$$

Como a variação de energia interna $\Delta U = U_f - U_i$ é a mesma ao longo dos dois caminhos, porque só depende dos pontos inicial e final, a 1.ª lei da termodinâmica (8.5.4) dá $\Delta Q_{iabf} = \Delta Q_{if}$. Mas, como ia e bf são porções de adiabáticas, temos $\Delta Q_{ia} = \Delta Q_{bf} = 0$ de modo que fica

$$\Delta Q_{ab} = \Delta Q_{if} \quad (10.6.4)$$

ou seja, o calor transferido ao longo de if é o mesmo que ao longo da isoterma ab .

Seja S o sistema que descreve o ciclo C . Vamos introduzir um *sistema auxiliar* S' , que pode ser pensado como uma máquina de Carnot operando entre o sistema S e um reservatório térmico auxiliar à temperatura T_0 , que, para fixar as idéias, escolhemos como fonte quente, tomando T_0 superior a todas as temperaturas atravessadas por S ao percorrer o ciclo C .

Podemos imaginar C recoberto por um conjunto de adiabáticas (em linha interrompida na figura 10.16) e de isotermas (em linha cheia na Fig. 10.16), escolhidas da forma explicada na Figura 10.15.

Assim, por exemplo, para a expansão isotérmica $a \rightarrow b$ à temperatura T que substitui o pequeno trecho $i \rightarrow f$ de C , é preciso fornecer a S o calor

$$\Delta Q = \Delta Q_{ab} = \Delta Q_{if} \quad (10.6.4)$$

Para fornecer ΔQ a S , utilizamos a máquina de Carnot S' funcionando como motor térmico entre S como fonte fria, correspondendo ao trecho ab à temperatura T , e a fonte quente à temperatura $T_0 > T$. A quantidade de calor $\Delta Q'$ fornecida pela fonte quente a S' para que ela transfira ΔQ a S é dada pela (10.6.1):

$$\Delta Q' = T_0 \frac{\Delta Q}{T} \quad (10.6.5)$$

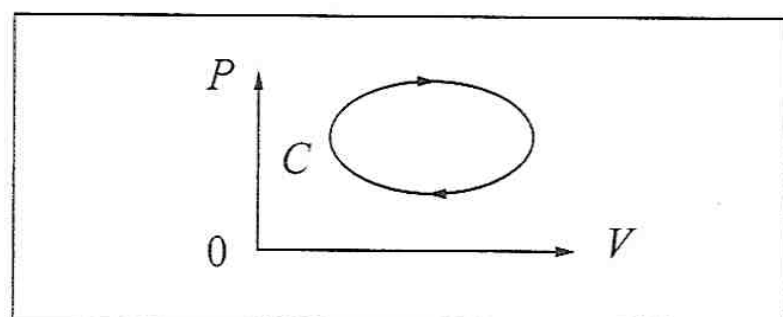


Figura 10.14 — Caminho fechado

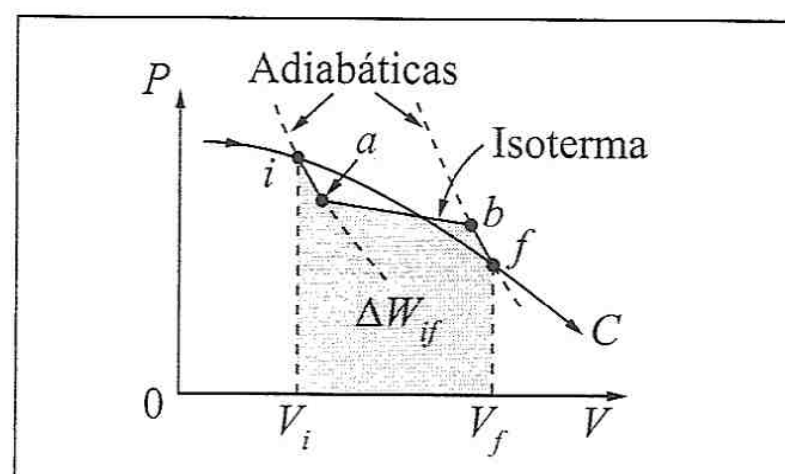


Figura 10.15 — Substituição de caminho

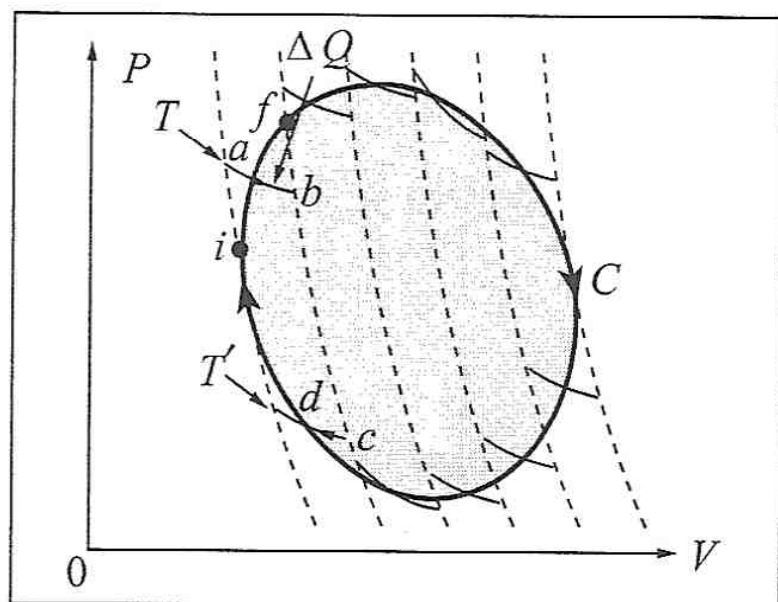


Figura 10.16 — Adiabáticas e isotermas

o que também equivale à (10.6.2), pois $-\Delta Q$ é a quantidade de calor que S' “recebe” da fonte fria S .

Num trecho como $c \rightarrow d$, percorrido em sentido oposto a $a \rightarrow b$ (Fig. 10.16), continua valendo o mesmo resultado, mas ΔQ e $\Delta Q'$ são ambos < 0 , e a máquina de Carnot S' funciona como refrigerador, entre S como fonte fria, à temperatura T' da isoterma cd , e a fonte quente à temperatura T_0 .

Se formos aumentando o número de adiabáticas que recobrem C , formando uma malha cada vez mais fina, podemos passar ao limite em que as trocas de calor são infinitesimais, com $\Delta Q \rightarrow d'Q$ (diferencial inexata), $\Delta Q' \rightarrow d'Q'$, e a quantidade *total* de calor Q' removida da fonte quente, ao longo de todo o ciclo C , é dada por

$$Q' = \sum \Delta Q' \rightarrow \oint_C d'Q'$$

onde \oint_C indica a integral ao longo do ciclo C .

Pela (10.6.5),

$$Q' = T_0 \oint_C \frac{d'Q'}{T} \quad (10.6.6)$$

Note que a temperatura T varia ao longo de cada porção infinitesimal de C , e representa sempre a dos trechos infinitesimais de isotermas pelos quais substituímos trechos correspondentes de C . Como essas isotermas fazem parte dos ciclos de Carnot da máquina de Carnot S' , podemos dizer que T é a temperatura do sistema auxiliar S' durante a transferência a S da quantidade de calor $d'Q$.

Completado o ciclo C , tanto S como S' voltaram aos seus estados iniciais, e o único efeito resultante do ciclo é remover a quantidade de calor Q' da fonte quente à temperatura T_0 e realizar uma quantidade de trabalho equivalente (área interna ao ciclo C ; cf. pág. 180). Pelo enunciado de Kelvin da 2.^a lei (pág. 207), isto só é possível se for $Q' \leq 0$, ou seja, pela (10.6.6), se

$$\oint_C \frac{d'Q}{T} \leq 0 \quad (10.6.7)$$

Se o ciclo C é reversível, o mesmo raciocínio pode ser repetido com C descrito em sentido inverso (cada $d'Q \rightarrow -d'Q$), o que dá

$$-\oint_C \frac{d'Q}{T} \leq 0 \quad (10.6.8)$$

Combinando as (10.6.7) e (10.6.8), obtemos o *teorema de Clausius*, que generaliza a (10.6.2),

$$\boxed{\oint_C \frac{d'Q}{T} = 0 \quad \text{para } C \text{ reversível}} \quad (10.6.9)$$

Para que C seja reversível, todas as trocas de calor $d'Q$ têm de ser feitas isotermicamente, como vimos, de modo que S precisa estar à temperatura T de S' durante a troca. Logo, para C reversível, T também representa a temperatura do sistema S durante a troca de calor $d'Q$.

Para demonstrar a (10.6.7), não foi utilizada a hipótese da reversibilidade de C . Ela só entrou quando passamos da (10.6.7) à (10.6.8). Logo, se C é irreversível, a (10.6.7) permanece válida, e é chamada de *desigualdade de Clausius*:

$$\boxed{\oint_C \frac{d'Q}{T} \leq 0 \quad \text{para } C \text{ irreversível}} \quad (10.6.10)$$

Neste caso, só é válida a interpretação de T como temperatura do sistema auxiliar S' durante a transferência de $d'Q$ a S . No caso irreversível, a temperatura de S pode até não ser bem definida ao longo de C .

Exemplo: Dadas uma fonte quente à temperatura T_1 e uma fonte fria à temperatura $T_2 < T_1$, vimos que o rendimento [cf. (10.3.3), (10.3.4)] de uma máquina térmica reversível (de Carnot) operando entre essas fontes é dado pela (10.5.13),

$$\eta_R = \frac{W_R}{Q_{1R}} = \frac{Q_{1R} - Q_{2R}}{Q_{1R}} = 1 - \frac{Q_{2R}}{Q_{1R}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (10.6.11)$$

onde o índice R significa “reversível”. A última igualdade resulta da (10.5.11) que, como vimos, com $Q_2 \rightarrow -Q_2$, equivale à (10.6.2), ou seja, ao teorema de Clausius neste caso.

Vimos também que a eficiência η_I de uma máquina térmica real, como uma máquina a vapor, por exemplo, é sempre menor (na prática, bem menor) que η_R , devido à irreversibilidade, ou seja, (o índice I significando “irreversível”),

$$\eta_I = \frac{W_I}{Q_{1I}} = \frac{Q_{1I} - Q_{2I}}{Q_{1I}} = 1 - \frac{Q_{2I}}{Q_{1I}} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (10.6.12)$$

Isto significa, por exemplo, que a máquina real, funcionando como motor térmico, produz menos trabalho que a ideal (de Carnot), para a mesma quantidade de calor removida da fonte quente (se $Q_{1I} = Q_{1R}$, tem-se $W_I < W_R$, ou seja, uma quantidade de calor $Q_{2I} > Q_{2R}$ é desperdiçada).

A (10.6.12) equivale a

$$\frac{Q_{2I}}{Q_{1I}} > \frac{T_2}{T_1} \left\{ \frac{Q_{2I}}{T_2} > \frac{Q_{1I}}{T_1} \right. \quad (10.6.13)$$

na notação em que $Q_{2I} > 0$. Voltando à convenção da Seção 8.5, com $Q_{2I} \rightarrow -Q_{2I}$, a (10.6.13) fica

$$-\frac{Q_{2I}}{T_2} > \frac{Q_{1I}}{T_1} \left\{ \frac{Q_{1I}}{T_1} + \frac{Q_{2I}}{T_2} < 0 \right. \quad (10.6.14)$$

o que ilustra a desigualdade de Clausius (10.6.10) neste caso

10.7 — Entropia. Processos reversíveis

A consequência mais importante do teorema de Clausius é a existência de uma nova função de estado associada a um estado de equilíbrio termodinâmico de um sistema, a *entropia*. Da mesma forma que a 1.ª lei da termodinâmica corresponde à existência da energia interna U como função de estado, a 2.ª lei corresponde à existência da entropia.

Sejam i e f dois estados de equilíbrio termodinâmico de um sistema. Em geral, podemos passar de i para f por diferentes caminhos (processos), como 1 e 2 na Fig. 10.17. Vamos supor esses caminhos reversíveis, o que denotaremos indicando por $d'Q_R$ (R = reversível) as trocas de calor infinitésimas ao longo deles.

Decorre então do teorema de Clausius o seguinte resultado:

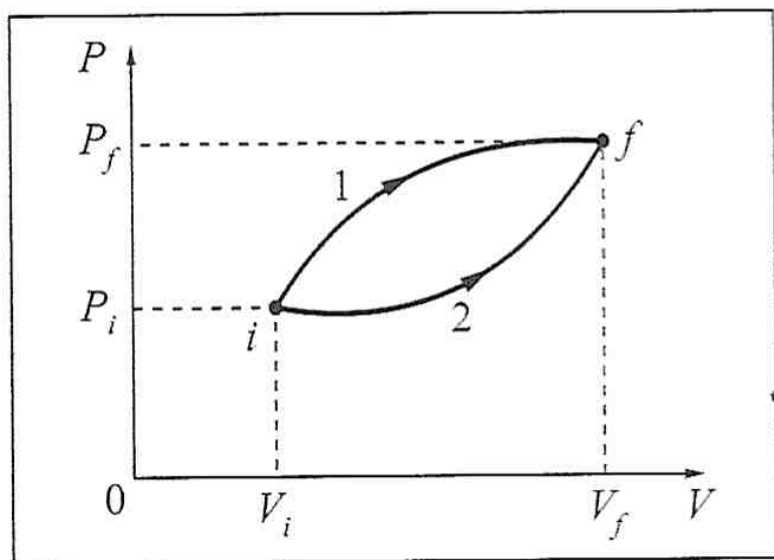


Figura 10.17 — Caminhos reversíveis

sus (10.6.9) dá

A integral

$$\int_i^f \frac{d'Q_R}{T}$$

tem o mesmo valor para todos os caminhos reversíveis que ligam os estados de equilíbrio termodinâmico i e f .

Com efeito, se formos de i para f pelo caminho 1 e voltamos de f para i pelo caminho 2, teremos descrito um ciclo reversível, de modo que o teorema de Clau-

$$\int_{(1) i}^f \frac{d'Q_R}{T} + \int_{(2) f}^i \frac{d'Q_R}{T} = 0 \quad (10.7.1)$$

onde os índices (1) e (2) à esquerda das integrais indicam qual é o caminho reversível empregado. Como

$$\int_{(2) f}^i \frac{d'Q_R}{T} = - \int_{(2) i}^f \frac{d'Q_R}{T} \quad (10.7.2)$$

a (10.7.1) equivale a

$$\boxed{\int_{(1) i}^f \frac{d'Q_R}{T} = \int_{(2) i}^f \frac{d'Q_R}{T}} \quad (10.7.3)$$

Como 1 e 2 são dois caminhos reversíveis quaisquer, concluímos que a integral é independente do caminho, o que demonstra o resultado.

Voltamos portanto a ter uma situação análoga à da energia potencial na mecânica (1, Seção 7.3) e da energia interna (Seção 8.5), o que nos permite, como naqueles casos, definir uma função de estado do sistema, cujo valor é definido a menos de uma constante aditiva arbitrária. Como a integral só depende dos extremos i e f , se escolhermos um estado inicial padrão ela passa a depender somente de f , que podemos identificar com o estado de equilíbrio termodinâmico do sistema para o qual queremos calcular o valor da função. A arbitrariedade da escolha do estado padrão i corresponde à constante aditiva arbitrária: mudar i equivale a adicionar uma constante aos valores da função.

Podemos escrever portanto

$$\boxed{\int_i^f \frac{d'Q_R}{T} = S_f - S_i} \quad (10.7.4)$$

onde S é a nova função de estado, introduzida por Clausius e por ele denominada de *entropia* (do grego “transformação”). A unidade de entropia no sistema MKS é o joule por grau Kelvin, J/K (também se emprega cal/K).

Para um fluido homogêneo, por exemplo, cujo estado é definido por qualquer par das

variáveis (P, V, T), dizer que S é uma função de estado equivale a dizer que, como na (8.5.3), podemos considerar S como função de qualquer desses pares:

$$\boxed{S = S(P, V); \quad S = S(P, T); \quad S = S(V, T)} \quad (10.7.5)$$

Se a variação $\Delta S = S_f - S_i$ é infinitesimal, a (10.7.4) se escreve

$$\boxed{dS = \frac{d'Q_R}{T}} \quad (10.7.6)$$

onde $d'Q_R$ é a quantidade de calor infinitesimal fornecida ao sistema num processo reversível à temperatura T . Note-se que $d'Q_R$ é uma diferencial inexata (cf. pág. 181), ao passo que dS , como dU , é uma diferencial exata (dS é a diferencial da função S). Como se passa de $d'Q_R$ a dS multiplicando por $1/T$, diz-se que $1/T$ é um fator integrante para a diferencial inexata $d'Q_R$ (veremos exemplos abaixo).

A (10.7.6) pode ser considerada como uma formulação diferencial da 2.^a lei, da mesma forma que a (8.6.6),

$$dU = d'Q - d'W \quad (10.7.7)$$

é uma formulação diferencial da 1.^a lei (que leva a uma diferencial exata por subtração de $d'Q$ de outra diferencial inexata, $d'W$).

Vimos na (8.6. 1) que, para uma transformação reversível num fluido,

$$d'W_R = PdV \quad (10.7.8)$$

de modo que, neste caso,

$$\boxed{d'Q_R = dU + PdV} \quad (10.7.9)$$

Casos particulares:

(I) Transformação adiabática reversível

É caracterizada por

$$\boxed{d'Q_R = 0} \quad (10.7.10)$$

Logo, a (10.7.4) dá

$$\boxed{\Delta S = S_f - S_i = 0} \quad (\text{adiabática reversível}) \quad (10.7.11)$$

ou seja, a entropia não muda numa transformação adiabática reversível. Por isso, uma tal transformação também se chama *isentrópica* (a entropia constante). Esta é a explicação do índice S colocado na derivada parcial $\partial P/\partial \rho$ no cálculo da velocidade do som (6.2.14).

(II) Variação de entropia numa transição de fase

Durante uma transição de fase, como a vaporização (pág. 217) ou a fusão, a pressão e a temperatura permanecem constantes, até que toda a massa m da substância se tenha vaporizado ou fundido. Se T é a temperatura de transição (ponto de ebulição, ponto de fusão) à pressão considerada, a transição pode ser efetuada como um processo isotérmico reversível, em que o calor é transferido por um reservatório térmico à temperatura T , e a (10.7.4) dá

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{1}{T} \int_i^f d'Q_R = \frac{\Delta Q_R}{T} \quad (10.7.12)$$

O *calor latente* l é a quantidade de calor por unidade de massa necessária para efetuar a transição. Logo, para uma massa m , temos $\Delta Q_R = ml$, e a (10.7.12) fica

$$\boxed{\Delta S = \frac{ml}{T}} \quad (10.7.13)$$

Por exemplo, o calor latente de fusão do gelo à pressão de 1 atm (temperatura de fusão 0°C) é de 79,6 cal/g, de modo que a fusão de 1 kg de gelo produz uma variação de entropia

$$\Delta S = S_{\text{água}} - S_{\text{gelo}} = \frac{79,6 \times 10^3}{273} \text{ cal/K} \approx 292 \text{ cal/K} \approx 1220 \text{ J/K}$$

(III) Fluido incompressível, sem dilatação

Se a temperatura de um fluido incompressível, a volume constante, varia de T_i para T_f , qual é a variação correspondente ΔS de entropia?

Seja C a capacidade térmica do sistema, que vamos supor *constante* no intervalo de temperatura (T_i , T_f), o volume e a pressão permanecendo constantes. Temos então, para uma variação de temperatura dT ,

$$d'Q_R = CdT \quad (10.7.14)$$

Para que o processo seja reversível, as variações de temperatura têm de ser efetuadas da forma descrita na Seção 8.6 (pág. 178). A (10.7.4) dá então

$$\Delta S = S_f - S_i = C \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = C \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \quad (10.7.15)$$

de modo que podemos tomar, neste caso,

$$\boxed{S = C \ln T + \text{constante}} \quad (10.7.16)$$

(IV) Entropia de um gás ideal

Vamos calcular a *entropia molar*, ou seja, a entropia *por mol*, que indicaremos por s . Combinando as (10.7.6) e (10.7.9), vem

$$\boxed{dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T}} \quad (10.7.17)$$

o que vale para qualquer fluido. Para 1 mol de um gás ideal, temos pela (9.3.11),

$$dU = C_v(T)dT \quad (10.7.18)$$

onde C_v é a capacidade térmica *molar* a volume constante.

A equação de estado (9.1.13) dos gases ideais, para 1 mol, dá

$$PV = RT \quad (10.7.19)$$

e, diferenciando,

$$PdV + VdP = RdT \quad (10.7.20)$$

Temos agora várias opções, conforme o par de variáveis em função das quais queiramos exprimir S [cf. (10.7.5)].

(a) S como função de (V, T) :

Substituindo as (10.7.18) e (10.7.19) na (10.7.17), obtemos para a entropia molar

$$ds = \frac{C_v(T)}{T} dT + R \frac{dV}{V} \quad (10.7.21)$$

que é efetivamente uma *diferencial exata*, e dá

$$s_f - s_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_v(T)}{T} dT + R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

ou seja,

$$\boxed{s_f - s_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_v(T)}{T} dT + R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)} \quad (10.7.22)$$

O fato de que ds é uma diferencial exata é uma ilustração do teorema de Clausius, mostrando que $1/T$ é efetivamente um fator integrante (pág. 223). Assim, embora PdV seja uma diferencial inexata, $PdV/T = RdV/V$ é uma diferencial exata.

Se $C_v =$ constante no intervalo de temperatura (T_i, T_f) (cf. pág. 198), a (10.7.22) fica

$$s_f - s_i = C_v \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = C_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (10.7.23)$$

Logo, a *entropia molar de um gás ideal*, como função de V e T , é

$$\boxed{s(V, T) = C_v \ln T + R \ln V + \text{constante}} \quad (10.7.24)$$

Note que, para n moles, os 2.ºs membros tanto da (10.7.18), como da (10.7.19) teriam de ser multiplicados por n , de modo que

$$S(V, T) = ns(V, T) \quad (n \text{ moles}) \quad (10.7.25)$$

ou seja, a entropia é uma *grandeza extensiva*, proporcional à massa do sistema [cf. (10.7.13), (10.7.16)]. O volume V é outro exemplo de grandeza extensiva, ao passo que variáveis como P e T são grandezas *intensivas*, cujos valores em equilíbrio termodinâmico permanecem os mesmos se se amplia ou reduz o tamanho do sistema.

(b) S como função de (P, T)

Para exprimir ds em função de dT e dP , basta eliminar dV na (10.7.17), com o auxílio da (10.7.20), que dá

$$PdV = VdP + RdT$$

e, levando na (10.7.17),

$$ds = \frac{C_v + R}{T} dT - \underbrace{\frac{V}{T}}_{=R/P \text{ pela (10.7.19)}} dP$$

ou, lembrando a fórmula de Mayer (9.3.9),

$$ds = \frac{C_P(T)}{T} dT - R \frac{dP}{P} \quad (10.7.26)$$

que é uma diferencial exata, e dá

$$s_f - s_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_P(T)}{T} dT - R \int_{P_i}^{P_f} \frac{dP}{P}$$

ou seja,

$$s_f - s_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_P(T)}{T} dT - R \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (10.7.27)$$

Se a capacidade térmica molar a pressão constante não varia no intervalo (T_i, T_f) isto dá

$$s_f - s_i = C_P \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - R \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (10.7.28)$$

ou seja,

$$s(P, T) = C_P \ln T - R \ln P + \text{constante} \quad (10.7.29)$$

Esta relação também decorre imediatamente da (10.7.24), substituindo nela $V = RT/P$.

(c) S como função de (P, V)

Substituindo na (10.7.24) T por PV/R , obtemos

$$s(P, V) = C_V \ln(PV) + R \ln V + \text{constante} = C_V \ln P + \underbrace{(C_V + R)}_{C_P} \ln V + \text{constante}$$

ou seja,

$$s(P, V) = C_V \left(\ln P + \underbrace{\frac{C_P}{C_V}}_{=\gamma(9.4.8)} \ln V \right) + \text{constante} = C_V (\ln P + \underbrace{\gamma \ln V}_{\ln(V^\gamma)}) + \text{constante}$$

Finalmente,

$$s(P, V) = C_V \ln(PV^\gamma) + \text{constante} \quad (10.7.30)$$

Lembrando a (9.4.9), esta expressão mostra explicitamente que um processo adiabático reversível é *isentrópico* (10.7.11), ou seja, que a entropia não se altera num tal processo.

10.8 — Variação de entropia em processos irreversíveis

Se um sistema sofre uma transformação *irreversível* de um estado inicial i a um estado final f , onde i e f são estados de equilíbrio termodinâmico, qual é a variação de entropia correspondente?

Por definição, ela é dada pela (10.7.4):

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{d'Q_R}{T} \quad (10.8.1)$$

Logo, para calcular $S_f - S_i$, é preciso imaginar um processo reversível que leve de i a f (pois na (10.8.1) dQ_R é uma troca de calor num processo reversível à temperatura T) e calcular a (10.8.1) usando esse processo. Qualquer processo reversível pode ser usado, pois o resultado independe dele: só depende dos estados i e f . Na prática, nem sempre é fácil imaginar um tal processo reversível.

Se a variação de entropia de um sistema ao passar de i para f é a mesma quer ele passe de i a f por um processo reversível ou irreversível, o que caracteriza a diferença entre estas duas situações? Conforme veremos adiante, embora a variação da entropia do sistema seja a mesma nos dois casos, isto não é verdade para a vizinhança do sistema.

(i) Expansão livre

Numa expansão livre, como vimos (págs. 178, 184), um gás passa de um volume inicial V_i a um volume final $V_f > V_i$ sem realizar trabalho externo ($\Delta W = 0$) e sem trocar calor, pois a experiência é realizada num recipiente de paredes adiabáticas ($\Delta Q = 0$), de modo que $\Delta U = 0$.

Em particular, numa expansão livre infinitésima, a (8.6.6) dá

$$d'Q = 0; \quad d'W = 0; \quad dU = d'Q - d'W = 0 \quad (10.8.2)$$

embora seja $PdV > 0$, o que ilustra a diferença entre $d'W$ e $d'W_R = PdV$ [cf. (10.7.8)].

Para calcular $\Delta S = S_f - S_i$, temos de imaginar uma expansão reversível de V_i a V_f na qual $\Delta U = U_f - U_i = 0$. Para um gás ideal, isto equivale a $\Delta T = 0$, de modo que a expansão reversível deve ser isotérmica ($T_f = T_i$). Logo, ΔS é dado pelas (10.7.23) e (10.7.25), com $T_f = T_i$:

$$\Delta S = S_f - S_i = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) > 0 \quad (10.8.3)$$

Por exemplo, se o gás dobra de volume ($V_f = 2V_i$), é $\Delta S = nR \ln 2$.

Note que, pela (10.7.6),

$$d'Q_R = TdS > 0 \quad (10.8.4)$$

no processo reversível (expansão isotérmica), ao passo que $d'Q = 0$ na expansão livre (10.8.2), o que ilustra a diferença entre $d'Q$ e $d'Q_R$.

(ii) Difusão de um gás em outro

Quando destampamos um frasco de perfume, o cheiro se espalha gradualmente pelo ambiente, por um processo de difusão do vapor de perfume na atmosfera. Este processo é irreversível: o vapor não volta espontaneamente a recolher-se no frasco.

A Fig. 10.18 ilustra um exemplo simples do processo de difusão. Se, para $t = 0$, perfuramos o diafragma que separa o gás A do gás B, eles se difundem um no outro até que uma mistura homogênea dos dois gases ocupe todo o volume disponível $2V$.

Podemos pensar neste processo como sendo equivalente à expansão livre do gás A de V para $2V$ (embora se tenha o gás B, e não o vácuo, no outro recipiente) ao mesmo tempo em que o gás B sofre uma

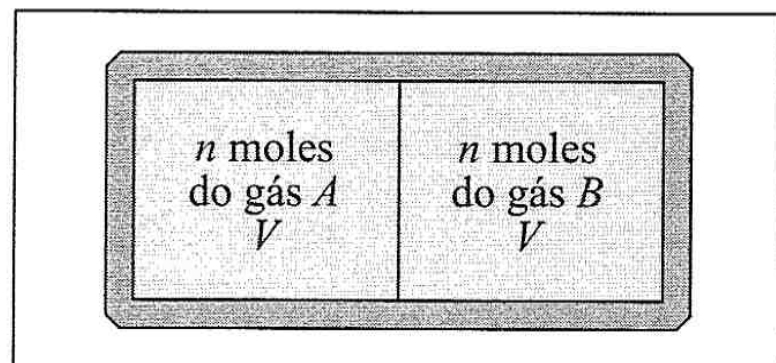


Figura 10.18 — Difusão

expansão livre de V para $2V$, o que daria, pela (10.8.3),

$$\Delta S = nR \ln 2 + nR \ln 2 = 2nR \ln 2 > 0 \quad (10.8.5)$$

Pode-se justificar este resultado construindo um processo reversível para calcular ΔS (o que não é simples). Resulta também da teoria cinética dos gases (Cap. 11) que, numa mistura de gases ideais, cada um se comporta como se ocupasse sozinho todo o volume ocupado pela mistura (ou seja, como se os outros não estivessem presentes), o que justifica a analogia feita com expansão livre.

(iii) Condução do calor

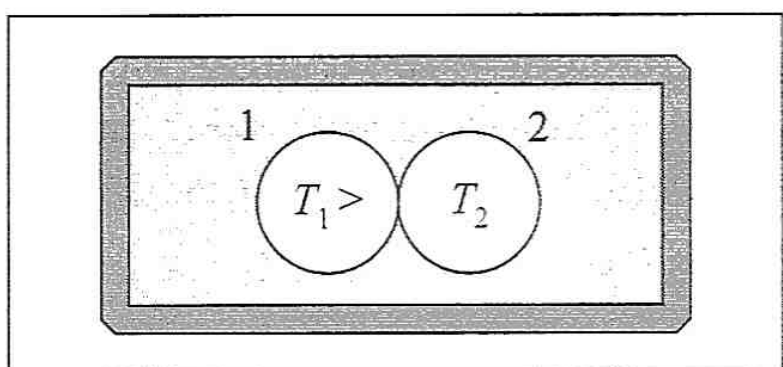


Figura 10.19 — Contato térmico

Suponhamos que dois corpos 1 e 2 a temperaturas diferentes, com $T_1 > T_2$, são colocados em contato térmico (Fig. 10.19) dentro de um recipiente de paredes adiabáticas. Sabemos que o calor flui de 1 para 2, e que se trata de um processo irreversível.

Para calcular a variação de entropia associada à transferência de uma quantidade infinitésima de calor, é preciso imaginá-la efetuada de forma reversível. Podemos remover reversivelmente uma quantidade de calor $d'Q_R$ de 1 à temperatura T_1 por contato térmico com um reservatório a essa temperatura e transferir $d'Q_R$ para 2 pelo mesmo método, utilizando um reservatório à temperatura T_2 . A variação de entropia associada a essa transferência é

$$dS = dS_1 + dS_2 = -\frac{d'Q_R}{T_1} + \frac{d'Q_R}{T_2} = d'Q_R \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \quad (10.8.6)$$

Se os dois corpos têm a mesma massa m e o mesmo calor específico c , sabemos que, quando for atingido o equilíbrio térmico, a temperatura final comum será (por quê?)

$$T_f = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad (10.8.7)$$

Para calcular a variação de entropia do sistema entre a situação inicial e a final, basta baixar a temperatura de 1 de $T_1 \rightarrow T_f$ e elevar a de 2 de $T_2 \rightarrow T_f$ por um processo reversível. Isto pode ser feito através de contatos térmicos com uma sucessão de reservatórios cuja temperatura varia gradualmente (por gradações infinitésimas) entre os extremos, como explicado à pág. 181. O cálculo é semelhante ao do exemplo (III) da pág. 224, com $d'Q_R = mcdT$:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{d'Q_R}{T} + \int_{T_2}^{T_f} \frac{d'Q_R}{T} \\ &= mc \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} + mc \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \left[\ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + \ln \left(\frac{T_f}{T_2} \right) \right] \\ &= mc \ln \left(\frac{T_f^2}{T_1 T_2} \right) = 2mc \ln \left(\frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} \right) \end{aligned} \quad (10.8.8)$$

Substituindo T_f pela (10.8.7), vem finalmente:

$$\Delta S = 2mc \ln \left[\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} \right] > 0 \quad (10.8.9)$$

pois a média aritmética, com $T_1 \neq T_2$, é sempre maior que a média geométrica.

A (10.8.9) também dá a variação de entropia quando se *misturam* duas massas iguais m do mesmo fluido de calor específico c , inicialmente a temperaturas diferentes T_1 e T_2 . A temperatura final ainda é dada pela (10.8.7), e a (10.7.15) leva ao mesmo resultado.

Exemplo: Mistura-se 1 l de água a 270°C com 1 l de água a 90°C. Qual é a variação de entropia?

Neste caso, $m = 1$ kg, $c = 1$ kcal/kgK = $4,186 \times 10^3$ J/kg K, $T_2 = 300$ K, $T_1 = 363$ K, e a (10.8.9) dá

$$\Delta S = 2 \times 4,186 \times 10^3 \ln \left(\frac{331,5}{330} \right) \text{ J/K} \approx 38 \text{ J/K}$$

10.9 — O princípio do aumento da entropia

Voltemos agora à desigualdade de Clausius (10.6.10):

$$\oint_C \frac{d'Q}{T} \leq 0 \quad C \text{ irreversível} \quad (10.9.1)$$

onde T é a temperatura do corpo que transfere $d'Q$ ao sistema considerado.

Quando C é reversível, a integral se anula. Quando a integral se anula, não existe nenhuma razão *termodinâmica* para que C não seja reversível, embora possa ser difícil, na prática, inverter o ciclo. Por isto, vamos identificar a irreversibilidade com um valor *negativo* da integral:

$$\oint_C \frac{d'Q}{T} < 0 \quad C \text{ irreversível} \quad (10.9.2)$$

Sejam agora (R) e (I) dois caminhos diferentes, o 1.º *reversível* e o 2.º *irreversível*, ligando dois estados de equilíbrio termodinâmico (Fig. 10.20, onde I foi representado em pontilhado, porque não precisa passar por estados de equilíbrio). Então, $iRf + fIi$ define um ciclo C *irreversível* e a (10.9.2) dá

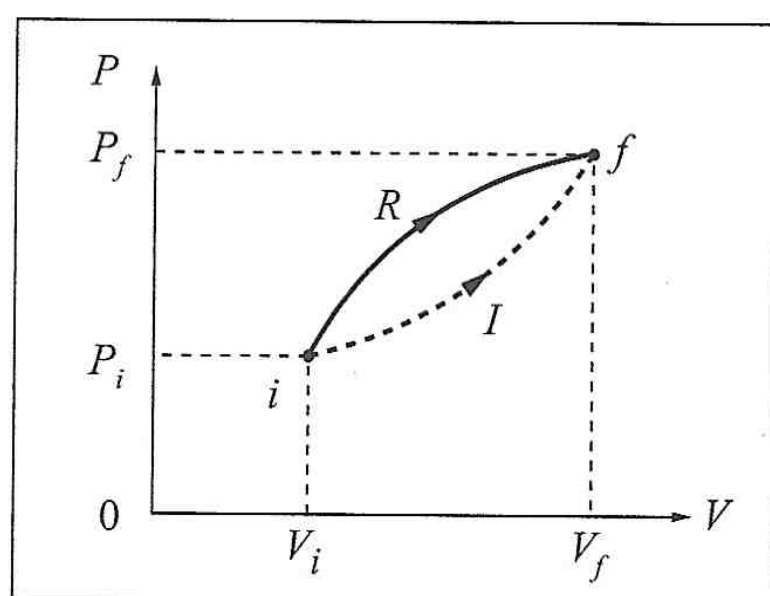


Figura 10.20 — Caminhos reversível e irreversível

$$\int_{(I) i}^f \frac{d'Q}{T} + \int_{(R) f}^i \frac{d'Q_R}{T} = \int_{(I) i}^f \frac{d'Q}{T} - \int_{(R) i}^f \frac{d'Q_R}{T} = \int_{(I) i}^f \frac{d'Q}{T} - (S_f - S_i) < 0 \quad (10.9.3)$$

onde invertemos o sentido de (R) com troca de sinal, o que é permitido graças à reversibilidade de (R) , e utilizamos a (10.7.4).

A (10.9.3) dá

$$\int_{(I) i}^f \frac{d'Q}{T} < S_f - S_i = \Delta S \quad I \text{ irreversível} \quad (10.9.4)$$

ou, de forma mais geral,

$$\int_i^f \frac{d'Q}{T} \leq S_f - S_i = \Delta S \begin{cases} (< \text{ se irreversível}) \\ (= \text{ se reversível}) \end{cases} \quad (10.9.5)$$

Em forma diferencial,

$$d'Q \leq TdS \quad (10.9.6)$$

onde o sinal de $=$ só vale para $d'Q_R$ [cf. (10.7.6)].

Em particular, para um *sistema termicamente isolado*, ou seja, um sistema contido dentro de um recipiente de paredes adiabáticas, temos

$$d'Q = 0 \quad (10.9.7)$$

(não há trocas de calor com o exterior), e a (10.9.6) ou (10.9.5) dá

$$\Delta S \geq 0 \quad \text{sistema isolado} \quad (10.9.8)$$

que é o *princípio do aumento da entropia*: A entropia de um sistema termicamente isolado nunca pode decrescer: não se altera quando ocorrem processos reversíveis, mas aumenta quando ocorrem processos irreversíveis.

Exemplos: Vimos na Seção 10.8, (i), (ii) e (iii), diversos exemplos de processos irreversíveis em sistemas termicamente isolados. Em todos os casos, calculamos ΔS e mostramos que $\Delta S > 0$ [cf. (10.8.3), (10.8.5), (10.8.6) e (10.8.9)].

Num sistema isolado, é o princípio de aumento da entropia que permite dizer em que sentido devem ocorrer os processos naturais, ou seja, aqueles que se produzem espontaneamente na natureza (Seção 10.1): é sempre no sentido em que a entropia do sistema isolado *aumenta*. Assim, na expansão livre, o gás tende a ocupar todo o volume disponível; dois gases diferentes se misturam (difusão mútua); o calor passa de um corpo a temperatura mais alta para outro a temperatura mais baixa (condução).

O atrito sempre tende a *frear* corpos em movimento, convertendo energia cinética em calor (Seção 10.1), porque este é o sentido em que a entropia aumenta, com $d'Q > 0 \Rightarrow dS > 0$, ou seja, com geração de calor a partir de energia mecânica.

Como consequência do princípio de aumento da entropia, o *estado de equilíbrio de um sistema isolado é o estado de entropia máxima*.

Podemos sempre procurar ampliar o sistema considerado acrescentando-lhe uma vizinhança suficientemente ampla para que o conjunto sistema + vizinhança constitua, com boa aproximação, um sistema isolado. Assim, para experiências na escala terrestre, seria em geral amplamente suficiente abarcar como vizinhança todo o sistema solar. O sistema isolado obtido quando se amplia suficientemente a vizinhança para que sejam levadas em conta *todas* as variações de entropia resultantes de um dado processo costuma ser chamado de “universo”. Este nome *não* tem a conotação de universo no sentido cosmológico (ao qual, aliás, os

resultados não seriam estritamente aplicáveis); conforme mencionado acima, o “universo” pode ser identificado com o sistema solar para a maioria dos processos na escala terrestre. Com este entendimento, a (10.9.8) se aplica ao “universo”, e o princípio de aumento da entropia tem a seguinte formulação: *A entropia do universo nunca decresce: não é afetada por processos reversíveis e cresce em processos irreversíveis.*

Neste sentido, quando um sistema troca (recebe ou fornece) reversivelmente calor $d'Q_R$ com um reservatório à temperatura T , a entropia do sistema varia de $d_1S = d'Q_R/T$ (> 0 ou < 0 conforme o sinal de $d'Q_R$), mas, em compensação, a entropia do reservatório (vizinhança) varia de $d_2S = -d'Q_R/T$, de modo que a entropia do universo não é alterada por este processo reversível:

$$dS = d_1S + d_2S = d'Q_R / T - d'Q_R / T = 0$$

É sempre possível *diminuir* a entropia de um dado sistema à custa de um *aumento* no *mínimo equivalente* da entropia da vizinhança desse sistema.

O *princípio do aumento da entropia* é *equivalente* à 2.^a lei da termodinâmica. Com efeito, vimos que ele decorre da 2.^a lei, e é fácil ver que a 2.^a lei decorre dele. *Enunciado de Clausius*: Se fosse possível realizar um processo cujo *único* efeito fosse transferir calor ΔQ de um corpo mais frio (temperatura T_2) a um corpo mais quente (temperatura T_1), a variação de entropia do universo seria

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_2} + \frac{\Delta Q}{T_1} = \underbrace{\Delta Q}_{>0} \overbrace{\frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2}}^{<0} < 0$$

contradizendo portanto o princípio do aumento da entropia. *Enunciado de Kelvin*: Se existisse um processo cujo *único* efeito fosse remover calor ΔQ de um único reservatório à temperatura T , convertendo-o em trabalho, a variação de entropia do universo correspondente seria

$$\Delta S = -\Delta Q / T < 0$$

violando o princípio do aumento da entropia.

Degradação da energia

Podemos agora responder à pergunta colocada à pag. 227: se a variação de entropia de um sistema ao passar de um estado de equilíbrio i para outro estado de equilíbrio f é a mesma quer isso ocorra por um processo reversível ou irreversível, que diferença isto faz?

O princípio do aumento da entropia mostra que a diferença está no *aumento da entropia do universo* no caso irreversível. Do ponto de vista prático, conforme vamos ver, isto corresponde em geral a um *desperdício de energia* que, em princípio, poderia ter sido utilizada.

Com efeito, comparemos por exemplo, a expansão livre de um gás ideal de V_i a V_f (processo irreversível), com sua expansão isotérmica reversível do mesmo estado inicial ao mesmo estado final (Seção 10.8(i)).

Na expansão isotérmica, que utilizamos para calcular a variação de entropia (10.8.3), o gás realiza um trabalho $W_{i \rightarrow f}$ dado pela (9.1.15):

$$W_{i \rightarrow f} = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \Delta Q \quad (10.9.9)$$

que é igual ao calor ΔQ absorvido do reservatório na expansão ($\Delta U = 0$). Como o processo é reversível, o que indicaremos pelo índice superior R , ΔS^R (vizinhança) = ΔS^R (reservatório) = $-\Delta S^R$ (gás), de modo que

$$\Delta S^R \text{ (universo)} = \Delta S^R \text{ (gás)} + \Delta S^R \text{ (vizinhança)} = 0$$

(10.9.10)

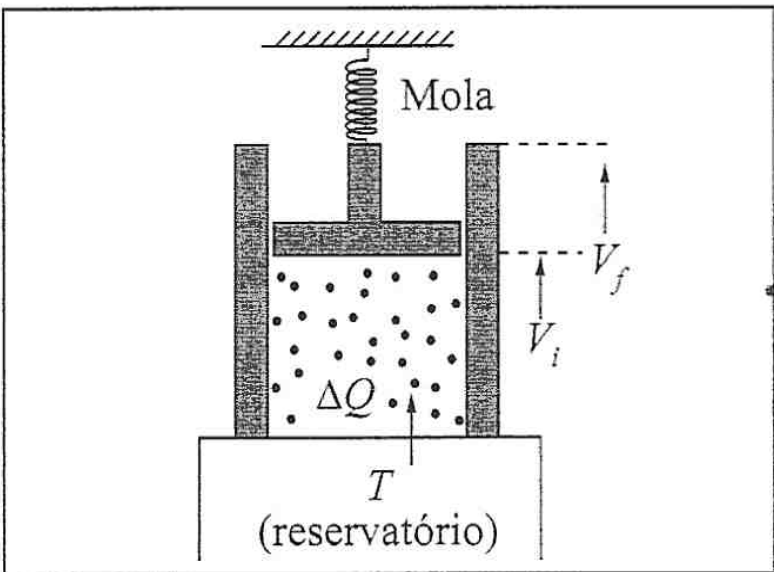


Figura 10.21 — Expansão reversível

O trabalho $W_{i \rightarrow f}$ na expansão reversível pode em princípio ser utilizado para levantar um peso ou para comprimir uma mola (Fig. 10.21), onde fica armazenado sob a forma de energia potencial e pode ser reconvertido em trabalho mecânico.

No processo irreversível de expansão livre, não há troca de calor com a vizinhança, de modo que ($I =$ irreversível)

$$\Delta S^I \text{ (vizinhança)} = 0$$

(10.9.11)

ao passo que

$$\Delta S^I \text{ (gás)} = \Delta S^R \text{ (gás)} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

(10.9.12)

pela (10.8.3). Logo,

$$\Delta S^I \text{ (universo)} = \Delta S^R \text{ (gás)} + \Delta S^I \text{ (vizinhança)} = \Delta S^R \text{ (gás)} > 0$$

(10.9.13)

e não é realizado trabalho na expansão livre ($W_{i \rightarrow f} = 0$).

Logo, no caso irreversível, é desperdiçada uma quantidade de trabalho [cf. (10.9.9), (10.9.12)]

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta Q = T \Delta S^I \text{ (universo)}$$

(10.9.14)

que poderia ter sido utilizada se a transformação tivesse sido efetuada de forma reversível. O aumento de entropia do universo no processo irreversível reflete uma degradação de energia.

Considerações análogas se aplicam a outros processos irreversíveis. Na condução de calor, quando dois corpos em contato térmico equilibram sua temperatura, está havendo degradação de energia, pois poderíamos utilizar a diferença de temperatura para acionar um motor térmico, cujo rendimento seria máximo no caso reversível (máquina de Carnot). No caso de atrito, a dissipação de energia mecânica pela conversão em calor é óbvia.

Esta é a conexão entre a 2.^a lei da termodinâmica e os esforços no sentido de evitar o desperdício de energia (questão (v) da Seção 10.1).

No Capítulo 12, discutiremos a interpretação microscópica da entropia, que permite compreender de forma mais aprofundada a conexão entre a 2.^a lei da termodinâmica e o problema da “seta do tempo”.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 10

1. Demonstre que duas adiabáticas nunca podem se cortar. *Sugestão:* Supondo que isto fosse possível, complete um ciclo com uma isoterma e mostre que a 2.^a lei da termodinâmica seria violada se um tal ciclo existisse.
2. Uma usina termoeleétrica moderna opera com vapor de água superaquecido, a temperaturas da ordem de 500°C, e é resfriada com água de rio, tipicamente a 20°C. Devido a inúmeros tipos de perdas, a eficiência máxima que se consegue atingir na prática é da ordem de 40%. Que fração da eficiência máxima idealmente possível para esses valores isto representa?

3. Chama-se *coeficiente de desempenho* K de um refrigerador a razão Q_2/W , onde Q_2 é a quantidade de calor removida da fonte fria (congelador) e W o trabalho fornecido pelo compressor, por ciclo de refrigeração. (a) Para um refrigerador de Carnot ideal, exprima K em função das temperaturas T_1 e T_2 das fontes quente e fria, respectivamente. (b) Exprima K em função da eficiência da máquina de Carnot obtida operando o refrigerador em sentido inverso. (c) Um dado refrigerador doméstico tem coeficiente de desempenho 40% do ideal; o motor do compressor tem 220W de potência e o congelador é mantido a -13°C . Para uma temperatura ambiente de 27°C , qual é a quantidade de calor removida do congelador, em 15 min de funcionamento do motor? Que quantidade de gelo ela permitiria formar, partindo de água a uma temperatura próxima de 0°C ? O calor latente de fusão do gelo é 80 cal/g.

4. Um mol de um gás ideal diatômico ($\gamma = 7/5$) descreve o ciclo ABCDA (Fig. P.1), onde P é medido em bar e V em l. (a) Calcule a temperatura nos vértices. (b) Calcule a eficiência de um motor térmico operando segundo esse ciclo. (c) Compare o resultado (b) com a eficiência máxima ideal associada às temperaturas extremas do ciclo.

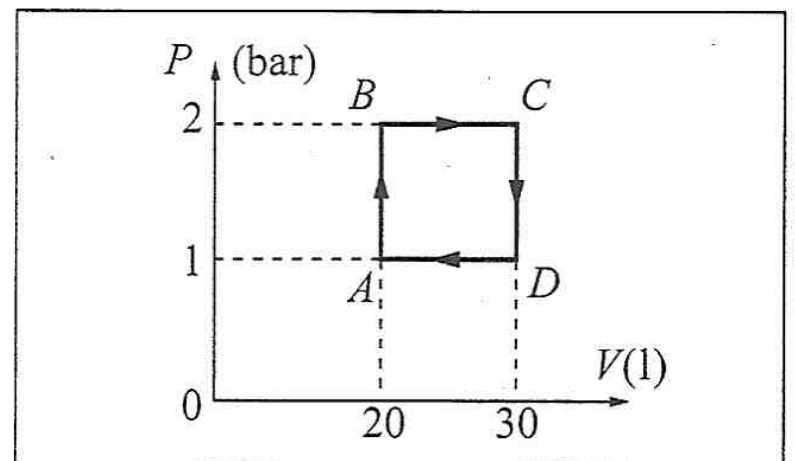


Figura P.1

5. Um gás ideal com $\gamma = 5/3$ sofre uma expansão isotérmica em que seu volume aumenta de 50%, seguida de uma contração isobárica até o volume inicial e de aquecimento, a volume constante, até a temperatura inicial. (a) Calcule o rendimento deste ciclo. (b) Compare o resultado com o rendimento de um ciclo de Carnot que opere entre as mesmas temperaturas extremas.

6. Um gás ideal de coeficiente adiabático γ é submetido ao ciclo ABCA da Fig. P.2, onde AB é um segmento de reta. (a) Calcule o rendimento. (b) Mostre que ele é menor do que o rendimento de um ciclo de Carnot operando entre as mesmas temperaturas extremas.

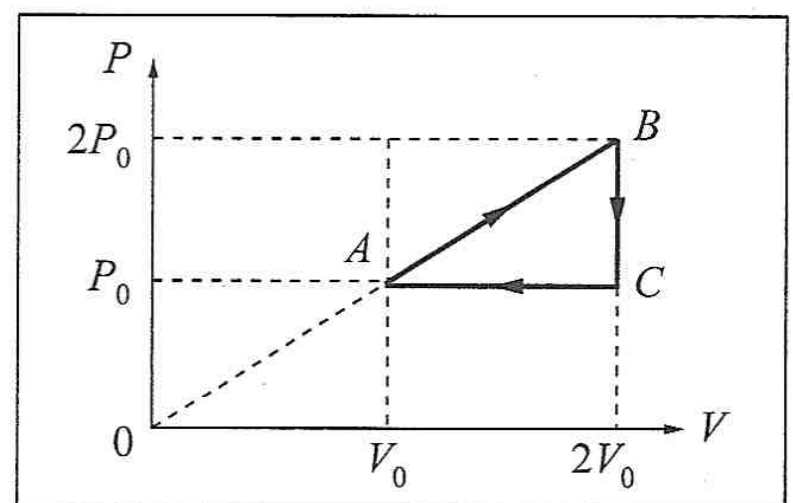


Figura P.2

7. Numa máquina térmica, o agente é um gás ideal de coeficiente adiabático γ , que executa o ciclo da Fig. P.3, onde BC é uma adiabática e CA uma isoterma. (a) Calcule o rendimento em função de r e γ . (b) Exprima o resultado em função da razão $\rho = T_1/T_2$ entre as temperaturas extremas. (c) Para $\gamma = 1,4$ e $r = 2$, qual é a razão entre o rendimento obtido e o rendimento de um ciclo de Carnot que opere entre T_1 e T_2 ?

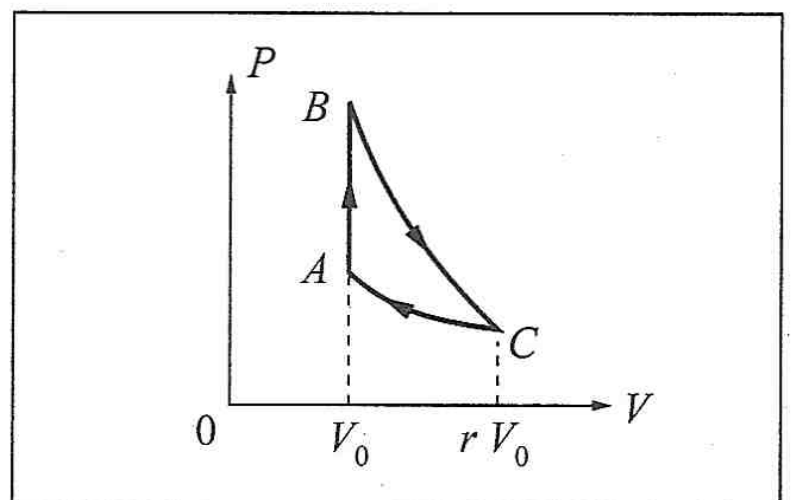


Figura P.3

8. A Fig. P.4, onde AB e CD são adiabáticas, representa o *ciclo de Otto*, esquematização idealizada do que ocorre num motor a gasolina de 4 tempos: AB representa a compressão rápida (adiabática) da mistura de ar com vapor de gasolina, de um volume inicial V_0 para V_0/r ($r \equiv$ taxa de compressão); BC representa o aquecimento a volume constante devido à ignição; CD é a expansão adiabática dos gases aquecidos, movendo o pistão; DA simboliza a queda de pressão associada à exaustão dos gases da combustão. A mistura é tratada como um gás ideal de coeficiente adiabático γ . (a) Mostre que o rendimento do ciclo é dado por

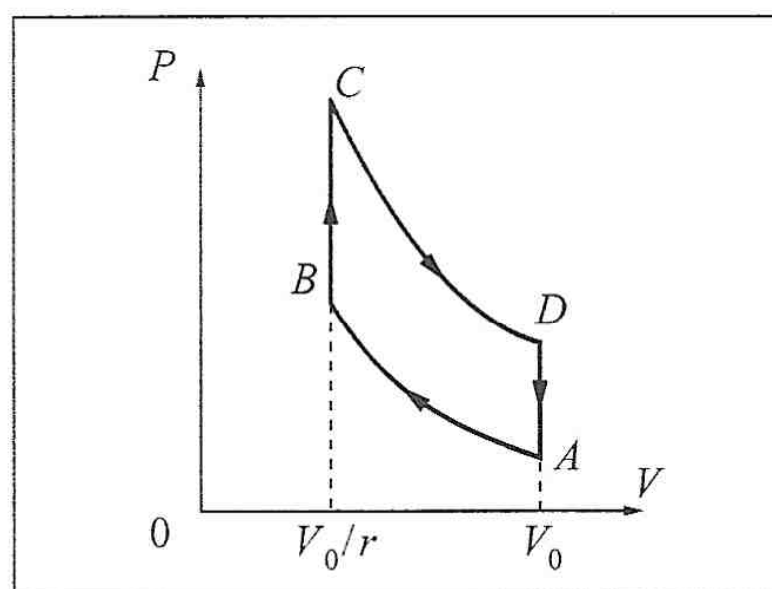


Figura P.4

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$$

- (b) Calcule η para $\gamma = 1,4$ e $r = 10$ (compressão máxima permissível para evitar pré-ignição).

9. O *ciclo Diesel*, representado na Fig. P.5, onde AB e CD são adiabáticas, esquematiza o que ocorre num motor Diesel de 4 tempos. A diferença em relação ao ciclo de Otto (Problema 8) é que a taxa $r_c = V_0/V_1$ de compressão adiabática é maior, aquecendo mais o ar e permitindo que ele inflame o combustível injetado sem necessidade de uma centelha de ignição: isto ocorre a pressão constante, durante o trecho BC ; a taxa de expansão adiabática associada a CD é $r_e = V_0/V_2$ (a) Mostre que o rendimento do ciclo Diesel é dado por

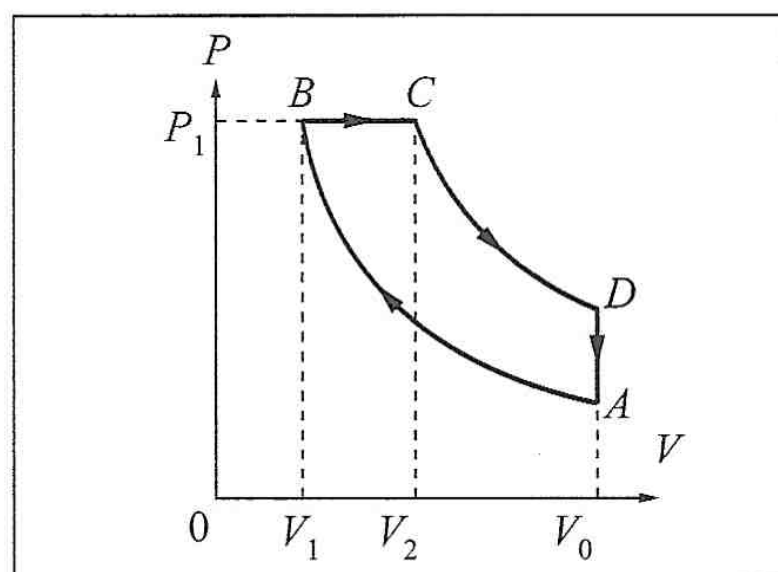


Figura P.5

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \right) = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r_e}\right)^{\gamma} - \left(\frac{1}{r_c}\right)^{\gamma}}{(1/r_e) - (1/r_c)}$$

- (b) Calcule η para $r_c = 15$, $r_e = 5$, $\gamma = 1,4$. (c) Compare o resultado com o rendimento de um ciclo de Carnot entre as mesmas temperaturas extremas.

10. O *ciclo de Joule*, representado na Fig. P.6, onde AB e CD são adiabáticas, é uma idealização do que ocorre numa turbina a gás: BC e DA representam respectivamente aquecimento e resfriamento a pressão constante; $r = P_B/P_A$ é a taxa de compressão. (a) Mostre que o rendimento do ciclo de Joule é dado por

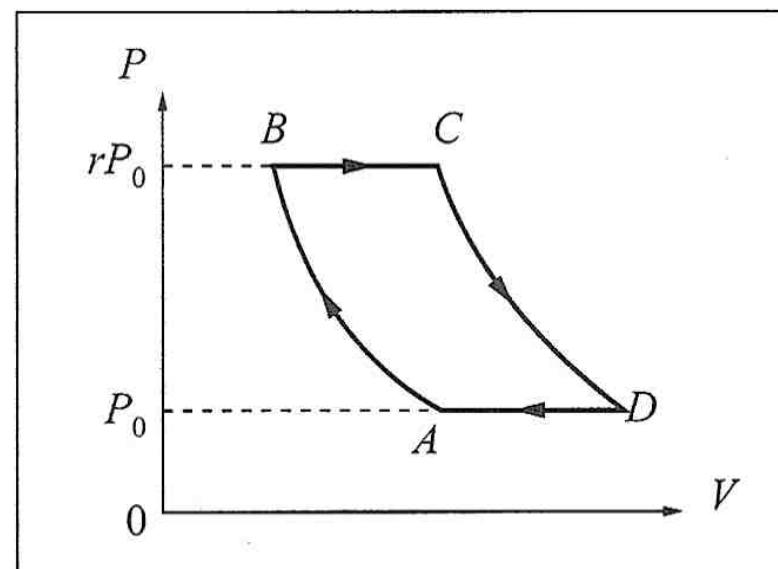


Figura P.6

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

- (b) Calcule o rendimento para $r = 10$.

11. O ciclo da Fig. P.7 é formado por isotermas de temperaturas T_1 (BC), T_3 (DE) e T_2 (FA), e pelas adiabáticas AB, CD e EF. As taxas de expansão isotérmicas V_C/V_B e V_E/V_D , são ambas iguais a r . Calcule o rendimento do ciclo e mostre que é menor do que o rendimento de um ciclo de Carnot entre as mesmas temperaturas extremas.

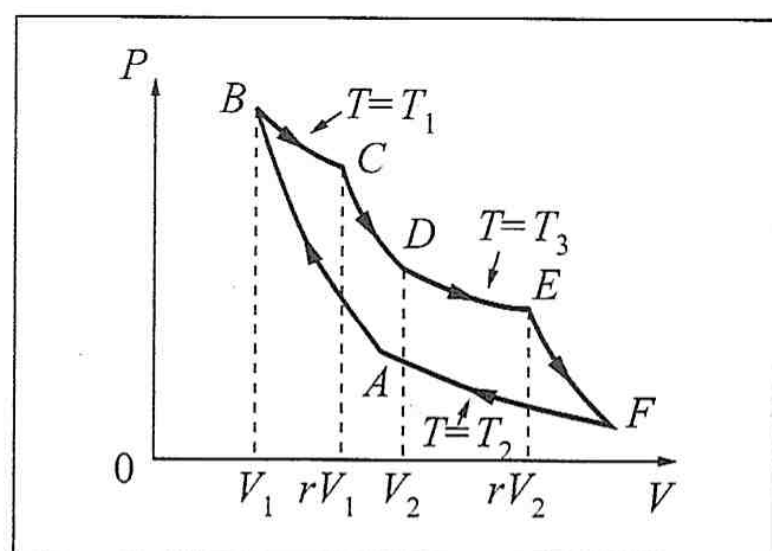


Figura P.7

12. A partir dos dados fornecidos no Problema 2 do Cap. 8, calcule a entropia molar s do NaCl a baixas temperaturas, $T \ll T_D$, onde T_D é a temperatura de Debye (para um sólido a baixas temperaturas, $C_V \approx C_P$). Tome $s = 0$ para $T = 0$.
13. Um fluido é submetido a um ciclo reversível. Se o ciclo é representado por um diagrama no plano (T, S) , onde S é a entropia do fluido, (a) Mostre que o trabalho associado ao ciclo é dado por $W = \oint TdS$, a área orientada por ele compreendida. (b) Represente um ciclo de Carnot para um gás ideal no plano (T, S) . Verifique o resultado da parte (a) neste caso. (c) Calcule o rendimento η do ciclo de Carnot da parte (b) diretamente a partir do diagrama (T, S) .
14. Um quilograma de gelo é removido de um congelador a -15°C e aquecido, até converter-se totalmente em vapor, a 100°C . Qual é a variação de entropia deste sistema? O calor específico do gelo é de $0,5 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$; o calor latente de fusão do gelo é de $79,6 \text{ cal/g}$, e o calor latente de vaporização da água é de $539,6 \text{ cal/g}$.
15. Dois litros de ar ($\gamma = 1,4$), nas condições normais de temperatura e pressão, sofrem uma expansão isobárica até um volume 50% maior, seguida de um resfriamento a volume constante até baixar a pressão a $0,75 \text{ atm}$. De quanto varia a entropia deste sistema?
16. Um recipiente de paredes adiabáticas contém 2 l de água a 30°C . Coloca-se nele um bloco de 500 g de gelo. (a) Calcule a temperatura final do sistema. Tome 80 cal/g para o calor latente de fusão do gelo. (b) Calcule a variação de entropia do sistema.
17. Um litro de água, inicialmente a 100°C , é totalmente vaporizado: (a) em contato com um reservatório térmico a 100°C ; (b) em contato com um reservatório térmico a 200°C . O calor latente de vaporização da água é de $539,6 \text{ cal/g}$. Calcule a variação total de entropia do universo devida exclusivamente ao processo de vaporização, nos casos (a) e (b), e relacione os resultados com a reversibilidade ou não do processo.
18. Um cilindro contendo 1 kg de He a 150 atm , em equilíbrio térmico com o ambiente a 17°C , tem um pequeno vazamento através do qual o gás escapa para a atmosfera, até que o tanque se esvazia por completo do hélio. Qual é a variação de entropia do gás hélio? Que quantidade de trabalho é desperdiçada por este processo?
19. Uma chaleira contém 1 l de água em ebulição. Despeja-se toda a água numa piscina, que está à temperatura ambiente de 20°C . (a) De quanto variou a entropia da água da chaleira? (b) De quanto variou a entropia do universo?

20. Chama-se energia livre (de Helmholtz) de um sistema a função de estado $F = U - TS$, onde U é a energia interna e S a entropia do sistema. Esta função desempenha um papel importante nas transformações *isotérmicas*, tais como as que se produzem à temperatura ambiente. Mostre que, numa transformação isotérmica, (a) Se a transformação é reversível, o trabalho W realizado pelo sistema é igual ao decréscimo de F ; (b) No caso *irreversível*, W é menor que este decréscimo, de modo que o decréscimo de F dá a *energia máxima disponível* para realizar trabalho. (c) Mostre que, numa expansão livre, o decréscimo de F dá o trabalho desperdiçado.

Capítulo 11

TEORIA CINÉTICA DOS GASES

11.1 — A Teoria atômica da matéria

Neste capítulo e no próximo, vamos passar pela primeira vez da física macroscópica à física microscópica, introduzindo a descrição da estrutura da matéria na escala atômica.

Não vamos discutir a estrutura do átomo, nem a da matéria condensada (líquidos, sólidos), porque isto só se torna possível após a formulação da teoria quântica. No caso dos gases, porém, muitas propriedades (não todas!) podem ser explicadas independentemente da teoria quântica, com o auxílio de um modelo microscópico bastante rudimentar, a teoria cinética dos gases. Algumas das hipóteses básicas dessa teoria foram formuladas no século 18, mais de um século antes da formulação da própria teoria atômica.

Um dos grandes méritos da teoria cinética, conforme vamos ver, é fornecer uma explicação microscópica dos conceitos básicos da termodinâmica (como o de temperatura), bem como de seus princípios básicos (2.^a lei).

Inicialmente, faremos um breve apanhado das idéias que levaram à teoria atômica, cujas origens estão ligadas com o desenvolvimento da química.

(a) A hipótese atômica na antiguidade

Conjeturas e especulações sobre a estrutura da matéria remontam no mínimo aos filósofos da Grécia antiga, onde já se discutia a idéia de “elementos primordiais” dos quais a matéria seria composta, bem como se seria ou não possível subdividir indefinidamente as substâncias.

Entre os séculos V e III a.C. foi formulada, primeiro por Leucipo e Demócrito de Abdera, e mais tarde por Epicuro, a hipótese de que a matéria é constituída de partículas minúsculas, indestrutíveis, a que deram o nome de *átomos* (o que em grego significa “indivisível”), movendo-se no vazio (vácuo). Cada substância, como a água ou o ferro, seria formada de átomos idênticos, mas eles teriam formas diferentes para substâncias diferentes.

A divulgação dessas idéias foi feita pelo poeta romano Lucrécio (século I A.D.) em sua obra “Sobre a Natureza das Coisas”. Para ilustrar o movimento incessante dos átomos, compara-os com o dos grãos de poeira que vemos dançar num feixe de raios solares quando penetra numa sala escura, dizendo: ... “Esta dança é uma indicação de movimentos subjacentes invisíveis da matéria... grande número de partículas minúsculas, sob o impacto de choques invisíveis, mudam de direção e se agitam... Assim, o movimento parte dos átomos e é gradualmente levado até o nível de nossos sentidos.” Conforme veremos mais adiante, esta descrição poderia ser aplicada a um dos fenômenos que evidenciam a existência de átomos, o movimento browniano.

(b) O conceito de elementos

Até o século 17, prevaleceu a idéia elaborada na Grécia antiga dos “quatro elementos primordiais” (água, fogo terra e ar), e os alquimistas medievais procuravam transmutar substâncias em ouro “adicionando fogo”.

A primeira definição mais próxima da atual de “elementos” foi dada por Robert Boyle em seu livro “O Químico Céptico”: “... O que entendo por elementos... são certos corpos primitivos e simples, perfeitamente sem mistura, os quais, não sendo formados de quaisquer outros corpos, nem uns dos outros, são os ingredientes dos quais todos os corpos perfeitamente misturados são feitos, e nos quais podem finalmente ser analisados...”

Os materiais são classificados hoje em dia em *substâncias puras e misturas* dessas substâncias. Uma mistura de várias substâncias tem composição *variável, ou seja, podemos variar as proporções dos diversos componentes*. Numa *mistura heterogênea*, a composição não é uniforme, ou seja, diferentes porções da mesma amostra podem ter composições diferentes. Por exemplo: o granito é uma mistura heterogênea de grãos de quartzo, mica e feldspato. Numa *mistura homogênea*, a composição é *uniforme*, o que ocorre mesmo na escala microscópica, como acontece com as *soluções*. Assim, uma solução de sal de cozinha na água é uniforme (embora continue tendo composição variável, dependendo da concentração). Podemos assim mesmo separá-la nas substâncias puras que a compõem, por processos que não envolvem qualquer transformação química: basta por exemplo, evaporar a água para separá-la do sal.

Uma substância pura, ao contrário de uma mistura, tem composição *fixa*. A água e o sal de cozinha são substâncias puras, mas não são elementos: são *compostos*, formados de elementos (hidrogênio e oxigênio, no caso da água; cloro e sódio, para o sal de cozinha), em proporções fixas. Os *elementos* são substâncias puras que não podem ser decompostas em outras por qualquer transformação química. Sabemos hoje que o que caracteriza um elemento químico é o *número atômico*, ou seja, o número de prótons no núcleo atômico.

Contribuições importantes às idéias básicas da química, e em particular ao conceito de elemento químico, foram dadas por *Lavoisier*, na segunda metade do século 18.

(c) A lei das proporções definidas e a lei das proporções múltiplas

Em 1799, o químico francês Joseph Louis Proust formulou, baseado em suas experiências, a *lei das proporções definidas*, segundo a qual, *quando dois ou mais elementos se combinam para formar um composto essa combinação sempre se dá em proporções bem definidas de peso*.

Assim,

| | | | | |
|-------------------|---|------------------|---|----------------------|
| 1 g de hidrogênio | + | 8 g de oxigênio | → | 9 g de água, |
| 2 g de hidrogênio | + | 16 g de oxigênio | → | 18 g de água, |
| 2 g de hidrogênio | + | 8 g de oxigênio | → | 9 g de água |
| | | | | + 1 g de hidrogênio, |

ou seja, no último exemplo 1 g de hidrogênio não se combina.

John Dalton, freqüentemente chamado de “pai da teoria atômica”, publicou sua obra “Um novo sistema de Filosofia Química” em 1808-1810, onde expunha as seguintes idéias básicas: 1) a existência de átomos, indivisíveis e imutáveis (ou seja, não podendo ser transmutados uns nos outros por processos químicos, como queriam os alquimistas); 2) Todos os átomos de um mesmo elemento são idênticos; 3) Compostos químicos são formados por combinações de átomos, como $C + O \rightarrow CO$. Dalton chama de “átomo composto” o que hoje chamamos de molécula.

A interpretação de Dalton da lei das proporções definidas foi que essas proporções em peso dos diferentes elementos num composto representam os diferentes pesos atômicos dos elementos. Assim, 12 g de carbono + 16 g de oxigênio \rightarrow 28 g de monóxido de carbono pode ser interpretado como significando que a massa de 1 átomo de C = $12/16 \times$ massa de 1 átomo de O.

Esta interpretação também permitia explicar a *lei das proporções múltiplas*, segundo a qual, *quando o mesmo par de elementos pode dar origem a mais de um composto, os pesos de um deles que se combinam com um peso fixo de outro para formar compostos diferentes estão entre si em razões dadas por números inteiros pequenos*. Assim, 12 g de carbono + 32 g de oxigênio \rightarrow 44 g de gás carbônico, onde a proporção de oxigênio em relação ao outro exemplo acima é 2:1.

Em linguagem moderna, a interpretação de Dalton deste resultado era que a fórmula química da molécula de monóxido de carbono é CO, e a da molécula de gás carbônico é CO₂.

Entretanto, tomando por base apenas estas leis, existia considerável grau de ambigüidade na determinação da fórmula química de um composto, e o critério de Dalton de adotar a fórmula mais simples nem sempre conduzia ao resultado correto. Assim, a fórmula de Dalton para a água era HO.

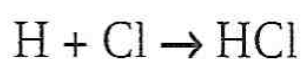
(d) A lei das combinações volumétricas

Em 1808, estudando reações químicas entre gases, em igualdade de condições de temperatura e pressão, Joseph Louis Gay-Lussac descobriu a *lei das combinações volumétricas*: *Os volumes de gases que se combinam nessas condições guardam entre si proporções simples (dadas por números inteiros pequenos)*. Assim,

| | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--|
| 2 volumes de gás hidrogênio | + 1 volume de gás oxigênio | \rightarrow 2 volumes de vapor de água, |
| 1 volume de gás nitrogênio | + 3 volumes de gás hidrogênio | \rightarrow 2 volumes de vapor de amônia, |
| 1 volume de gás hidrogênio | + 1 volume de gás cloro | \rightarrow 2 volumes de gás ácido clorídrico. |

Confrontando estes resultados com a idéia de Dalton de que compostos químicos são formados por combinações de átomos, eles sugerem que, à mesma temperatura e pressão, volumes iguais de todos os gases contêm o mesmo número de partículas. Assim, o último exemplo sugere que há o mesmo número de “partículas” de H e Cl em volumes iguais desses gases.

Entretanto, do ponto de vista de Dalton, para quem a fórmula química devia ser a mais simples possível, isto levava a uma dificuldade: ele interpretava a última reação acima como



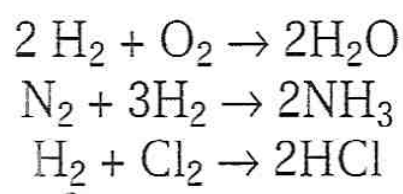
e isto deveria levar ao mesmo número de “partículas” de HCl, ou seja, a somente 1 volume, em lugar de 2.

(e) A hipótese de Avogadro

A dificuldade estava em perceber que as “partículas” de que é formado o gás hidrogênio, por exemplo, não precisam ser átomos de hidrogênio: podem ser formadas de mais de um átomo. De fato, como sabemos, o hidrogênio é um gás diatômico, e a molécula de hidrogênio é H₂, e não H.

Em 1811, o físico italiano Amedeo Avogadro enunciou duas hipóteses básicas: 1) As partículas constituintes de um gás “simples” (elemento) não são necessariamente formadas por um único átomo, mas podem conter um certo número de átomos ligados entre si; 2) Nas

mesmas condições de temperatura e pressão, volumes iguais de todos os gases contêm o mesmo número de partículas. Assim, as moléculas de hidrogênio, oxigênio, nitrogênio e cloro são todas diatômicas: H_2 , O_2 , N_2 , e Cl_2 , e as reações acima se escrevem:



fornecendo ao mesmo tempo as fórmulas moleculares dos compostos, e reconciliando todas as leis acima.

Em linguagem moderna, podemos enunciar a *lei de Avogadro: Volumes iguais de todos os gases, nas mesmas condições de temperatura e pressão, contêm o mesmo número de moléculas.*

(f) Massa atômica e molecular; mol

Uma vez conhecidas as fórmulas químicas das substâncias, os métodos de Dalton podem ser empregados para estabelecer uma *escala relativa de massas atômicas e moleculares*.

Assim, se adotarmos como unidade de massa a massa do átomo de hidrogênio (elemento mais leve), $m_{\text{H}} = 1$, teremos $m_{\text{H}_2} = 2$. Como $4 \text{ g } (\text{H}_2) + 32 \text{ g } (\text{O}_2) \rightarrow 36 \text{ g } (\text{H}_2\text{O})$, concluímos que $m_{\text{O}_2} = 32$, $m_{\text{O}} = 16$, $m_{\text{H}_2\text{O}} = 18$; analogamente, como $12 \text{ g } (\text{C}) + 32 \text{ g } (\text{O}_2) \rightarrow 44 \text{ g } (\text{CO}_2)$, concluímos que $m_{\text{C}} = 12$.

Na realidade, conforme será visto mais tarde, cada elemento pode ter mais de um *isótopo* de massa atômica diferente, ocorrendo na natureza com diferentes abundâncias relativas, o que leva a massas atômicas fracionárias; a unidade de massa atômica (u.m.a.) é definida atualmente convencionando que a massa atômica do isótopo C^{12} do carbono é exatamente 12 u.m.a., mas, por enquanto, não levaremos em conta estas correções.

É conveniente adotar como unidade de massa o *mol*, já definido à pág. 190 como uma massa em g de uma substância pura igual à sua massa molecular: $1 \text{ mol } (\text{H}_2) = 2 \text{ g}$; $1 \text{ mol } (\text{O}_2) = 32 \text{ g}$; $1 \text{ mol } (\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g}$. Por conseguinte, *1 mol de qualquer substância tem sempre o mesmo número de moléculas*. Além disso, pela lei de Avogadro, 1 mol de qualquer gás, nas mesmas condições de temperatura e de pressão, ocupa o mesmo volume. Como vimos à pág. 190, nas condições NTP, $1 \text{ mol de gás} = 22,415 \text{ l}$.

O número de moléculas por mol chama-se *número de Avogadro*, e é dado por

$$N_0 \approx 6,023 \times 10^{23} \quad \text{moléculas / mol} \quad (11.1.1)$$

Este número pode ser determinado experimentalmente de uma grande variedade de maneiras (uma delas será discutida mais adiante).

Para ter uma idéia da enormidade deste número, basta citar o seguinte exemplo, devido a Lord Kelvin: se se jogar um copo de água no oceano, misturando-o uniformemente com toda a água dos oceanos, um copo de água da mistura conterà cerca de 10.000 das moléculas originalmente lançadas!

Podemos utilizar N_0 para estimar a ordem de grandeza do tamanho e da massa de um átomo. É de se esperar que num líquido o espaçamento entre as moléculas seja comparável ao seu tamanho. Como a densidade da água é 1 g/cm^3 , temos então:

$1 \text{ mol } (\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g} = 18 \text{ cm}^3 = N_0 \text{ moléculas}$, da forma que o volume ocupado por uma molécula é $18 \text{ cm}^3 / N_0 \approx 30 \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \sim d^3$, onde d é o tamanho da molécula. Logo,

$$d \sim 3 \times 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ \AA}$$

O tamanho atômico típico deve ser portanto $\sim 1 \text{ \AA}$.

Analogamente, temos

$$1 \text{ mol (H}_2\text{)} = 2 \text{ g} = 2N_0 \text{ átomos de H,}$$

de modo que a massa de 1 átomo de H é

$$m_H = \frac{1}{N_0} \text{ g} \sim 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$$

11.2 — A teoria cinética dos gases

Várias das idéias qualitativas da teoria cinética já haviam sido propostas por Gassendi no meio do século 17, e foram retomadas por Hooke duas décadas mais tarde.

Em 1738, o físico suíço Daniel Bernoulli, em seu tratado “Hidrodinâmica”, formulou um modelo microscópico de um gás, em que antecipava em cerca de um século desenvolvimentos futuros da teoria cinética dos gases e da própria termodinâmica. Conforme ilustrado na Fig. 11.1 (adaptada da figura original de Bernoulli), ele considerou um gás contido num recipiente coberto por um pistão móvel, com a pressão equilibrada por um peso. Bernoulli imaginou o gás como sendo composto de um grande número de minúsculas partículas esféricas, em constante movimento em todas as direções. A sustentação do pistão pela pressão do gás resulta das numerosas colisões das partículas do gás com a parede do pistão, da mesma forma que um jato de areia exerce uma pressão sobre uma parede (1, Seção 9.4).

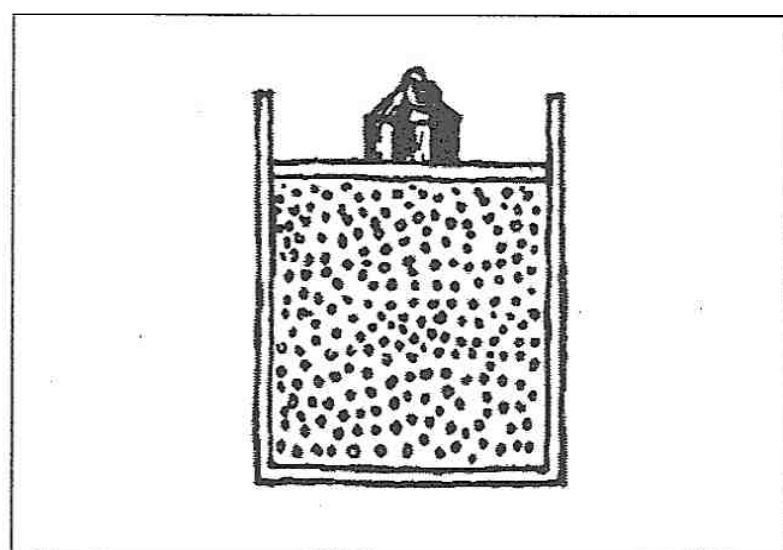


Figura 11.1 — Modelo de Bernoulli

Se diminuirmos o volume, aumenta o número de colisões por segundo com o pistão, o que leva a um aumento da pressão: Bernoulli utilizou este argumento para deduzir a lei de Boyle (9.1.3). Deduziu também de seu modelo que, a pressão constante, o volume deveria crescer com a temperatura, antecipando em meio século a lei de Charles. Nesta dedução, escreveu: “... admite-se que o calor possa ser considerado como um crescente movimento interno das partículas”, o que antecipa em um século o reconhecimento do calor como forma de energia.

Outras contribuições importantes à teoria cinética foram dadas, na primeira metade do século 19, por Herapath e Waterston e, entre 1856 e 1860, por Joule, Krönig, Clausius e, finalmente, por James Clerk Maxwell. As principais foram devidas a Clausius e a Maxwell.

Hipóteses básicas

Vamos considerar um gás homogêneo, de uma substância pura (por exemplo, hidrogênio ou vapor de água), contido num recipiente. As hipóteses básicas da teoria cinética dos gases são as seguintes:

- (1) O gás é constituído de um número extremamente grande de moléculas idênticas. Basta lembrar o valor do número de Avogadro.
- (2) O tamanho de uma molécula de gás é desprezível em confronto com a distância média

entre as moléculas, ou seja, as moléculas ocupam uma fração pequena do volume total ocupado pelo gás. No final da Seção anterior, estimamos o volume ocupado por uma molécula de água supondo que as moléculas “se tocam” no líquido, quando 1 mol ocupa 18 cm^3 . Como 1 mol de vapor de água, nas condições NTP, ocupa 22.400 cm^3 , vemos que, na forma gasosa, as moléculas ocupam menos de 1/1.000 do volume total, neste caso.

- (3) *As moléculas estão em movimento constante em todas as direções.* Este movimento explica imediatamente a capacidade ilimitada de expansão de um gás. Veremos em breve que as velocidades moleculares são extremamente elevadas, tipicamente da ordem de centenas de m/s. Devem ocorrer portanto freqüentes colisões das moléculas não somente com as paredes, mas também umas com as outras. É devido a estas colisões que as direções das velocidades se distribuem ao acaso, ou seja, uniformemente.
- (4) *As forças de interação entre as moléculas são de curto alcance, atuando somente durante as colisões.* O comportamento das forças interatômicas em função da distância foi discutido em 1, Seções 5.2. e 6.5: vimos que as forças são inicialmente atrativas a distâncias maiores, tornando-se fortemente repulsivas quando os átomos começam a se interpenetrar, mas o alcance dessas interações é da ordem das dimensões atômicas e moleculares, ou seja, num gás, é muito menor que o espaçamento médio entre as moléculas [cf. (2)]. Em primeira aproximação, podemos imaginar as moléculas como esferas impenetráveis, comportando-se como “bolas de bilhar” microscópicas. A duração de cada processo de colisão é desprezível em confronto com o intervalo de tempo médio entre duas colisões consecutivas. Durante este intervalo, uma molécula se move como uma partícula livre, ou seja, com movimento retilíneo uniforme. Logo uma típica trajetória molecular é um caminho em ziguezague muito irregular e complicado.
- (5) *Tanto as colisões entre as moléculas como as colisões entre elas e as paredes do recipiente são perfeitamente elásticas, ou seja, a energia cinética total se conserva (1, Seção 9.3).* Se houvesse perda da energia cinética total nas colisões, conforme veremos adiante, a pressão do gás não se manteria constante, mas iria decrescendo espontaneamente, o que não é observado. Veremos também, todavia, que é desnecessário supor que cada colisão individual seja elástica: basta que as colisões sejam elásticas em média.

11.3 — Teoria cinética da pressão

O cálculo da pressão exercida por um gás sobre as paredes de um recipiente é análogo ao cálculo da pressão exercida por um jato de areia (1, Seção 9.4).

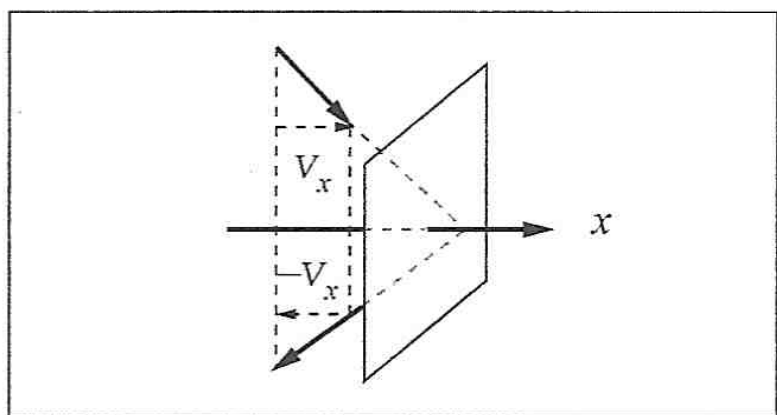


Figura 11.2 — Colisão de uma molécula com uma parede

Sendo a colisão elástica, o efeito da colisão de uma molécula com uma parede é inverter a componente da velocidade perpendicular à parede, como acontece com um raio luminoso que se reflete num espelho; se a parede é perpendicular ao eixo Ox , por exemplo (Fig. 11.2), a colisão inverte a componente v_x da velocidade: $v_x \rightarrow -v_x$.

Se m é a massa das moléculas do gás, o momento da molécula na direção x varia de $-mv_x - mv_x = -2mv_x$ em consequência dessa colisão. Pela conservação do momento, o momento transferido à parede pela colisão é

$$\Delta p_x = 2mv_x \quad (11.3.1)$$

A força média \bar{F}_x exercida sobre a parede pelas moléculas do gás é igual (1, Seção 9.4) ao momento médio transferido por unidade de tempo pelas colisões, que é a média do momento

transferido por colisão multiplicado pelo número de colisões por unidade de tempo.

Para calcular essa média, levando em conta que as moléculas se movem com velocidades de magnitudes e direções diferentes, vamos subdividir as moléculas em grupos, classificando-as de acordo com suas velocidades. Para simplificar, subdividiremos as velocidades em agrupamentos discretos: v_1, v_2, v_3, \dots . Uma subdivisão mais apropriada levaria em conta que as velocidades podem variar continuamente: em componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z), consideraríamos moléculas cujas velocidades estão compreendidas entre esses valores e ($v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$), com (v_x, v_y, v_z) tomando todos os valores possíveis (distribuição contínua de velocidades). A distribuição discreta é uma aproximação da distribuição contínua, em que consideramos todas as moléculas num intervalo ($\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$) como tendo a mesma velocidade.

Seja n_1 o número de moléculas por unidade de volume com velocidade v_1 , n_2 o número com velocidade v_2 , etc ... Se n é o número total de moléculas por unidade de volume, temos então

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots \quad (11.3.2)$$

Seja dS um elemento de superfície da parede perpendicular ao eixo Ox , e consideremos um feixe de moléculas de velocidade v_1 que colidem com esse elemento durante um intervalo de tempo dt (Fig. 11.3). Para que haja colisão, temos de supor v_1 voltado para a parede ($v_{1x} > 0$), e não afastando-se dela (o que corresponderia a $v_{1x} < 0$).

As moléculas desse feixe que colidem com dS durante dt são exatamente aquelas contidas num cilindro de base dS e geratriz $v_1 dt$ (por quê?). A altura do cilindro é $v_{1x} dt$ (Fig.), de modo que o volume é $v_{1x} dS dt$. Como há n_1 moléculas de velocidade v_1 , por unidade de volume, o número total de moléculas de velocidade v_1 que colidem com dS durante dt é

$$dn_1 = n_1 v_{1x} dS dt \quad (11.3.3)$$

Cada colisão, pela (11.3.1), transfere à parede um momento $\Delta p_{1x} = 2mv_{1x}$. Logo, o momento total transferido pelas colisões com dS durante dt é

$$dp_{1x} = dn_1 \Delta p_{1x} = 2mn_1 v_{1x}^2 dS dt \quad (11.3.4)$$

A força $dF_{1x} = dp_{1x}/dt$ é a taxa de variação do momento, e a pressão $P_1 = dF_{1x}/dS$ é a força por unidade de superfície. Logo,

$$P_1 = 2mn_1 v_{1x}^2 \quad (11.3.5)$$

é a pressão exercida sobre a parede pelo feixe de moléculas de velocidade v_1 .

A pressão total P do gás se obtém somando as contribuições de todos os feixes v_i que colidem com a parede, ou seja, com $v_{ix} > 0$:

$$P = 2m \sum_{v_{ix} > 0} n_i v_{ix}^2 \quad (11.3.6)$$

Pela isotropia da distribuição de velocidades, a soma sobre $v_{ix} < 0$ é igual à soma sobre $v_{ix} > 0$, de modo que podemos remover a restrição a $v_{ix} > 0$ suprimindo o fator 2 na (11.3.6):

$$P = m \sum_i n_i v_{ix}^2 \quad (11.3.7)$$

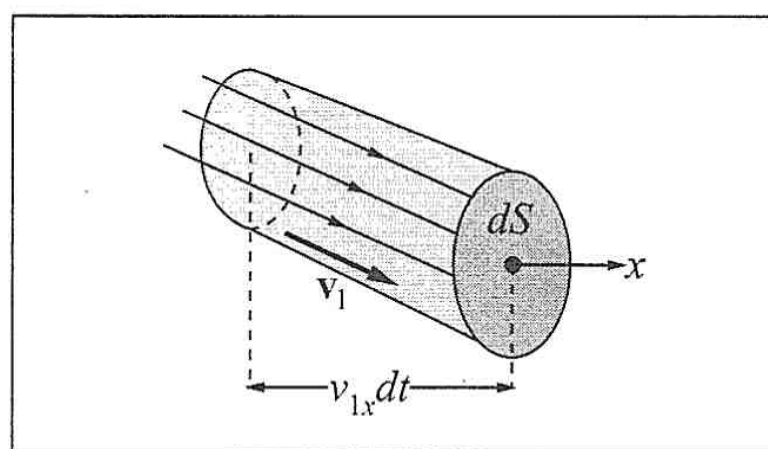


Figura 11.3 — Colisão de um feixe com uma parede

onde a soma se estende agora a todas as velocidades possíveis.

O valor médio de v_x^2 , que indicaremos por $\langle v_x^2 \rangle$, é por definição a *média ponderada*

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{n_1 v_{1x}^2 + n_2 v_{2x}^2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots} = \frac{\sum_i n_i v_{ix}^2}{\sum_i n_i} \quad (11.3.8)$$

onde o denominador, pela (11.3.2), é igual a n .

Logo, a (11.3.7) equivale a

$$P = nm \langle v_x^2 \rangle \quad (11.3.9)$$

Ainda pela isotropia da distribuição das velocidades moleculares, temos

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (11.3.10)$$

Logo, finalmente,

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle \quad (11.3.11)$$

Se tivéssemos levado em conta a distribuição contínua das velocidades, em lugar de aproximá-la por uma distribuição discreta, o único efeito teria sido substituir somas por integrais, em expressões como as (11.3.6) e (11.3.8).

A *energia cinética média* de uma molécula é $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$. Multiplicando esta expressão pelo número total n de moléculas por unidade de volume, obtemos a *energia cinética média do gás por unidade de volume*

$$\frac{1}{2} nm \langle v^2 \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle / V \quad (11.3.12)$$

onde $\langle \mathcal{E} \rangle$ é a energia cinética média *total* do gás e V o volume do recipiente. O 2.º membro da (11.3.12) é a *densidade de energia cinética média do gás*.

Substituindo a (11.3.12) na (11.3.11), fica

$$P = \frac{2}{3} \langle \mathcal{E} \rangle / V \quad (11.3.13)$$

ou seja, a pressão do gás é igual a 2/3 da densidade de energia cinética média total das moléculas.

Lei de Dalton

Consideremos uma mistura de gases que não reagem quimicamente entre si (por exemplo, o ar é uma mistura principalmente de nitrogênio e oxigênio), contida num recipiente de volume V . Dalton, em 1802, obteve experimentalmente o seguinte resultado: a *pressão exercida pela mistura é a soma das pressões que cada gás componente da mistura exerceria se ocupasse sozinho todo o volume do recipiente*. Essas pressões chamam-se *pressões parciais*, e a lei é chamada *lei de Dalton das pressões parciais*.

A lei de Dalton é explicada imediatamente pela teoria cinética dos gases. Com efeito, se \mathfrak{S}_1 é a energia cinética total das moléculas do gás 1 da mistura, \mathfrak{S}_2 do gás 2, etc, a pressão total, pela (11.3.13), é

$$P = \frac{2}{3}(<\mathfrak{S}_1> + <\mathfrak{S}_2> + \dots) / V = P_1 + P_2 + \dots \quad (11.3.14)$$

onde P_1, P_2, \dots são as pressões parciais que os gases 1, 2, ... exerceriam se cada um ocupasse sozinho todo o volume V .

Velocidade quadrática média

Voltando ao caso de um único gás, a (11.3.11) pode ser escrita

$$P = \frac{1}{3} \rho <v^2> \quad (11.3.15)$$

onde $\rho = nm$ é a densidade do gás (massa total por unidade de volume). Por conseguinte,

$$\boxed{v_{qm} = \sqrt{<v^2>} = \sqrt{3P / \rho}} \quad (11.3.16)$$

é a *velocidade quadrática média* das moléculas do gás, que é uma das formas de definir a magnitude média da velocidade das moléculas.

Como P e ρ são grandezas macroscópicas, podemos utilizar esta relação para calcular a velocidade. Por exemplo: nas condições NTP ($T = 273K$, $P = 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$), a densidade do oxigênio é $\rho \approx 1,43 \text{ kg/m}^3$, de modo que a (11.3.16) dá

$$v_{qm}(\text{O}_2, \text{NTP}) \approx 461 \text{ m/s}$$

Obtemos valores análogos para outros gases nas condições NTP, tanto maiores quanto menor a densidade ρ , ou seja, a massa molecular do gás: 493 m/s para o N_2 , 615 m/s para o vapor de H_2O , 1.311 m/s para o He e 1.838 m/s para o H_2 . Para o ar, cuja densidade é $1,29 \text{ kg/m}^3$ nas condições NTP, a (11.3.16) dá $v_{qm} = 485 \text{ m/s}$.

Os valores encontrados para as velocidades quadráticas médias moleculares nos gases, de várias centenas de m/s, são da mesma ordem de grandeza que a velocidade do som nesses gases, mas um tanto maiores. Por exemplo, para o ar, $v_{qm} = 485 \text{ m/s}$ (NTP), ao passo que a velocidade do som nas mesmas condições é de 311 m/s. A relação entre as duas velocidades se obtém imediatamente comparando a (11.3.16) com a expressão (6.2.31) da velocidade do som:

$$v_{qm} / v_{som} = \sqrt{3 / \gamma} \quad (11.3.17)$$

onde $\gamma = C_p / C_v$, a razão das capacidades térmicas molares a pressão constante e a volume constante, é sempre < 3 , conforme veremos (Seção 11.5).

É fácil compreender por que v_{som} é da mesma ordem, mas menor, que v_{qm} . A velocidade do som é a velocidade de propagação de pequenas perturbações (de densidade ou pressão) no interior do gás. Microscopicamente, uma tal perturbação se propaga entre regiões adjacentes do gás através do movimento das moléculas que o constituem, as quais representam portanto o mecanismo de transporte. Como as moléculas se movem desordenadamente em todas as direções, colidindo freqüentemente uma com as outras, a velocidade de propagação da perturbação ordenada (v_{som}) é menor que a velocidade média de agitação desordenada (v_{qm}).

Observemos finalmente que, como a (11.3.13) só faz intervir a energia cinética *média*, não é necessário (Seção 11. 2, hipótese (5)) supor que cada colisão individual seja elástica: basta que as colisões sejam elásticas em média.

11.4 — A lei dos gases perfeitos

(a) A equipartição da energia de translação

Consideremos de forma mais detalhada a colisão entre uma molécula do gás e uma molécula

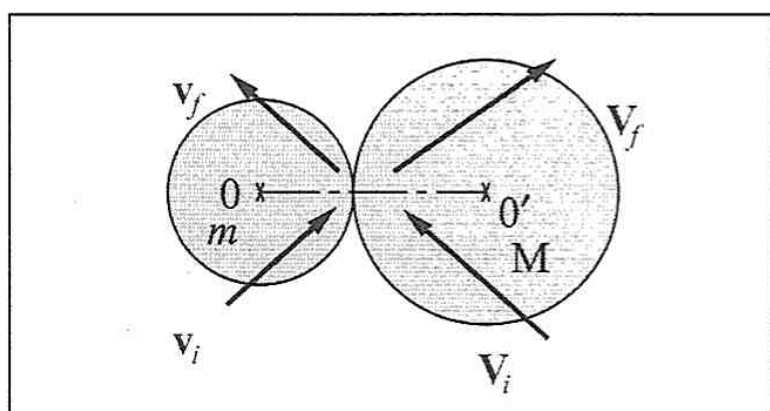


Figura 11.4 — Colisão entre moléculas

da parede, tratando-as, para fixar idéias, como esferas impenetráveis, ou seja, como se fossem “bolas de bilhar” microscópicas. Sejam (m, v_i) e (M, V_i) as massas e velocidades iniciais (antes da colisão) da molécula de gás e da molécula da parede, respectivamente, e v_f e V_f as velocidades finais (depois da colisão) correspondentes. Seja OO' a linha que liga os centros das duas moléculas no instante da colisão (Fig. 11.4).

Como a força que atua durante a colisão tem a direção da linha dos centros, as componentes de velocidade perpendiculares a essa linha não são alteradas pela colisão, de modo que basta considerar o movimento ao longo da linha dos centros. Tudo se passa, portanto, como se tivéssemos uma colisão elástica unidimensional ao longo dessa linha.

O problema de uma colisão elástica unidimensional foi resolvido em 1, Seção 9.4. Sejam (u_i, U_i) e (u_f, U_f) as componentes de (v_i, V_i) e (v_f, V_f) ao longo da linha dos centros, respectivamente. Temos então, por 1 (9.4.11), adaptada às notações atuais,

$$U_f = \frac{2}{m+M} \left[mu_i + \frac{1}{2}(M-m)U_i \right] \quad (11.4.1)$$

Como as componentes de velocidade perpendiculares à linha dos centros não variam, a (11.4.1) dá então, para a variação de energia cinética da molécula da parede devido à colisão,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M(V_f^2 - V_i^2) &= \frac{1}{2}M(U_f^2 - U_i^2) \\ &= \frac{2M}{(m+M)^2} \left\{ m^2 u_i^2 + \frac{1}{4}[(M-m)^2 - (M+m)^2]U_i^2 + m(M-m)u_i U_i \right\} \\ &= \frac{4mM}{(m+M)^2} \left\{ \frac{1}{2}mu_i^2 - \frac{1}{2}MU_i^2 + \frac{1}{2}(M-m)u_i U_i \right\} \end{aligned}$$

ou, tomando a *média* sobre as colisões (11.3.8),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M \langle V_f^2 \rangle - \frac{1}{2}M \langle V_i^2 \rangle &= \frac{4mM}{(m+M)^2} \left\{ \frac{1}{2}m \langle u_i^2 \rangle - \frac{1}{2}M \langle U_i^2 \rangle + \frac{1}{2}(M-m) \langle u_i U_i \rangle \right\} \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Os movimentos das moléculas da parede não guardam, em média, correlações com os das moléculas de gás e, como a parede está em repouso, o valor médio de U_i deve ser nulo.

Logo,

$$\langle u_i U_i \rangle = \langle u_i \rangle \langle U_i \rangle = 0 \quad (11.4.3)$$

e a (11.4.2) fica

$$\frac{1}{2} M \langle V_f^2 \rangle - \frac{1}{2} M \langle V_i^2 \rangle = \frac{4mM}{(m+M)^2} \left(\frac{1}{2} m \langle u_i^2 \rangle - \frac{1}{2} M \langle U_i^2 \rangle \right) \quad (11.4.4)$$

Uma vez que a parede está em repouso, uma variação de energia cinética média das suas moléculas só pode representar uma variação de energia interna, ou seja, aquecimento da parede, com uma correspondente elevação de temperatura. Mas o gás está em equilíbrio térmico com as paredes, de modo que a temperatura permanece constante. Logo, o 1.º membro da (11.4.4) tem de ser nulo, e concluímos que

$$\frac{1}{2} m \langle u_i^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle U_i^2 \rangle \quad (11.4.5)$$

Como $\langle u_i \rangle$ e $\langle U_i \rangle$ são componentes de velocidades segundo direções quaisquer (a direção da linha dos centros numa colisão varia ao acaso), obtemos, finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle V^2 \rangle} \quad (11.4.6)$$

ou seja, *em equilíbrio térmico, a energia cinética média das moléculas do gás e da parede é a mesma.*

Se tivermos no recipiente uma mistura de dois gases diferentes, com moléculas de massas m e m' , a (11.4.6) também se aplica ao segundo gás, e concluímos então que

$$\boxed{\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m' \langle v'^2 \rangle} \quad (11.4.7)$$

ou seja, *que em equilíbrio térmico a energia cinética média de diferentes moléculas numa mistura gasosa é a mesma.* Logo, moléculas mais pesadas se movem, em média, mais lentamente do que moléculas mais leves.

Estes resultados demonstram a *equipartição da energia cinética de translação* das moléculas à mesma temperatura (condições de equilíbrio térmico), e constituem um caso particular de um resultado muito mais geral, que será mencionado mais adiante, o *teorema da equipartição de energia* (Seção 11.5).

Como a energia cinética média é a mesma para moléculas de todos os gases em equilíbrio térmico, ela só pode depender da temperatura: *a energia cinética média de translação das moléculas de um gás é função apenas da temperatura.* Combinando este resultado com a (11.3.12), obtemos imediatamente várias conseqüências importantes.

(b) Conseqüências

(i) A lei de Boyle

Pela (11.3.13), $PV = \frac{2}{3} \langle \mathfrak{J} \rangle$. Conforme acabamos de ver, $\langle \mathfrak{J} \rangle$ depende apenas da temperatura. Logo, *a temperatura constante, $PV = \text{constante}$, que é a lei de Boyle (9.1.3), deduzida assim a partir da teoria cinética dos gases.*

(ii) A lei de Avogadro

Pela (11.3.11),

$$\frac{P}{\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle} = \frac{2}{3}n \quad (11.4.8)$$

Nas mesmas condições de temperatura e pressão, o 1.º membro da (11.4.8) tem o mesmo valor para todos os gases. Logo, o mesmo vale para o 2.º membro, ou seja, para o número de moléculas por unidade de volume. Vemos portanto que a teoria cinética dos gases explica a lei de Avogadro (pág. 240): *nas mesmas condições de temperatura e pressão, volumes iguais de todos os gases têm o mesmo número de moléculas.*

(iii) Separação isotópica por difusão gasosa

Com o auxílio da (11.3.16), a (11.4.7) se escreve

$$\frac{1}{2}mv_{qm}^2 = \frac{1}{2}m'v_{qm}'^2 \left\{ \boxed{v_{qm} / v_{qm}' = \sqrt{m' / m}} \right\} \quad (11.4.9)$$

ou seja, as velocidades quadráticas médias das moléculas de gases diferentes à mesma temperatura são inversamente proporcionais às raízes quadradas das respectivas massas moleculares. Por exemplo: para o H_2 , é $m = 2$ e para o O_2 é $m' = 32$. Logo, à mesma temperatura, v_{qm} é 4 vezes maior para moléculas de H_2 do que para O_2 .

Quando um gás está confinado num recipiente com uma parede porosa, moléculas do gás atravessam a parede através dos poros, escapando do recipiente por *difusão*; se o recipiente está em contato com a atmosfera, também há difusão de moléculas do ar em sentido inverso, penetrando no recipiente através da parede.

Se os poros forem suficientemente finos e se fizermos vácuo externamente à parede, as moléculas escapam através dos orifícios praticamente sem colidir entre si ou com moléculas de ar, de modo que a velocidade de escape é próxima, em média, de v_{qm} . Nessas condições, a (11.4.9) prediz que *as velocidades relativas de difusão de diferentes gases à mesma temperatura são inversamente proporcionais às raízes quadradas das densidades relativas desses gases.* Esta é a *lei de Graham*, obtida experimentalmente em 1832. Assim por exemplo, a velocidade de difusão do hidrogênio nas condições acima descritas é 4 vezes maior que a do oxigênio.

Este resultado pode ser aplicado para separar isótopos por difusão (isótopos do mesmo elemento têm as mesmas propriedades químicas e não podem portanto ser separados por processos químicos). Este processo é empregado na separação do U^{235} , cuja abundância relativa é de 0,7% no urânio natural, contra $\approx 99,3\%$ de U^{238} .

O gás utilizado é hexafluoreto de urânio, UF_6 . Como as massas moleculares do $U^{235}F_6$ e do $U^{238}F_6$ são, respectivamente, 349 e 352, o enriquecimento máximo ideal em $U^{235}F_6$ após uma difusão através de uma parede porosa é, pela (11.4.9), de $\sqrt{352 / 349} \approx 1,0043$, ou seja, de 0,43% apenas. É preciso portanto repetir o processo um grande número de vezes, usando uma “cascata” de muitos estágios consecutivos. Para atingir 99% de enriquecimento em $U^{235}F_6$, há necessidade de ~ 4.000 estágios.

(c) Temperatura e energia cinética média

Consideremos um gás de moléculas *monoatômicas*, que trataremos como se fossem esferas impenetráveis. Neste caso, a única forma de energia é a energia cinética de translação,

de modo que podemos identificar a energia cinética média total do gás, $\langle \mathfrak{S} \rangle$, com sua *energia interna* U :

$$U = \langle \mathfrak{S} \rangle = \frac{1}{2} Nm \langle v^2 \rangle \quad (11.4.10)$$

onde N é o número total de moléculas do gás contidas dentro do volume V . Vamos tomar para V o volume de 1 mol, de modo que $N = N_0$ é o número de Avogadro. A (11.3.13) fica

$$P = \frac{2}{3} U / V \quad (11.4.11)$$

onde $U = U(T)$ depende apenas da temperatura T (vimos que $\langle \mathfrak{S} \rangle$ só depende de T), conforme deve ser para um gás ideal [cf. (9.2.11)].

Consideremos agora a expressão (10.7.17) da entropia, aplicada a 1 mol de um gás ideal, ou seja, com dU dado pela (10.7.18) e P dado pela (11.4.11):

$$dS = \frac{C_v(T)}{T} dT + \frac{2}{3} \frac{U(T)}{VT} dV. \quad (11.4.12)$$

Como $S = S(V, T)$ [cf. (10.7.5)], temos

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) dT \quad (11.4.13)$$

de modo que, comparando com a (11.4.12), temos

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C_v(T)}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{U(T)}{VT} \quad (11.4.14)$$

Como as operações de derivação parcial em relação a V e T são independentes, podemos aplicá-las em qualquer ordem, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (11.4.15)$$

Mas, pela (11.4.14), $\partial S / \partial T$ não depende de V .

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{C_v(T)}{T} \right] = 0 \quad (11.4.16)$$

Logo, pelas (11.4.15) e (11.4.14), devemos ter

$$0 = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{2}{3} \frac{U(T)}{T} \right] \quad (11.4.17)$$

ou seja, a expressão entre colchetes é *independente da temperatura*, representando portanto uma *constante*. Como $U(T)$, para uma dada temperatura T , tem o mesmo valor para todos os gases pela (11.4.7), concluímos que essa constante é uma *constante universal* R :

$$\frac{2}{3} \frac{U(T)}{T} = R \left\{ U(T) = \frac{3}{2} RT \quad (1 \text{ mol}) \right. \quad (11.4.18)$$

ou finalmente, pela (11.4.10), com $N = N_0$,

$$\langle \mathfrak{S} \rangle_{\text{mol}} = \frac{1}{2} N_0 m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} RT \quad (11.4.19)$$

Substituindo a (11.4.19) na (11.3.13), obtemos, para 1 mol de um gás ideal,

$$\boxed{PV = RT} \quad (1 \text{ mol}) \quad (11.4.20)$$

que é a equação de estado dos gases ideais (9.1.13) (lei dos gases perfeitos), deduzida inteiramente a partir da teoria cinética dos gases. Vemos ao mesmo tempo que a constante universal R não passa da constante universal dos gases (9.1.11). Levando em conta a (11.4.18), vemos também que a (11.4.12) torna-se idêntica à (10.7.21).

Por conseguinte, a teoria cinética dos gases permite deduzir não somente as leis de Boyle e Avogadro, como também a lei dos gases perfeitos, mostrando assim como resultados macroscópicos são obtidos a partir de um modelo microscópico.

A (11.4.18) dá ainda outro resultado fundamental, a relação entre a energia cinética de translação média por molécula e a temperatura:

$$\boxed{\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT} \quad (11.4.21)$$

onde

$$\boxed{k = R / N_0} \quad (11.4.22)$$

é a constante de Boltzmann, que, sendo a razão de duas constantes universais, é também uma constante universal. Pelas (9.1.11) e (11.1.1), temos

$$k = \frac{8,314 \text{ J / mol K}}{6,023 \times 10^{23} \text{ moléculas / mol}}$$

o que dá

$$\boxed{k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J / molécula K}} \quad \text{constante de Boltzmann} \quad (11.4.23)$$

A (11.4.21) fornece uma interpretação microscópica da temperatura absoluta T , como medida da energia cinética média de translação das moléculas de um gás ideal. Por isso, esta energia é chamada energia de agitação térmica.

Exemplo: Qual é a energia cinética média por molécula à temperatura ambiente?

Tomando esta temperatura como de $22^\circ\text{C} = 295 \text{ K}$, a (11.4.21) dá, com a (11.4.23),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle &\approx \frac{2}{3} \times 295 \text{ K} \times 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{molécula K}} \\ &= \frac{2}{3} \times 4,07 \times 10^{-21} \text{ J} \approx \frac{3}{2} \times 0,025 \text{ eV} \approx 0,04 \text{ eV} \end{aligned}$$

onde exprimimos o resultado também em eletrón-volts (eV), lembrando que (1, Seção 7.5)

$$1 \text{ eV} \approx 1,612 \times 10^{-19} \text{ J}$$

É útil lembrar que, para $T = \text{temperatura ambiente}$,

$$kT \approx 0,025 \text{ eV} = \frac{1}{40} \text{ eV} \quad (T = 295 \text{ K}) \quad (11.4.24)$$

Notemos finalmente que, como R é uma constante macroscópica, que pode ser determinada experimentalmente pela equação de estado dos gases ideais, qualquer experiência que permite determinar k estará ao mesmo tempo servindo para determinar o número de Avogadro N_0 [cf. (11.4.22)].

11.5 — Calores específicos e equipartição da energia

(i) Gás ideal monoatômico

Pela (9.3.11), a *capacidade térmica molar a volume constante* de um gás ideal é dada por

$$C_v = \frac{d}{dT} U_{\text{mol}}(T) \quad (11.5.1)$$

onde U_{mol} é a energia interna de 1 mol do gás, que só depende de T . Tratando-se de um gás ideal, a energia de interação entre as moléculas do gás é desprezível, por hipótese, de forma que a *energia interna do gás é a soma das energias das moléculas*.

Até agora, a única forma de energia de cada molécula que consideramos é a *energia cinética de translação*, como se a molécula fosse um ponto material, capaz apenas de movimento de translação, ou uma esfera rígida, incapaz de entrar em rotação. Este modelo [cf. (11.4.10)] leva à (11.4.19),

$$\left. \underbrace{U_{\text{mol}}(T) = \frac{3}{2} RT}_{(11.5.1)} \right\} \rightarrow \boxed{C_v = \frac{3}{2} R} \quad (\text{monoatômico}) \quad (11.5.2)$$

o que, pelas (9.3.9) e (9.4.8), daria

$$\boxed{C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}} \quad (\text{monoatômico}) \quad (11.5.3)$$

Levando em conta a (9.1.11), obtemos os seguintes valores numéricos:

$$C_v \approx 2,98 \text{ cal/mol K}, \quad C_p \approx 4,97 \text{ cal/mol K}, \quad \gamma \approx 1,67 \quad (11.5.4)$$

Os valores experimentais obtidos para *gases monoatômicos* como He e A, à temperatura ambiente, são muito próximos desses, de forma que o modelo se aplica muito bem a esses gases, levando-nos a concluir que suas moléculas se comportam como se fossem dotadas apenas de energia cinética de translação.

(ii) O teorema de equipartição da energia

Conforme veremos logo, para gases não-monoatômicos tem-se geralmente $C_v \geq \frac{3}{2} R$ o que é uma indicação direta de que, além da energia cinética de translação, é preciso levar em conta outras contribuições à energia das moléculas.

Se tratarmos cada átomo numa *molécula diatômica* como uma partícula puntiforme (ponto material), por analogia com o caso monoatômico, a molécula, como sistema de duas partículas, terá 6 graus de liberdade (1, Seção 11.1). Podemos associar 3 delas às coordenadas (X, Y, Z) do centro de massa, cuja energia cinética

$$\tau_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \quad (11.5.5)$$

é a *energia cinética de translação* da molécula.

Os outros 3 graus de liberdade podem ser associados às coordenadas relativas do vetor de posição \mathbf{r} de uma das partículas em relação à outra (1, Seção 10. 1). Podemos tomar essas coordenadas (x, y, z) como a distância $r = |\mathbf{r}|$ entre os átomos e dois ângulos, que definem a orientação de \mathbf{r} no espaço.

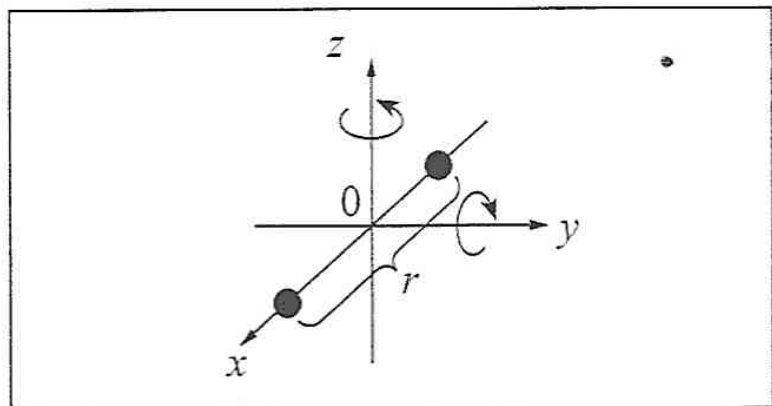


Figura 11.5 — Molécula diatômica

Se r permanece fixo, a molécula se comporta como um haltere rígido (Fig. 11.5), e, associada aos dois ângulos, temos a possibilidade de rotação em torno de dois eixos perpendiculares (para partículas puntiformes, não tem sentido falar da rotação do haltere em torno de seu próprio eixo). Temos de associar portanto a estes graus de liberdade internos a *energia cinética de rotação*.

$$\tau_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad (11.5.6)$$

onde ω_1 e ω_2 são as velocidades angulares de rotação em torno dos dois eixos ortogonais e I_1 e I_2 são os momentos de inércia correspondentes (1, Seção 12.1).

Em geral, porém, a distância interatômica r também pode variar. Como a molécula é um sistema ligado, deve comportar-se como um oscilador harmônico para pequenos desvios do equilíbrio (Seção 3.1), o que leva a uma *energia cinética de vibração*

$$\tau_{\text{vibr}} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \quad (11.5.7)$$

onde μ é a massa reduzida (1, Seção 10. 10) e uma *energia potencial de vibração* (Seção 3.2)

$$U_{\text{vibr}} = \frac{1}{2} K r^2 \quad (11.5.8)$$

onde K é a constante de força associada à vibração.

Note-se que todas as contribuições (11.5.5) a (11.5.8) à energia são *funções quadráticas de velocidades ou coordenadas* (lineares ou angulares). Segundo um teorema fundamental da mecânica estatística clássica, o *teorema de equipartição da energia* (cuja demonstração requer métodos mais elaborados, que não poderemos desenvolver aqui), numa *situação de equilíbrio térmico à temperatura T* , a *energia média associada a cada termo quadrático na expressão da energia total é igual $\frac{1}{2} kT$ por molécula*.

Assim, para a energia cinética de translação (11.5.5), temos

$$\frac{1}{2} M \langle \dot{X}^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle \dot{Y}^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle \dot{Z}^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad (11.5.9)$$

o que corresponde à equipartição da energia cinética vista acima, e leva à (11.4.21):

$$\langle \tau_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (11.5.10)$$

Como a energia cinética de rotação (11.5.6) é a soma de dois termos quadráticos, temos

$$\langle \tau_{\text{rot}} \rangle = kT \quad (11.5.11)$$

Analogamente, como a energia total. de vibração é a soma dos dois termos quadráticos (11.5.7) e (11.5.8),

$$\langle \tau_{\text{vibr}} + U_{\text{vibr}} \rangle = kT \quad (11.5.12)$$

Já havíamos visto na (3.2.33) que, para um oscilador harmônico, a energia potencial média é igual à energia cinética média.

(iii) Calores específicos para vários modelos

Veamos agora as conseqüências destes resultados para C_V , C_P e γ de vários modelos possíveis de gases ideais. Seja q o número de termos quadráticos na expressão da energia total de uma molécula. Pela equipartição da energia, a energia total média por molécula será então $qkT/2$. A energia por mol se obtém multiplicando por N_0 , de modo que (1 1.4.22)

$$U_{\text{mol}}(T) = \frac{1}{2}qRT \quad (11.5.13)$$

e as (11.5.1), (9.3.9) e (9.4.8) dão

$$\boxed{C_V = \frac{q}{2}R, \quad C_P = \frac{q+2}{2}R, \quad \gamma = \frac{q+2}{q}} \quad (11.5.14)$$

Como o valor mínimo de q é 3, vemos que

$$\boxed{1 < \gamma \leq \frac{5}{3}} \quad (11.5.15)$$

conforme (11.3.17).

Para o modelo de partícula puntiforme das moléculas monoatômicas, tem-se $q = 3$, e a (11.5.14) se reduz à (11.5.3), levando aos valores (11.5.4). Para o modelo de haltere de moléculas diatômicas (sem vibração), é $q = 5$, e a (11.5.14) dá:

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{5}{2}R \approx 4,97 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}; & C_P &= \frac{7}{2}R \approx 6,96 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \\ \gamma &= \frac{7}{5} = 1,40 & & \text{(diatômica rígida)} \end{aligned} \quad (11.5.16)$$

Levando em conta também a possibilidade de vibração de moléculas diatômicas, é $q = 7$, e vem

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{7}{2}R \approx 6,96 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}; & C_P &= \frac{9}{2}R \approx 8,95 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \\ \gamma &= \frac{9}{7} = 1,29 & & \text{(diatômica com vibrações)} \end{aligned} \quad (11.5.17)$$

Para uma molécula *poliatômica* com mais de 2 átomos, temos sempre a possibilidade de rotação em torno de 3 eixos ortogonais, de modo que, mesmo tratando-a como um corpo rígido, é no mínimo $q = 6$; o que dá

$$C_V \geq 3R, \quad C_P \geq 4R, \quad \gamma \leq \frac{4}{3} \quad \text{(poliatômica)} \quad (11.5.18)$$

Em geral, teremos também neste caso diversos modos normais de vibração (Seção 4. 6), de forma que podemos esperar valores de q bastante superiores a 3.

Podemos também aplicar o teorema de equipartição da energia ao cálculo da *capacidade térmica molar de um sólido*. Classicamente, um sólido pode ser pensado como um sistema de partículas (átomos ou moléculas) que ocupam posições de equilíbrio bem definidas, como numa rede cristalina. A energia térmica estaria associada a pequenas vibrações dessas partículas em torno de suas posições de equilíbrio. Como há 3 direções independentes de oscilação para cada partícula, a energia média por partícula seria o triplo da (11.5.12), levando a ($q = 6$)

$$C_V = 3R \approx 5,96 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \quad (\text{sólidos})$$

(11.5.19)

que é a *lei de Dulong e Petit* (Seção 8.2).

(iv) Confronto com a experiência

A tabela abaixo dá os valores de γ , C_V e $(C_P - C_V)/R$ para diversos gases, à temperatura ambiente.

| | monoatômico | | diatômico | | | | poli-atômico |
|-------------------|-------------|-------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| Gás | He | A | H ₂ | N ₂ | O ₂ | Cl ₂ | NH ₃ |
| γ | 1,66 | 1,67 | 1,41 | 1,40 | 1,40 | 1,35 | 1,31 |
| C_V (cal/mol K) | 2,98 | 2,98 | 4,88 | 4,96 | 5,03 | 6,15 | 6,65 |
| $(C_P - C_V)/R$ | 1,001 | 1,008 | 1,00 | 1,01 | 1,00 | 1,09 | 1,06 |

Para um gás ideal, é $(C_P - C_V)/R = 1$, de modo que a última linha da tabela dá uma idéia da validade de tratar cada gás nessas condições como um gás ideal.

Para os gases monoatômicos, os valores experimentais são muito próximos dos da (11.5.4), correspondendo ao modelo com $q = 3$. Para H₂, N₂ e O₂, os valores correspondem aproximadamente aos da (11.5.6), ou seja $q = 5$. Já para outro gás diatômico, Cl₂, os valores experimentais são intermediários entre os da (11.5.16) e os da (11.5.17) ($q = 7$), indicando que, além da rotação, a molécula também deve entrar em vibração, mas sem atingir $q = 7$. Como explicar isso? Já a molécula de NH₃ se comporta aproximadamente como se tivesse $q = 7$, quando, pelo número de átomos, seria de se esperar que o valor de q fosse mais elevado.

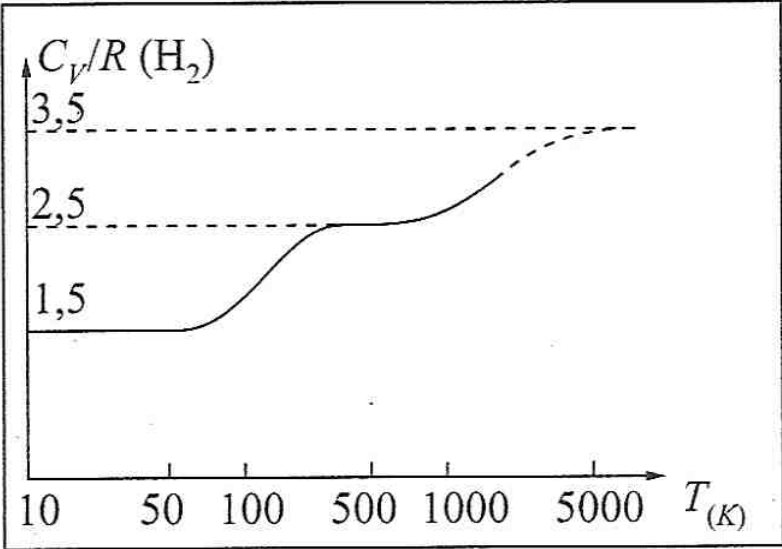


Figura 11.6 — C_V/R para H₂

Os valores da tabela são todos à temperatura ambiente e, enquanto o gás se comportar como ideal, deveriam ser independentes da temperatura. A experiência mostra que isto também não acontece. Assim, por exemplo, a Fig. 11.6 dá o comportamento de C_V/R em função de T observado para o H₂. À temperatura ambiente, é $C_V/R = 5/2$, mas, para $T < 100$ K, o valor cai para $\approx 3/2$, e, acima de 3.200 K (quando o hidrogênio se dissocia), parece estar tendendo para $7/2$. É como se as moléculas de H₂ pudessem girar e vibrar ($q = 7$) a temperaturas elevadas, e as vibrações ficassem “congeladas” abaixo de ~ 1.000 K ($q = 5$); abaixo de ~ 100 K, as rotações também se “congelam” e a molécula se comporta como um ponto material ($q = 3$).

Este comportamento, inteiramente incompreensível pelas leis da mecânica clássica, é chamado de “congelamento dos graus de liberdade”, e também é observado para outros gases quando se mede a variação dos calores específicos com a temperatura.

Analogamente, medindo o calor específico de um sólido, como a prata, em função de T , a baixas temperaturas, obtemos os resultados representados na Fig. 11.7: C_V/R se aproxima de 3 (lei de Dulong e Petit (11.5.19)) a temperaturas suficientemente elevadas, mas decresce com T e $\rightarrow 0$ quanto $T \rightarrow 0$. O mesmo comportamento é observado para outros sólidos.

Pelo teorema de equipartição da energia, todos os graus de liberdade, incluindo translação, rotação e vibração, deveriam contribuir igualmente, a qualquer temperatura.

A contradição se torna ainda mais séria quando levamos em conta que os átomos constituintes das moléculas não são pontos materiais, mas têm eles próprios uma estrutura interna, formada pelo núcleo atômico e por elétrons. Cada elétron é uma partícula que também deveria contribuir ao calor específico, pelo teorema de equipartição da energia; no entanto, nenhuma dessas contribuições aparece. Analogamente, num metal como a prata, existem elétrons livres, que se comportam como se constituíssem um gás, mas a contribuição dos elétrons livres ao calor específico também não é observada.

Encontramos aqui pela primeira vez, através dos reflexos dinâmicos da estrutura molecular sobre os calores específicos, uma indicação clara de que a mecânica clássica deixa de ser aplicável no domínio atômico. Maxwell foi provavelmente o primeiro a perceber este problema; numa conferência que deu em 1869, referiu-se a ele nestes termos: “Apresentei-lhes agora o que considero como a maior dificuldade até hoje encontrada pela teoria molecular”.

A explicação destes resultados só veio a ser fornecida pela mecânica quântica, e está ligada a uma das diferenças mais profundas entre ela e a mecânica clássica: a *quantização da energia*.

A *energia de translação* das moléculas, tal como a de um sistema mecânico clássico, pode variar continuamente, e o resultado (11.5.10) permanece válido. As diferenças aparecem quando consideramos graus de liberdade associados ao movimento interno, tais como rotação e vibração, ou à estrutura eletrônica.

A *energia interna* de sistemas atômicos, tais como átomos e moléculas, só assume valores *discretos*, em lugar de ter variação contínua. Esses valores definem *níveis quantizados de energia*, o que se aplica à energia rotacional, vibracional ou eletrônica.

À medida que elevamos a temperatura, aumenta a energia cinética média das moléculas. Entretanto, para que essa energia possa ser transferida para energia interna, numa colisão entre moléculas, é necessário efetuar uma *transição quântica* entre dois níveis discretos de energia interna. Para isso é preciso fornecer uma energia mínima, igual à diferença de energia entre os dois níveis. Enquanto a energia cinética média (temperatura) não atinge esse patamar, o grau de liberdade correspondente permanece “congelado”.

Isto explica os degraus observados no gráfico de $C_V(T)$ para o H_2 , por exemplo (Fig. 11.6); a temperaturas suficientemente baixas, só se observa a energia de translação. Graus de liberdade rotacionais começam a ser excitados, para o H_2 , a temperaturas $\gtrsim 50$ K. Graus de liberdade vibracionais só começam a ser excitados, neste caso, para $T \gtrsim 500$ K. Para excitar graus de liberdade eletrônicos, seria preciso atingir temperaturas bem mais elevadas.

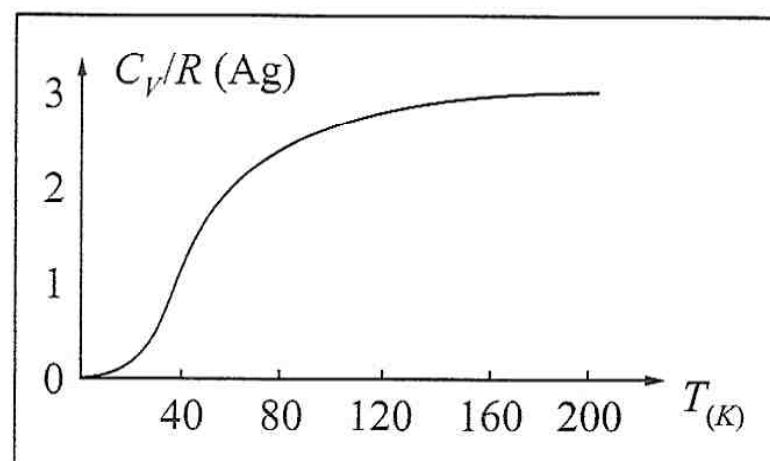


Figura 11.7 — C_V/R para Ag

11.6 — Livre percurso médio

Vimos na Seção 11.3 que a velocidade média das moléculas de um gás à temperatura ambiente é, tipicamente, da ordem de centenas de metros por segundo. Por outro lado, quando destampamos um vidro de perfume numa extremidade de um quarto, o cheiro leva um tempo apreciável para se transmitir até a outra extremidade, embora moléculas do perfume não devessem levar mais do que alguns centésimos de segundo para atravessar essa distância, movendo-se com a velocidade média. Objeções deste tipo foram levantadas contra a teoria cinética dos gases nos seus primórdios.

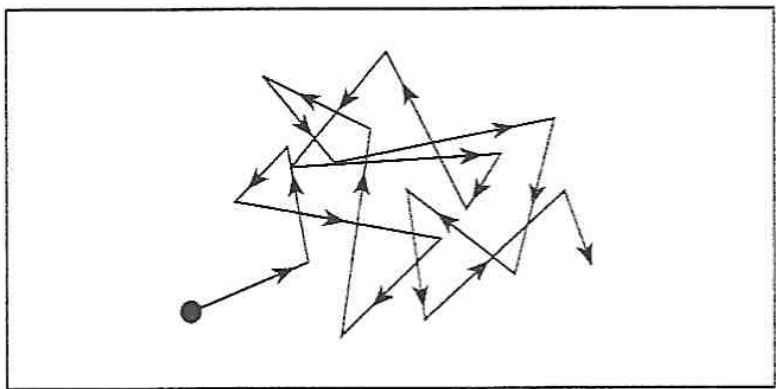


Figura 11.8 — Trajetória típica de uma molécula

Esta aparente dificuldade é removida quando levamos em conta as colisões entre as moléculas do gás. Em consequência destas colisões, a trajetória típica de uma molécula no gás é um caminho em ziguezague extremamente tortuoso (Fig. 11.8), em que a molécula se move com movimento retilíneo e uniforme entre cada duas colisões consecutivas. As moléculas de perfume no exemplo acima se propagam por um processo de difusão, cuja velocidade média efetiva é muito menor do que se viajassem em linha reta, sem sofrer colisões, o que explica o efeito observado (cf. Cap. 12).

A distância percorrida pela molécula entre duas colisões flutua ao longo de sua trajetória. O valor médio dessa distância, \bar{l} , chama-se livre percurso médio.

Se tratarmos as moléculas como esferas impenetráveis de diâmetro d , é de se esperar que \bar{l} seja tanto maior quanto menor for d . Com efeito, neste modelo, as moléculas só colidem entre si quando encostam uma na outra, ou seja, quando se aproximam a uma distância d . Quanto menor for d , menor será a chance de que ocorra uma colisão, e maior o valor de \bar{l} . No limite de moléculas puntiformes ($d \rightarrow 0$), o livre percurso médio seria infinito ($\bar{l} \rightarrow \infty$).

Na realidade, as moléculas não são geralmente esféricas, e não se “encostam” uma na outra durante uma colisão: as forças intermoleculares repulsivas são de curto alcance, mas há também forças atrativas de maior alcance (1, Seção 6.5), e uma colisão real corresponde a uma deflexão contínua da trajetória molecular; por isso, d deve ser pensando como um diâmetro efetivo das moléculas.

O livre percurso médio também deve aumentar à medida que o gás se toma mais rarefeito, porque a frequência de colisão diminui com a diminuição do número médio de moléculas n por unidade de volume.

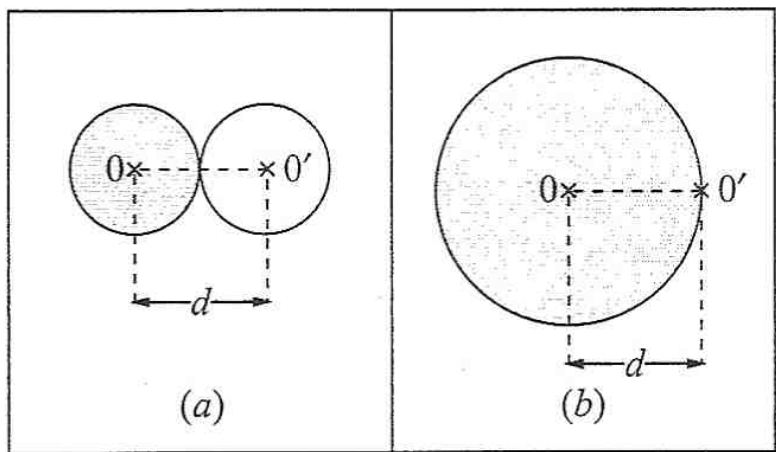


Figura 11.9 — Volume excluído

Duas moléculas colidem quando seus centros O e O' se aproximam de uma distância d (Fig. 11.9(a)), ou, o que é equivalente, quando o centro O' toca a superfície de uma esfera de raio d com centro em O (Fig. 11.9(b)). Podemos dizer que o volume desta esfera é o volume excluído em torno de O , dentro do qual nenhum centro de outra molécula pode penetrar.

A esfera de raio d chama-se esfera de exclusão ou esfera de influência. Note-se que, como seu raio é o dobro do raio da molécula, o volume de exclusão é 8 vezes maior que o volume efetivo v_0 , de uma molécula:

$$\frac{4}{3}\pi d^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 8v_0$$

(11.6.1)

Se imaginamos a molécula de centro O rodeada por sua esfera de influência, todas as outras moléculas podem ser tratadas como se fossem puntiformes no que diz respeito a suas colisões com a molécula considerada.

Enquanto O percorre sua trajetória em ziguezague, a esfera de influência varre um volume que é uma espécie de cilindro quebrado com eixo na trajetória e de raio d (Fig. 11.10). O número médio de colisões sofridas pela molécula de centro O durante sua trajetória coincide com o número médio de moléculas cujos centros seriam varridos por esse volume, ou seja, é igual ao volume do cilindro multiplicado por n .

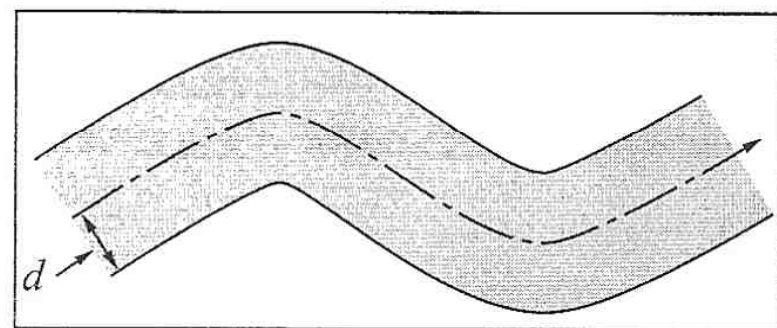


Figura 11.10 — Volume varrido

A área da secção transversal do cilindro é

$$\sigma = \pi d^2 \quad (11.6.2)$$

e é chamada de *seção de choque total* de colisão, ou *seção eficaz*, da molécula. Podemos considerá-la como a *área efetiva que a molécula bloqueia*, ou oferece como alvo, para os centros de outras moléculas. Esta grandeza desempenha um papel extremamente importante.

Para uma primeira estimativa de \bar{l} , vamos imaginar que todas as moléculas do gás, exceto a molécula de centro O, estão paradas, enquanto esta molécula se move com velocidade média \bar{v} (que deve ser da ordem de grandeza da velocidade quadrática média (11.3.16)).

Durante um intervalo de tempo t , o espaço percorrido (em ziguezague) pelo centro O será, em média, igual a $\bar{v}t$, e o volume do cilindro varrido será

$$V = \sigma \bar{v}t \quad (11.6.3)$$

O número médio de colisões sofridas pela molécula de centro O durante o intervalo de tempo t será então, como vimos, o número médio de moléculas contidas nesse cilindro, ou seja,

$$nV = n\sigma \bar{v}t \quad (11.6.4)$$

A *frequência média de colisão* \bar{f} , ou seja, o número médio de colisões por unidade de tempo, obtém-se dividindo por t :

$$\bar{f} = n\sigma \bar{v} \quad (11.6.5)$$

Dividindo a distância total percorrida por unidade de tempo, que é igual a \bar{v} , pelo número médio de colisões por unidade de tempo, \bar{f} , obtém-se o livre percurso médio \bar{l} :

$$\bar{l} = \bar{v} / \bar{f} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\pi n d^2} \quad (11.6.6)$$

que, conforme havíamos previsto, é inversamente proporcional a n e aumenta à medida que d diminui.

Entretanto, este resultado foi obtido supondo que a molécula considerada se movia, todas as demais permanecendo em repouso. Qual é o efeito do movimento das outras moléculas?

Ele não afeta o percurso médio \bar{v} por unidade de tempo da molécula considerada, que aparece no numerador da (11.6.6), mas modifica a expressão (11.6.5) da frequência média de colisão \bar{f} , que foi utilizada no denominador da (11.6.6).

No cálculo de \bar{f} , o que deve intervir não é \bar{v} , mas sim \bar{v}_{rel} , onde \bar{v}_{rel} é a *velocidade relativa* entre duas moléculas, a única que intervém no processo de colisão (a velocidade do CM das

duas moléculas não afeta a colisão). Assim, por exemplo, uma molécula que se mova na mesma direção e sentido que a molécula considerada, com a mesma velocidade v , não colidirá com ela; outra que se mova com velocidade $-v$, terá velocidade relativa $2v$, e uma que se mova com velocidade v numa direção perpendicular terá velocidade relativa $\sqrt{2}v$. Em média sobre todas as direções, a velocidade relativa de um grupo de moléculas de mesma velocidade escalar v será maior que v , o que afeta o valor de \bar{f} :

$$\bar{f} = n\sigma\bar{v}_{\text{rel}} \quad (11.6.7)$$

em lugar da (11.6.5).

Para estimar o valor de \bar{v}_{rel} , consideremos duas moléculas de velocidades \mathbf{v} e \mathbf{v}' que colidem.

A velocidade relativa de colisão será

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$$

o que dá

$$v_{\text{rel}}^2 = v^2 + v'^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \quad (11.6.8)$$

onde $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = vv' \cos \theta$ (θ = ângulo entre as velocidades), e θ assume todos os valores possíveis. Logo, tomando valores médios,

$$\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle = vv' \langle \cos \theta \rangle = 0 \quad (11.6.9)$$

o que dá

$$\langle v_{\text{rel}}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle = 2v_{\text{qm}}^2 \quad (11.6.10)$$

pois, tratando-se de moléculas idênticas,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = v_{\text{qm}}^2$$

pela (11.3.16).

Identificando v_{qm} com \bar{v} , a (11.6.10) dá então

$$\boxed{\bar{v}_{\text{rel}} = \sqrt{2}\bar{v}} \quad (11.6.11)$$

Substituindo na (11.6.7) e levando o resultado na (11.6.6), obtemos finalmente para o *livre percurso médio*

$$\boxed{\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi nd^2}} \quad (11.6.12)$$

Um cálculo mais detalhado, levando em conta a distribuição das velocidades moleculares, conduz ao mesmo resultado.

Valores numéricos: O diâmetro molecular efetivo de uma “molécula de ar” (ou seja, de N_2 ou de O_2) é de ordem de $3,7 \times 10^{-10}$ m, de modo que

$$\sigma = \pi d^2 \approx 4,2 \times 10^{-19} \text{ m}^2$$

Nas condições NTP, 1 mol de ar = 22,4 l = $2,24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ contém $N_0 \approx 6 \times 10^{23}$ moléculas, de forma que o número médio de moléculas por unidade de volume é

$$n \approx 6 \times 10^{23} / 2,24 \times 10^{-2} \quad \text{moléculas / m}^3$$

Substituindo os valores de n e σ na (11.6.12), obtemos

$$\bar{l} \approx 6 \times 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{ar, NTP}) \quad (11.6.13)$$

O volume médio ocupado por uma molécula nessas condições é $1/n \approx 37 \times 10^{-27} \text{ m}^3 \sim \bar{\delta}^3$, onde $\bar{\delta}$ é o espaçamento médio entre as moléculas, de modo que $\bar{\delta} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ m}$. Vemos portanto que

$$\bar{l} \gg \bar{\delta} \gg d \quad (11.6.14)$$

A condição $\bar{\delta} \gg d$ verifica a hipótese básica (2) da pág. 241 (diâmetro molecular efetivo \ll distância média entre as moléculas). A condição $\bar{l} \gg \bar{\delta}$ (no caso, o livre percurso médio é cerca de vinte vezes maior que o espaçamento médio entre as moléculas) mostra que uma molécula atravessa em média muitas distâncias intermoleculares antes de colidir com outra.

Por outro lado, o valor (11.6.13) ainda representa uma distância microscópica, explicando o que ocorre com um vidro de perfume destampado (pág. 256): a trajetória de uma molécula passa por um número imenso de ziguezagues antes de cobrir uma distância macroscópica. Tomando $\bar{v} \approx v_{\text{qm}} \approx 485 \text{ m/s}$ para o ar nas condições NTP (pág. 245), a (11.6.6) e a (11.6.13) dão para a frequência média de colisão, neste caso,

$$\bar{f} = \bar{v} / \bar{l} \approx \frac{48,5}{6} \times 10^9 \text{ s}^{-1} \sim 8 \times 10^9 \text{ colisões/s}$$

e o intervalo de tempo médio entre duas colisões sucessivas é

$$1/\bar{f} \approx 1,2 \times 10^{-10} \text{ s} \quad (\text{ar, NTP})$$

A (11.6.12) mostra que, para um dado gás (σ dado), \bar{l} só depende (inversamente) da densidade n de moléculas, ou seja, é *inversamente proporcional à pressão*. Assim, se passarmos de $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$ a 1 mm Hg , \bar{l} para o ar se torna $\approx 4,6 \times 10^{-5} \text{ m} \sim 0,05 \text{ mm}$. Num recipiente em alto vácuo, a uma pressão $P \sim 10^{-6} \text{ mm Hg}$, tem-se $\bar{l} \sim 50 \text{ m}$, o que já é usualmente maior do que as dimensões do recipiente. Neste caso o livre percurso não será mais determinado pelas colisões entre moléculas, mas por colisões com as paredes do recipiente. Este é o regime desejado, por exemplo, num acelerador de partículas, onde queremos evitar colisões entre as partículas do feixe e moléculas do ar residual.

11.7 — Gases reais. A equação de Van der Waals

Até aqui, tratamos somente um gás ideal, o que corresponde a desprezar as interações entre as moléculas. Num gás real, elas têm de ser levadas em conta. A força típica de interação (1, Seção 5.2) entre duas moléculas cujos centros estão separados por uma distância r comporta-se da forma indicada na Fig. 11.11. A distâncias menores que r_0 , ela é fortemente repulsiva, e cresce tão rapidamente que pode ser esquematizada por uma parede impenetrável em $r \approx r_0$. Se existisse somente esta componente repulsiva, as moléculas se comportariam como esferas impenetráveis de raio $\approx r_0$. Este é o modelo de “bolas de bilhar” microscópicas que utilizamos na discussão do livre percurso médio, com $d \approx 2r_0$.

Para $r > r_0$, a força se torna atrativa: a atração máxima ocorre pouco além de r_0 , depois do que cai rapidamente (forças de Van der Waals), de modo que o alcance das forças atrativas não é muito maior que r_0 .

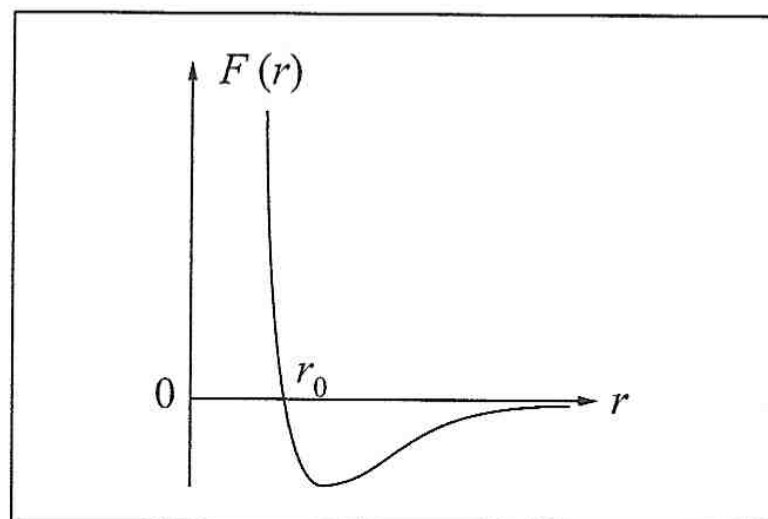


Figura 11.11 — Força de interação entre duas moléculas

A equação de estado de um gás real difere da de um gás ideal tanto devido ao efeito da componente repulsiva (tamanho finito das moléculas) como da componente atrativa das forças intermoleculares. Em 1873, J. D. Van der Waals formulou uma equação de estado para descrever um gás real, procurando levar em conta, pelo menos em primeira aproximação, ambos os efeitos, conforme discutiremos a seguir.

(a) Efeito do tamanho finito das moléculas:

Vimos na (11.6.1) que, para fins de cálculo do livre percurso médio, o volume de exclusão associado a cada molécula, dentro do qual não pode penetrar o centro de outra molécula, é dado por

$$\frac{4}{3}\pi d^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r_0^3 = 8v_0$$

onde $d = 2r_0$ é o diâmetro efetivo da molécula e v_0 o seu volume efetivo. Assim, poderíamos tratar as moléculas como pontos materiais (identificados com os respectivos centros), desde que se exclua um volume v_0 em torno de cada uma.

Assim, se N é o número total de moléculas no volume V , o volume total do recipiente disponível para ser percorrido pelo centro de uma molécula seria

$$V - 8(N - 1)v_0 \approx V - 8Nv_0 \quad (11.7.1)$$

uma vez que, para cada molécula, existem $(N - 1)$ esferas de exclusão, e N é tão grande que podemos tomar $N - 1 \approx N$. Poderíamos pensar então que basta substituir V por $V - 8Nv_0$ na lei dos gases perfeitos para levar em conta o tamanho finito das moléculas.

Entretanto, V entrou na dedução da equação de estado através de $n = N/V$ na (11.3.11), que entra no cálculo do número de colisões por unidade de tempo das moléculas com as paredes: esse número é proporcional a n [cf. (11.3.3)].

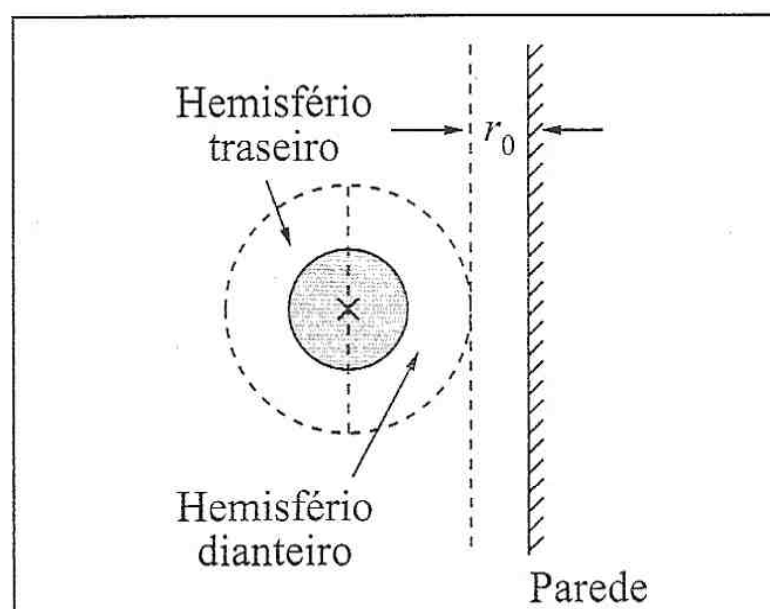


Figura 11.12 — Hemisfério de exclusão

Para que uma molécula colida com uma parede, é necessário que seu centro se aproxime da parede a uma distância menor que $r_0 = d/2$. Logo, somente o hemisfério *dianteiro* da esfera de exclusão associada a cada molécula, ou seja, aquele voltado para a parede (Fig. 11.12) é eficaz na exclusão de centros de outras moléculas que possam colidir com a parede: moléculas cujos centros estejam no hemisfério traseiro estarão automaticamente a uma distância $> r_0$ da parede e não colidirão com ela. Logo, do ponto de vista do efeito do tamanho finito sobre o número de colisões por unidade de tempo com as paredes, somente o hemisfério dianteiro de cada esfera de exclusão deve ser considerado. O valor eficaz de n na (11.3.11) obtém-se então pela substituição

$$V \rightarrow V - 4Nv_0 \quad (11.7.2)$$

ou seja, o volume total excluído é apenas a metade do que foi levado em conta na (11.7.1).

Seja v o volume molar, ou seja o volume de 1 mol do gás: a equação de estado dos gases ideais (11.4.20) se escreveria $Pv = RT$.

Neste caso, $N = N_0$ é o número de Avogadro, de forma que a (11.7.2) fica

$$v \rightarrow v - b \quad (11.7.3)$$

onde

$$b = 4N_0 v_0 = 4N_0 \times \frac{4}{3} \pi v_0^3 \quad (11.7.4)$$

é uma constante característica do gás (dependente de r_0) chamada de *covolume*.

Efetuada a substituição (11.7.3) na lei dos gases perfeitos, obtemos

$$P = \frac{RT}{v - b} \quad (1 \text{ mol}) \quad (11.7.5)$$

equação de estado que já havia sido proposta por Clausius para levar em conta o tamanho finito das moléculas.

As isotermas associadas à (11.7.5) (Fig. 11.13) são hipérboles, como no caso de um gás ideal (Fig. 9.2), com a assíntota vertical deslocada para $v = b$ em lugar de $v = 0$: seria preciso exercer pressão infinita para baixar o volume molar v até o covolume b . Na realidade, num modelo de esferas impenetráveis, o sistema se torna incompressível (o que podemos associar à transição do gás para o líquido) quando as moléculas estão todas se tocando, o que corresponderia a um volume inferior a b , mas a dedução que fizemos não pode ser extrapolada a este caso limite.

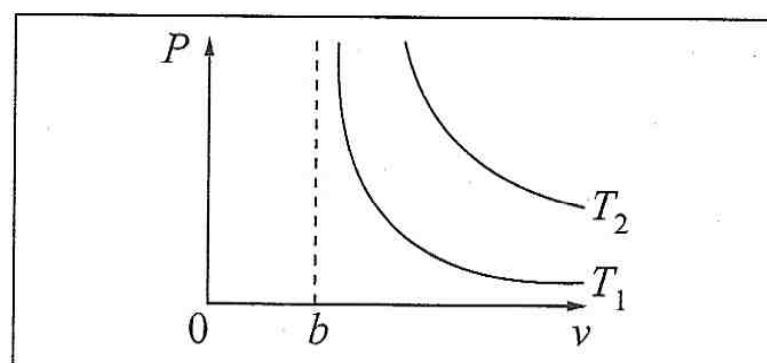


Figura 11.13 — Isotermas de Clausius

(b) Efeito da interação atrativa

Levamos em conta na (11.7.5) o efeito da parte repulsiva das forças de interação $F(r)$ entre as moléculas (Fig. 11.11). Vejamos agora o efeito da interação atrativa ($r > r_0$), que também cai muito rapidamente (forças de Van der Waals), de modo que seu alcance é também da ordem de grandeza de r_0 .

Uma molécula no interior do gás é atraída por outras moléculas, em média distribuídas em torno dela uniformemente e isotropicamente em todas as direções. Logo, os efeitos da atração das demais moléculas de compensam.

Entretanto, para moléculas que se encontram na vizinhança das paredes, ou seja, aquelas consideradas no cálculo da pressão (Seção 8.3), isto não se aplica, pois todas as demais moléculas do gás ficam situadas no hemisfério traseiro, e a força de atração média resultante por elas exercida (Fig. 11.14) tem sentido oposto à pressão do gás sobre as paredes, correspondendo portanto a uma *diminuição de pressão*.

A força atrativa resultante sobre cada molécula é exercida essencialmente pela camada de moléculas vizinha, de espessura $\sim 2r_0$, uma vez que o alcance das forças atrativas é da ordem de r_0 . A força é proporcional ao número de moléculas nesta camada, que é proporcional à densidade $n = N/V$ de moléculas do gás.

As moléculas que sofrem esta força atrativa são as que se encontram a uma distância $\sim r_0$ da parede, cujo número também é proporcional a n . Como a força atrativa sobre cada uma delas é proporcional a n , a diminuição de pressão é proporcional a n^2 , ou seja, para 1 mol do gás ($N = N_0$), é proporcional a $1/v^2$.

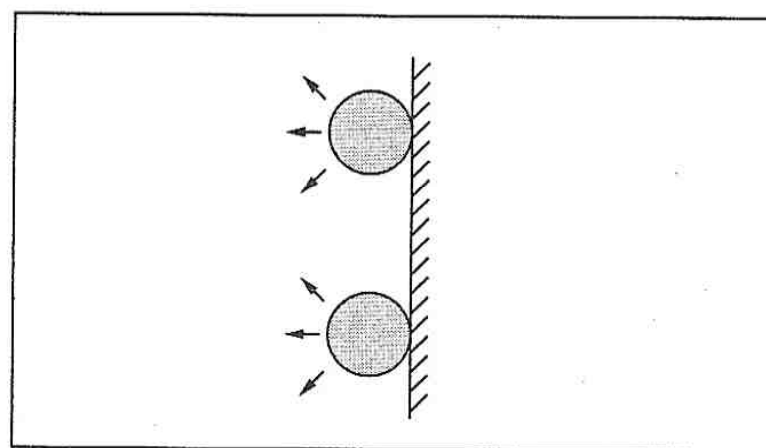


Figura 11.14 — Atração das moléculas perto das paredes

$$\Delta P = -\frac{a}{v^2}, \quad a > 0 \quad (11.7.6)$$

onde a constante positiva a é característica do gás.

O termo ΔP , que é chamado de *copressão*, deve ser acrescentado ao 2.º membro da (11.7.5). Passando-o para o 1.º membro, obtemos finalmente a equação de estado de Van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (1 \text{ mol}) \quad (11.7.7)$$

onde os parâmetros a e b se chamam as *constantes de Van der Waals* da substância considerada.

(c) Isotermas de Van der Waals

As isotermas associadas à (11.7.7) podem ser construídas a partir das correspondentes à (11.7.5), representadas na Fig. 11.13, acrescentando a correção ΔP da (11.7.6) em cada ponto, ou seja, subtraindo a/v^2 da ordenada, para um ponto de abscissa v .

Para v grande, esta correção se torna muito pequena, de modo que as isotermas se aproximam das hipérboles. Para T grande, o 2.º membro da (11.7.5) é bem maior que a correção ΔP dada pela (11.7.6), e as isotermas continuam sendo aproximadamente hiperbólicas. Logo, os desvios em relação ao comportamento de gás ideal ocorrem principalmente a temperaturas mais baixas ou volumes molares menores (gases mais condensados), como seria de esperar.

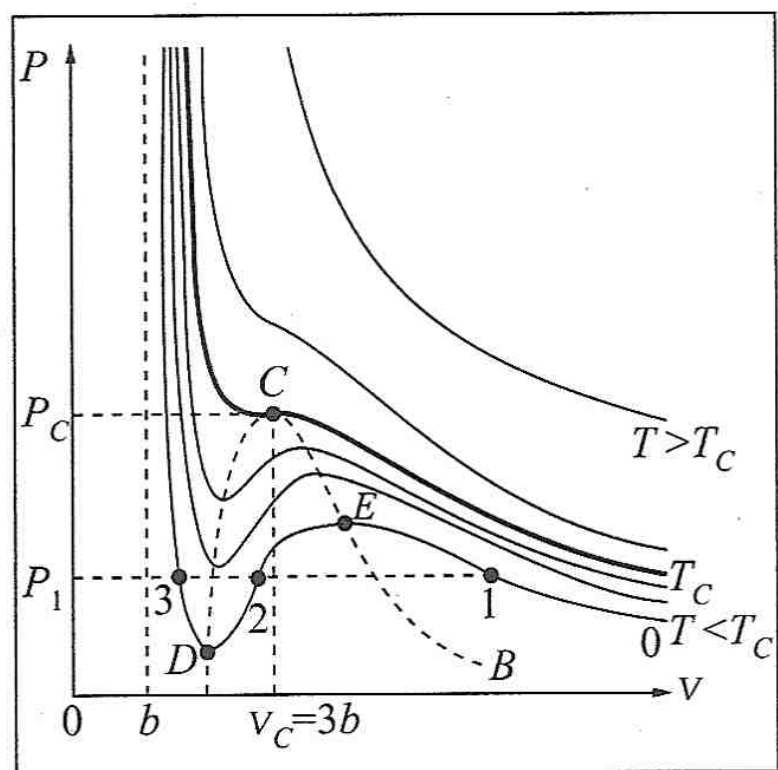


Figura 11.15 — Isotermas de Van der Waals

Para v suficientemente pequeno, a subtração do termo a/v^2 faz baixar as isotermas de distâncias consideráveis em relação às hipérboles, levando a curvas do tipo representado na Fig. 11.15. Para P e T dados, a (11.7.7) é uma equação do 3.º grau em v . Se T é suficientemente baixo, essa equação tem 3 raízes reais, ou seja, uma horizontal $P = P_1 = \text{constante}$ corta a isoterma em 3 pontos 1, 2 e 3 (Fig. 11.15), dando 3 valores distintos de v para os mesmos P e T (veremos logo como interpretar este resultado). À medida que T sobe, esses 3 pontos de intersecção vão se aproximando, até que, para uma dada temperatura $T = T_C$, as 3 raízes se confundem num único ponto C (figura); para $T > T_C$, passa a haver somente uma raiz real.

Para $T < T_C$, cada isoterma passa por um mínimo D e um máximo E (Fig. 11.15), que para $T = T_C$ se confundem em C , que é um ponto de inflexão com tangente horizontal. O lugar geométrico dos máximos e mínimos é uma curva BCD (em linha interrompida na figura), cujo máximo é C .

A equação da curva BCD é, pela (11.7.7),

$$0 = \frac{dP}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \stackrel{\text{pela (11.7.7)}}{=} -\frac{\left(P + \frac{a}{v^2} \right)}{v-b} + \frac{2a}{v^3} \quad (11.7.8)$$

o que dá, resolvendo em relação a P ,

$$P_0 = \frac{a}{v^2} - \frac{2ab}{v^3} \quad (\text{curva } BCD) \quad (11.7.9)$$

As coordenadas do ponto C, máximo desta curva, se obtêm resolvendo

$$0 = \frac{dP_0}{dv} = -\frac{2a}{v^3} + \frac{6ab}{v^4} = \frac{2a}{v^4}(3b - v)$$

cuja raiz é

$$\boxed{v_c = 3b} \quad (11.7.10)$$

O valor de P correspondente, $P = P_c$, se obtém substituindo a (11.7.10) na (11.7.9):

$$P_c = \frac{a}{9b^2} - \frac{2ab}{27b^3} \left\{ \boxed{P_c = \frac{a}{27b^2}} \right. \quad (11.7.11)$$

Finalmente, a temperatura T_c da isoterma que passa pelo ponto C se obtém substituindo as (11.7.10) e (11.7.11) na (11.7.7):

$$\boxed{RT_c = \frac{8a}{27b}} \quad (11.7.12)$$

Esta isoterma chama-se *isoterma crítica*.

É fácil verificar que o *ponto crítico* C é ponto de inflexão da isoterma crítica, com tangente horizontal, calculando d^2P/dv^2 , que, pela (11.7.8), é dado por

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2RT}{(v-b)^2} - \frac{6a}{v^4} \quad (11.7.13)$$

Substituindo nesta expressão os valores críticos (11.7.10) a (11.7.12), resulta, com efeito,

$$\left(\frac{d^2P}{dv^2} \right)_c = 0 \quad (11.7.14)$$

(d) Discussão

Ao longo da porção DE de uma isoterma de Van der Waals com $T < T_c$ (veja Fig. 11.15), v cresce quando P aumenta, ou seja, definindo o *módulo de compressibilidade isotérmico* K_T por [cf. (6.2.1), (6.2.11)]

$$K_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \quad (11.7.15)$$

temos $K_T < 0$. Um sistema em que $K_T < 0$ não pode existir em equilíbrio térmico, porque seria instável, no mesmo sentido em que falamos do equilíbrio instável de uma partícula (1, Seção 6.5): qualquer flutuação do sistema a partir desse ponto, por menor que seja, irá afastá-lo dele cada vez mais. Um sistema desse tipo entraria em colapso, porque, quanto mais diminuísse o seu volume, menor seria a pressão necessária para mantê-lo em equilíbrio.

Logo, as porções de isotermas em que P cresce com v não podem existir. Que acontece com um gás real se, partindo de um ponto onde ele se aproxima de um gás ideal, ou seja com v grande e P pequeno, para $T < T_c$, formos comprimindo gradativamente o gás?

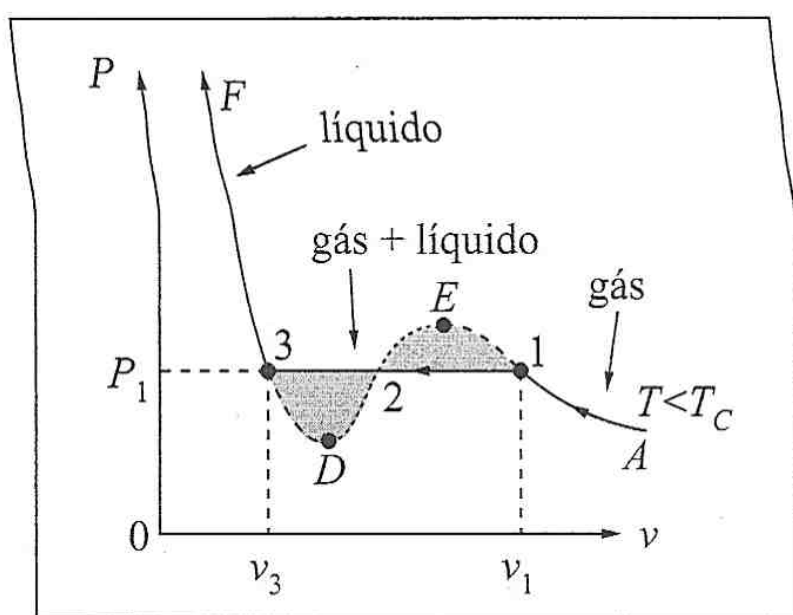


Figura 11.16 — Transição de fase

v diminui, sempre com $P = P_1$, até que o sistema tenha passado inteiramente ao estado líquido, no ponto 3. A partir do ponto 3, a isoterma tipo Van der Waals é retomada, com forte aumento de pressão para pequena redução de volume, correspondendo ao caráter quase incompressível do líquido.

Vemos por conseguinte que a porção $A \rightarrow 1$ da isoterma representa a fase gasosa, a porção $3 \rightarrow F$ a fase líquida, e a porção horizontal $1 \rightarrow 3$ corresponde a *coexistência das fases líquida e gasosa*. A pressão $P = P_1$ em que essa coexistência ocorre à temperatura T chama-se *pressão de vapor à temperatura T* (um gás com $T < T_c$ costuma ser chamado de vapor).

Como se determina o ponto 1 de uma isoterma de Van der Waals onde começa a ocorrer a transição de fase? Segundo uma regra proposta por Maxwell, o segmento horizontal $1 \rightarrow 3$ na Fig. 11.16 deve ser traçado de tal forma que as áreas sombreadas $1E2$ e $2D3$ sejam iguais.

Para justificar sua construção, Maxwell imaginou um ciclo termodinâmico reversível, em que a substância é levada ao longo da isoterma de Van der Waals no sentido $1 \rightarrow E \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3$ e depois volta ao longo do segmento horizontal $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Como este ciclo é todo descrito à mesma temperatura T , ou seja, é isotérmico, o seu rendimento, pela (10.5.13) (com $T_2 = T_1$) é $\eta_R = 0$, ou seja, o trabalho total realizado é nulo. Como os contornos das duas áreas sombreadas são descritos em sentidos opostos, esse trabalho é representado graficamente pela diferença entre as duas áreas (cf. pág. 180), o que levaria à construção de Maxwell.

Este raciocínio não é correto. Com efeito, para que se tivesse um ciclo termodinâmico reversível, seria preciso que os estados percorridos fossem estados de *equilíbrio termodinâmico*, o que não acontece ao longo da porção instável das isotermas de Van der Waals. Entretanto, argumentos mais elaborados, que não poderemos discutir aqui, mostram que a prescrição de Maxwell (áreas iguais) é correta.

A porção $1E$ da isoterma de Van der Waals pode ser realizada experimentalmente: ela corresponde a estados em que o vapor se encontra a pressão mais elevada que a pressão de vapor à temperatura T , sem que ele se condense. É o que se chama um *vapor supersaturado*. Isto ocorre, por exemplo, com vapor de água na alta atmosfera. Entretanto, é uma situação de equilíbrio instável: basta que apareçam *núcleos de condensação*, tais como partículas carregadas ou minúsculos grãos de poeira em suspensão, para que gotas de líquido comecem a se condensar em torno desses núcleos. Esta propriedade foi usada na *câmara de Wilson* para materializar as trajetórias de partículas nucleares ou subnucleares.

Analogamente, a porção $3D$ da isoterma (Fig. 11.16) representa estados em que o líquido está *superaquecido*, ou seja, a temperatura T é mais alta do que aquela compatível com a pressão de vapor no ponto considerado da isoterma, sem que haja vaporização. Também neste caso, a presença de núcleos provoca a vaporização, o que é utilizado na *câmara de bolhas* para observar trajetórias de partículas de alta energia.

A princípio, partindo de um ponto como A na Fig. 11.16, o gás segue uma isoterma do tipo Van der Waals. Entretanto, atingindo um determinado ponto 1 dessa isoterma, e continuando a reduzir o volume do sistema (por exemplo, através de um recipiente munido de um pistão), a pressão deixa de aumentar, permanecendo constante no valor P_1 .

A diminuição de volume do sistema é acompanhada de uma *transição de fase*, em que ele se *condensa*, passando da fase gasosa para a fase *líquida*. Inicialmente vão aparecendo gotas de líquido, e a proporção líquido/gás vai aumentando à medida que

As isotermas de um gás real (Fig. 11.17) são análogas às de um gás de Van der Waals, com as porções instáveis substituídas por segmentos de reta horizontais na região de coexistência de líquido + vapor. Esta região é delimitada pela curva ACB. Acima da isoterma crítica T_C , temos gás. Na região pontilhada da figura abaixo, de T_C e acima de BC, o gás costuma ser chamado de vapor. Na região sombreada, abaixo de T_C e acima de AC, temos líquido.

Acima de T_C , por mais que aumentemos a pressão, o gás não se liquefaz. Oxigênio, nitrogênio e hidrogênio eram chamados de “gases permanentes” antes de se reconhecer que não haviam sido liquefeitos por não se ter atingido temperaturas abaixo da temperatura crítica dessas substâncias (vide valores na tabela abaixo); o O_2 foi liquefeito pela primeira vez em 1877.

À medida que T se aproxima de T_C por valores inferiores, vai diminuindo o comprimento da porção horizontal das isotermas, ou seja, a diferença entre os volumes molares do líquido e do vapor à pressão de vapor. No ponto crítico, essa diferença desaparece.

Para $T > T_C$, a substância passa de forma contínua e homogênea da região de vapor à região de líquido, sem que haja em qualquer momento uma separação de fase. Assim é possível passar do ponto 1 (vapor) da Fig. 11.17 ao ponto 3 (líquido) de forma contínua, “dando a volta por cima” pelo caminho $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ indicado na figura. É o que se chama *continuidade entre os estados líquido e gasoso*.

A tabela abaixo dá os valores de T_C , P_C e ρ_C (densidade no ponto crítico) para diversas substâncias.

| Substância | T_C (K) | P_C (atm) | ρ_C (g/cm ³) | $\frac{P_C v_C}{RT_C}$ |
|------------------|-----------|-------------|-------------------------------|------------------------|
| H ₂ O | 647,50 | 218,50 | 0,3250 | 0,230 |
| O ₂ | 154,60 | 49,70 | 0,4100 | 0,292 |
| N ₂ | 126,00 | 33,50 | 0,3100 | 0,291 |
| H ₂ | 32,98 | 12,76 | 0,0314 | 0,304 |
| Hélio 4 | 5,19 | 2,25 | 0,0690 | 0,308 |

A última coluna da tabela dá o valor de Pv/RT no ponto crítico. Para um gás ideal, seria igual à unidade. Para um gás de Van der Waals, pelas (11.7.10) a (11.7.12), teríamos

$$P_C v_C / RT_C = 3/8 = 0,375 \quad (\text{Van der Waals})$$

(11.7.16)

o que difere apreciavelmente dos valores experimentais da tabela. Por outro lado, pela (11.7. 10), é $v_C = 3b$, e não seria de se esperar que a equação de Van der Waals desse muito bons resultados nesta região, em que as moléculas ocupariam quase todo o volume do recipiente.

As constantes de Van der Waals a e b podem ser obtidas a partir dos coeficientes de variação de P com T (a v constante) e de v com T (a P constante). Medindo o volume em l (litros), os valores de b para gases são geralmente da ordem de 0,03 a 0,06 l/ mol e os valores de a são da ordem de 0,1 a 5 l² atm/mol². Como, para um gás nas condições NTP, 1 mol = 22,4 l, o

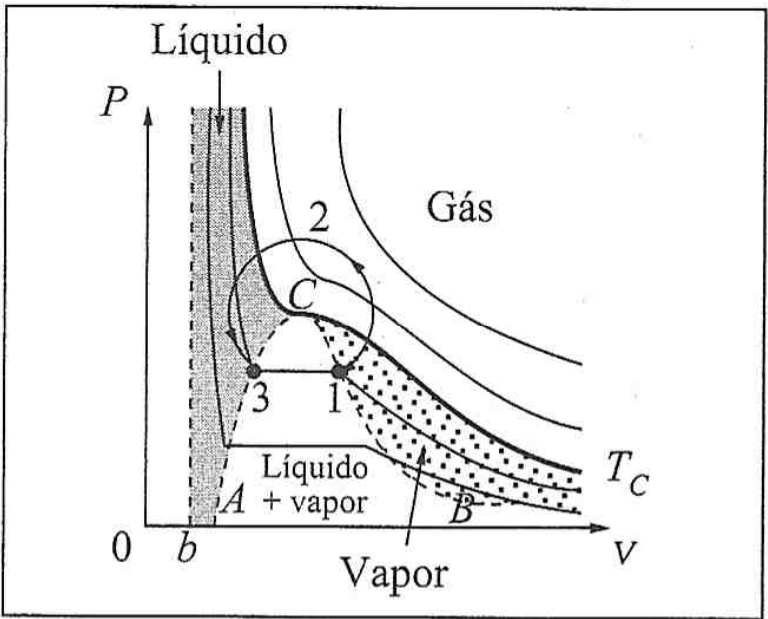


Figura 11.17 — Isotermas de um gás real

covolume b é $\sim 0,15\%$ a $0,3\%$ do volume total, o que está de acordo com a estimativa anterior (pág. 242) de que o volume ocupado pelas moléculas num gás, nessas condições, é $\lesssim 10^{-3}$ do volume total. A partir do valor experimental de b , pode-se obter o diâmetro efetivo $d = 2r_0$ das moléculas do gás, com o auxílio da (11.7.4).

A magnitude a/v^2 da copressão (11.7.6), que mede o efeito das forças atrativas de coesão, é também da ordem de $0,3\%$ da pressão total para o ar nas condições NTP. Como ela é proporcional a v^{-2} ou seja, a P^2 (para T constante), é fácil ver que ela se torna uma fração considerável da pressão total para $P \sim 10^2$ atm; os desvios da lei dos gases perfeitos tornam-se grandes nestas condições.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 11

1. Um feixe molecular de oxigênio, contendo 10^{10} moléculas/cm³ de velocidade média 500m/s, incide sobre uma placa segundo um ângulo de 30° com a normal à placa. Calcule a pressão exercida pelo feixe sobre a placa, supondo as colisões perfeitamente elásticas.
2. Um dos vácuos mais elevados que podem ser produzidos corresponde a uma pressão de 10^{-12} mm/Hg. Nesta pressão, a 27°C , quantas moléculas de ar por cm³ ainda permanecem?
3. Um gás é submetido a uma expansão isotérmica reversível num recipiente cilíndrico munido de um pistão de área A e massa M . O pistão desloca-se na direção x com velocidade constante u . Tem-se $u \ll v_{\text{qm}}$ e $M \gg m$, onde v_{qm} é a velocidade quadrática média das moléculas, cuja massa é m . Suponha as colisões das moléculas com o pistão perfeitamente elásticas num referencial que se move com o pistão. (a) Mostre que, no referencial do laboratório (onde o cilindro está em repouso), as colisões com o pistão não são perfeitamente elásticas, calculando a perda de energia cinética de uma molécula que colide com o pistão com componente x da velocidade $v_x > 0$ (no resultado, despreze u em confronto com v_x). (b) Some sobre todas as moléculas e mostre que a perda total de energia cinética é igual ao trabalho realizado na expansão do gás.
4. Calcule o número médio de moléculas por cm³ e o espaçamento médio entre as moléculas: (a) em água líquida, (b) em vapor de água a 1 atm e 100°C (tratado como gás ideal). (c) No caso (b), calcule a velocidade média quadrática das moléculas.
5. Um kg de ar é composto de 232 g de oxigênio, 755 g de nitrogênio e 13 g de outros gases. Para ar nas condições normais de temperatura e pressão, calcule as pressões parciais exercidas pelo oxigênio e pelo nitrogênio.
6. Um recipiente de 10 l contém 7 g de nitrogênio gasoso, à pressão de 4,8 atm e à temperatura de 1.800 K. A essa temperatura, uma porcentagem x das moléculas de nitrogênio encontram-se dissociadas em átomos. Calcule x .
7. A temperatura na superfície da Lua chega a atingir 127°C . Calcule a velocidade quadrática média do hidrogênio molecular a essa temperatura e compare-a com a velocidade de escape da superfície da Lua. Que conclusão pode ser tirada dessa comparação?
8. A velocidade do som num gás (que pode ser tratado como ideal) é 0,683 vezes a velocidade quadrática média das moléculas do gás nas mesmas condições de temperatura e pressão. Qual é o número de átomos por molécula do gás?

9. Considere uma partícula esférica de $0,5 \mu\text{m}$ de raio e densidade $1,2 \text{ g/cm}^3$, como as que foram utilizadas por Jean Perrin em experiências para determinação do número de Avogadro. Uma tal partícula, em suspensão num líquido, adquire um movimento de agitação térmica que satisfaz à lei de equipartição da energia. De acordo com esta lei, qual seria a velocidade quadrática média da partícula em suspensão à temperatura de 27°C ?
10. (a) Calcule o expoente adiabático $\gamma = C_p/C_v$ para um gás diatômico a uma temperatura elevada, tal que uma fração x das moléculas se encontram dissociadas em átomos. Verifique que o resultado se reduz aos casos limites esperados quando não há dissociação ou quando ela é total. (b) Se o valor observado é $\gamma = 1,5$, qual é a porcentagem de dissociação x ?
11. Coloca-se 1 g de hidrogênio e 1 g de hélio num recipiente de 10 l, a uma temperatura de 27°C . (a) Qual é a pressão? (b) Calcule os calores específicos molares C_v e C_p , bem como $\gamma = C_p/C_v$, para a mistura gasosa.
12. Um gás é formado de moléculas diatômicas de momento de inércia $I = 6 \times 10^{-39} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$. Calcule a velocidade angular de rotação quadrática média de uma molécula do gás em torno de um eixo perpendicular à linha que une os centros dos dois átomos, nas condições normais de temperatura e pressão.
13. O livre percurso médio em hélio gasoso a 1 atm e 15°C é de $1,862 \times 10^{-5} \text{ cm}$. (a) Calcule o diâmetro efetivo de um átomo de hélio. (b) Estime o número médio de colisões por segundo que um átomo de hélio sofre nestas condições.
14. O diâmetro efetivo da molécula de CO_2 é $\approx 4,59 \times 10^{-8} \text{ cm}$. Qual é o livre percurso médio de uma molécula de CO_2 para uma densidade de $4,91 \text{ kg/m}^3$?
15. Sejam P_C , v_C e T_C as constantes críticas de um gás de Van der Waals (pág. 263). Mostre que, se exprimirmos a equação de Van der Waals em termos das *variáveis reduzidas* $\pi = P/P_C$, $\omega = v/v_C$ e $\tau = T/T_C$, ela assume uma forma *universal*, ou seja, a mesma para todas as substâncias.
16. Calcule o trabalho realizado por um gás de Van der Waals numa expansão isotérmica à temperatura T , passando do volume molar v_i para v_f .
17. A partir da tabela da pág. 265, tratando o hélio gasoso como um gás de Van der Waals, calcule o diâmetro efetivo de um átomo de hélio. Compare o resultado com aquele obtido no Problema 13. Discuta a razão da concordância ou discrepância.
18. A pressão crítica e a temperatura crítica observadas para o CO_2 são, respectivamente, $P_C = 73,0 \text{ atm}$ e $T_C = 304,1 \text{ K}$. (a) Calcule as constantes de Van der Waals a e b para o CO_2 . (b) Calcule a densidade crítica ρ_C para o CO_2 pela equação de Van der Waals e compare-a com o valor observado de $0,46 \text{ g/cm}^3$. (c) Se o CO_2 fosse um gás ideal, a que pressão seria preciso submeter 1 mol de CO_2 para que ocupasse o volume de 0,5 l à temperatura de 0°C ? (d) Qual seria a pressão necessária na situação (c) considerando o CO_2 como um gás de Van der Waals? (e) Em (d), que fração da pressão total é devida à interação entre as moléculas do gás?

Capítulo 12

NOÇÕES DE MECÂNICA ESTATÍSTICA

12.1 — Introdução

A teoria cinética dos gases mostra que é possível deduzir e interpretar resultados válidos em nível macroscópico, tais como a equação de estado de um gás, a partir de sua estrutura microscópica na escala atômica.

Nessa escala, o gás é constituído de um número imenso de partículas (tipicamente da ordem do número de Avogadro), movendo-se constantemente em todas as direções e colidindo entre si e com as paredes do recipiente. O movimento de cada partícula obedece às leis da mecânica (na escala atômica, é preciso levar em conta os efeitos quânticos). Entretanto, o comportamento do gás não é descrito aplicando estas leis para determinar o movimento de cada partícula, porque: (i) não seria possível obter as condições iniciais para $\sim 10^{24}$ partículas; (ii) mesmo que fossem dadas, seria impossível resolver as equações de movimento correspondentes; (iii) não estamos interessados nos detalhes do movimento de cada partícula, mas tão somente no estudo de um número muito pequeno de parâmetros macroscópicos que caracterizam o gás: pressão, volume, temperatura.

Vimos no capítulo anterior que na obtenção da equação de estado só intervêm os *valores médios* de grandezas microscópicas, tais com a energia cinética média. Isto é típico: para passar da descrição microscópica à macroscópica, é preciso empregar métodos *estatísticos*, que levaram ao desenvolvimento da *mecânica estatística*.

Estamos acostumados à descrição estatística quando se lida com grandes populações, como a população de um país. Um exemplo é a distribuição de renda: divide-se a renda por habitante em faixas, e dar a distribuição significa dizer que fração da população tem sua renda compreendida dentro dos limites de cada faixa. Conhecendo essa distribuição, podemos imediatamente calcular a renda média per capita: basta multiplicar a renda média de cada faixa pela fração dos habitantes e somar os resultados, como na (11.3.8) (o resultado será tanto mais preciso quanto mais fina for a subdivisão em faixas). A distribuição tem de obedecer a certos vínculos óbvios: a soma de todos os habitantes é a população total do país (equivalentemente, a soma de todas as frações é igual à unidade), e a soma de todas as rendas é a renda total do país. Assim, a fração dos habitantes que podem ter uma renda extremamente elevada é muito pequena.

Vamos discutir agora, no caso de um gás, uma distribuição estatística análoga, que é um dos resultados básicos da mecânica estatística: a *distribuição das velocidades moleculares*.

12.2 — A distribuição de Maxwell

Em um trabalho que apresentou em 1859, James Clerk Maxwell obteve a distribuição das velocidades moleculares num gás em equilíbrio térmico à temperatura T . Como a velocidade quadrática média depende da temperatura, o mesmo deve acontecer com essa distribuição.

Para definir a distribuição de velocidades, temos de levar em conta que elas podem variar continuamente, de forma que uma faixa de velocidades é definida por

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}) \equiv (v_x, v_x + dv_x; \quad v_y, v_y + dv_y; \quad v_z, v_z + dv_z) \quad (12.2.1)$$

ou seja, corresponde a moléculas cuja velocidade \mathbf{v} tem componente x compreendida entre v_x e $v_x + dv_x$, componente y compreendida entre v_y e $v_y + dv_y$, e componente z compreendida entre v_z e $v_z + dv_z$. Seja

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (12.2.2)$$

a fração das moléculas compreendidas na faixa (12.2.1) num gás em equilíbrio térmico à temperatura T . A função $f(v_x, v_y, v_z)$ é a *função de distribuição de velocidades*, e nosso objetivo é determinar a forma dessa função.

Notando que v_x , v_y e v_z podem em princípio assumir quaisquer valores entre $-\infty$ e ∞ , e sendo a (12.2.2) definida como fração, devemos ter a *condição de normalização*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) = 1 \quad (12.2.3)$$

Na Seção 11.3, aproximamos a distribuição contínua por uma distribuição discreta, caracterizada por valores \mathbf{v}_i da velocidade ($i = 1, 2, 3 \dots$). A fração das moléculas com velocidade \mathbf{v}_i era dada por [cf. (11.3.2)] $n_i/n = n_i/\sum_j n_j$, que seria o análogo da (12.2.2). O valor médio de v_x^2 , por exemplo, era definido pela (11.3.8), cujo análogo para a distribuição contínua (12.2.2) é

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z v_x^2 f(v_x, v_y, v_z) \quad (12.2.4)$$

(a) O método de Boltzmann

Para determinar a função de distribuição de velocidades, vamos empregar um método proposto por Boltzmann em 1876. O ponto de partida é a *lei de Halley* (1.7.4), que dá a variação com a altitude z da pressão $p(z)$ exercida por um gás em equilíbrio térmico à temperatura T no campo gravitacional (atmosfera isotérmica):

$$\frac{p(z)}{p(0)} = \frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \exp\left[-g \frac{\rho(0)}{p(0)} z\right] \quad (12.2.5)$$

onde $\rho(z)$ é a densidade do gás à altitude z e $p(0)$, $\rho(0)$ são os valores da pressão e da densidade à altitude zero.

Pela lei dos gases perfeitos (9.1.13) aplicada a um volume V do gás a uma altitude qualquer,

$$pV = nRT = (\mathcal{M}/M)RT \quad (12.2.6)$$

onde o número de moles n é igual à razão \mathcal{M}/M da massa \mathcal{M} de gás no volume V à massa molecular M . Como $\mathcal{M}/V = \rho$ é a densidade do gás à altitude considerada, a (12.2.6) dá

$$p = \rho RT / M \quad (12.2.7)$$

A massa molecular M é a massa de 1 mol do gás, ou seja, é igual à massa m de uma molécula do gás multiplicada pelo número de Avogadro N_0 (número de moléculas por mol):

$$M = N_0 m \quad (12.2.8)$$

Substituindo a (12.2.8) na (12.2.7) e lembrando que $R/N_0 = k$ é a constante de Boltzmann (11.4.22), obtemos finalmente

$$\rho / p = m / (kT) \quad (12.2.9)$$

o que vale a qualquer altitude.

Seja $n(z)$ o número de moléculas por unidade de volume à altitude z . Temos então

$$\rho(z) = n(z)m \quad (12.2.10)$$

Substituindo as (12.2.9) e (12.2.10) na (12.2.5), obtemos

$$\frac{n(z)}{n(0)} = \exp\left(-\frac{mg}{kT}z\right) \quad (12.2.11)$$

ou seja, o número de moléculas por unidade de volume cai exponencialmente com a altitude z . Por outro lado, a qualquer altitude z , por hipótese, o gás está em equilíbrio térmico à temperatura T , de modo que a distribuição de velocidades (ou seja, a fração das moléculas em cada faixa de velocidades) é a mesma para qualquer z .

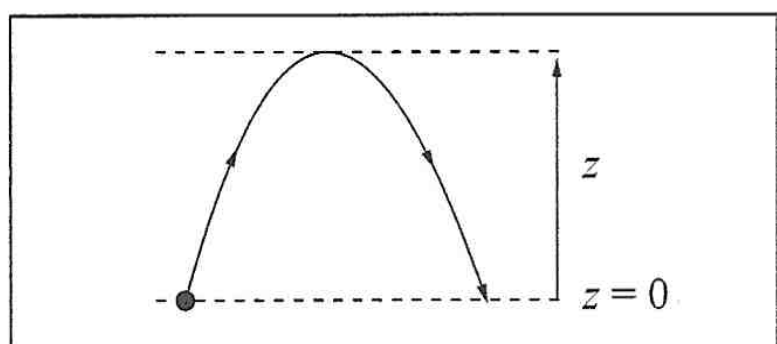


Figura 12.1 — Trajetória parabólica

Vamos inicialmente desprezar as colisões entre as moléculas. Neste caso, a trajetória seguida por uma molécula no campo gravitacional é uma parábola (Fig. 12.1), e uma molécula que sai de $z = 0$, com uma componente $v_z > 0$ de velocidade na direção z , atingirá uma altitude z dada por

$$\frac{1}{2}mv_z^2 = mgz \quad (12.2.12)$$

Somente atingem a altitude z moléculas com v_z maior ou igual ao valor mínimo dado pela (12.2.12) (para valores maiores de v_z , as moléculas ultrapassam a altitude z).

Logo, podemos interpretar a redução do número médio de moléculas por unidade de volume com a altitude, dada pela (12.2.11), como um reflexo do fato de que somente moléculas suficientemente velozes de camadas mais baixas (onde n é maior) atingem a altitude considerada. Este raciocínio foi empregado por Boltzmann para obter a distribuição de velocidades, conforme veremos agora.

(b) A distribuição da componente v_z

Para simplificar a notação, vamos fazer

$$v_z = w \quad (12.2.13)$$

Seja $f_1(w)$ a função de distribuição de w à temperatura T (a mesma a qualquer altitude), de modo que $f_1(w)dw$ é a fração das moléculas cuja componente z de velocidade está entre w e $w + dw$.

Devemos ter então, analogamente à (12.2.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(w)dw = 1 \quad (12.2.14)$$

Vamos considerar apenas as moléculas que se movem *para cima*, ou seja, com $w > 0$. O valor médio $\langle w^+ \rangle$ da velocidade dessas moléculas é

$$\langle w^+ \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(w)w dw \quad (12.2.15)$$

(Note que $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(w)dw = \langle w \rangle = 0$. Por quê?)

O número médio de moléculas por unidade de tempo que atravessam de baixo para cima uma secção de área unitária à altitude z é

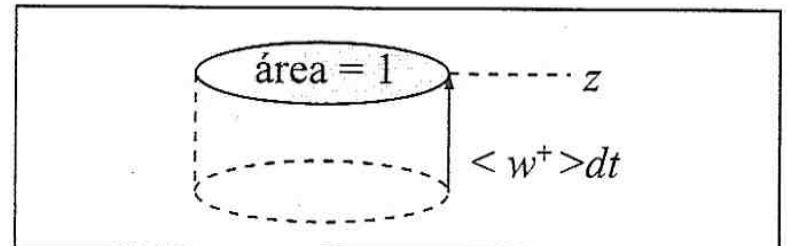


Figura 12.2 — Atravessamento de área unitária

$$n(z) \langle w^+ \rangle \quad (12.2.16)$$

porque, num intervalo de tempo dt , atravessam essa área as moléculas (Fig. 12.2) contidas num cilindro com base nessa secção e de altura $\langle w^+ \rangle dt$, cujo volume é $\langle w^+ \rangle dt$; o número médio de moléculas contidas nesse volume à altitude z é $n(z) \langle w^+ \rangle dt$, o que leva à (12.2.16).

Pelo mesmo raciocínio, o número médio de moléculas que atravessam $z = 0$ com v_z entre w e $w + dw$ por unidade de tempo e área é

$$n(0) \underbrace{f_1(w)dw}_{\text{fração no intervalo considerado}} \cdot w \quad (12.2.17)$$

Estas moléculas atingem altitudes máximas entre z e $z + dz$, onde, pelas (12.2.12) e (12.2.13),

$$mgdz = d\left(\frac{1}{2}mw^2\right) = mwdw \quad (12.2.18)$$

A redução do número médio de moléculas por unidade de tempo e área entre as altitudes z e $z + dz$ é devida exatamente às moléculas que obedecem às (12.2.17) e (12.2.18), porque moléculas com w maior atravessam ambas as secções, e as com w menor não atingem sequer a altitude z (Fig. 12.3). Logo, levando em conta a (12.2.16),

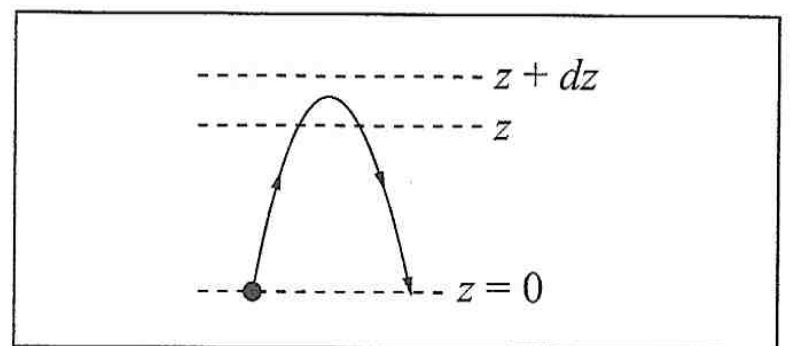


Figura 12.3 — Moléculas que contribuem

$$[n(z) - n(z + dz)] \langle w^+ \rangle = n(0) f_1(w) w dw \quad (12.2.19)$$

onde w é definido por

$$\frac{1}{2}mw^2 = mgz \quad (12.2.20)$$

Como

$$n(z) - n(z + dz) = -\frac{dn}{dz} dz$$

as (12.2.18) e (12.2.19) dão

$$-\frac{dn}{dz} \langle w^+ \rangle = n(0) f_1(w) w \frac{dw}{dz} = n(0) g f_1(w) \quad (12.2.21)$$

Por outro lado, diferenciando a (12.2.11) em relação a z , obtemos

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{mg}{kT} n(0) \exp\left(-\frac{mg}{kT} z\right) \quad (12.2.22)$$

Substituindo este resultado na (12.2.21) e levando em conta a (12.2.20), obtemos

$$f_1(w) = \frac{m \langle w^+ \rangle}{kT} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mw^2}{kT}\right) \quad (12.2.23)$$

O valor de $\langle w^+ \rangle$ se obtém aplicando a condição de normalização (12.2.14):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(w) dw = 1 = \frac{m \langle w^+ \rangle}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mw^2}{kT}\right) dw = \sqrt{\frac{2m}{kT}} \langle w^+ \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (12.2.24)$$

onde fizemos na integral a mudança de variável $mw^2/(2kT) = x^2$. Resta calcular esta integral:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (12.2.25)$$

Temos

$$A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} \quad (12.2.26)$$

que podemos considerar como uma integral dupla estendida a todo o plano (x, y) . Esta integral pode ser calculada em coordenadas polares (r, θ) : $x^2 + y^2 = r^2$, $dx dy \rightarrow r dr d\theta$, o que dá

$$A^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi$$

ou seja

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (12.2.27)$$

Substituindo a (12.2.27) na (12.2.14), vem

$$\langle w^+ \rangle = \sqrt{\frac{kT}{2\pi}} \quad (12.2.28)$$

Levando este resultado na (12.2.23), obtemos finalmente

$$\boxed{f_1(w) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mw^2}{kT}\right)} \quad (12.2.29)$$

que dá a função de distribuição da componente $w = v_z$ das moléculas de um gás em equilíbrio térmico à temperatura T .

(c) Discussão

A figura 12.4 é o gráfico da *função gaussiana* $y(x) = \exp(-x^2)$, que, a menos do fator de normalização, dá o andamento de (12.2.29) como função da variável x , onde

$$x^2 = \frac{\frac{1}{2}mw^2}{kT} \quad (12.2.30)$$

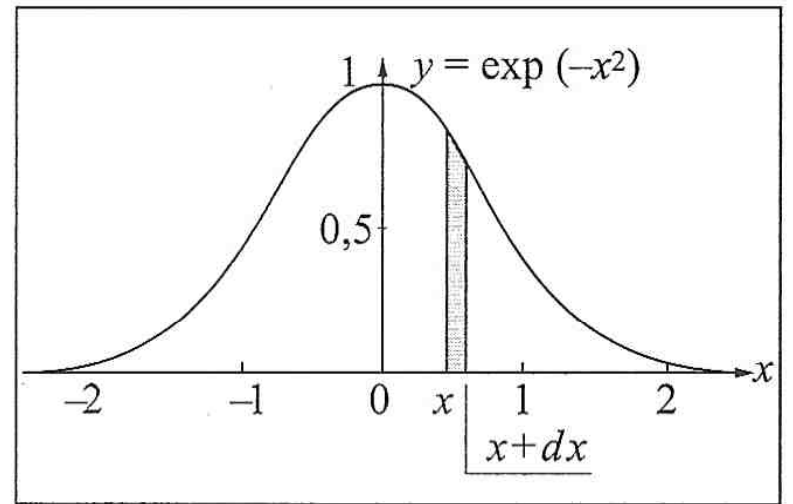


Figura 12.4 — Gaussiana

Note que $\frac{1}{2}mw^2$ é a *energia cinética* associada à translação na direção z e kT é o dobro da energia cinética média associada a esse grau de liberdade à temperatura T [cf. (11.5.9)].

A função y cai muito rapidamente para $|x| \gg 1$, o que significa que muito poucas moléculas possuem velocidades v_z tais que a energia cinética associada é $\gg kT$. A área debaixo da curva entre x e $x + dx$ (sombreada na Fig. 12.4) permite obter a fração das moléculas com velocidade entre w e $w + dw$, pois w é proporcional a x , pela (12.2.30). A simetria da curva em relação a $x = 0$ reflete a simetria da distribuição entre $v_z > 0$ e $v_z < 0$.

Na dedução, não foi levado em conta o efeito das colisões entre as moléculas, embora ele seja essencial para estabelecer a distribuição de velocidades (por exemplo, uma situação em que todas as moléculas, num dado instante, tivessem a mesma velocidade não pode corresponder à distribuição de equilíbrio, porque seria imediatamente destruída pelo efeito das colisões).

A razão pela qual não foi preciso considerar explicitamente o efeito das colisões é que ele está contido implicitamente no raciocínio que levou à (12.2.21): o resultado não depende de seguir o movimento de cada molécula individual, mas apenas do número *médio* de moléculas por unidade de tempo e área que cruzam uma dada secção; se uma determinada molécula, numa colisão, transfere a componente v_z de sua velocidade a outra molécula, que toma o seu lugar, isto não afeta o resultado.

Para que uma molécula tenha um valor elevado de v_z , é preciso que ela tenha sofrido colisões favoráveis (ou seja, que *umentem* o valor de v_z) com grande número de outras moléculas sucessivamente. Podemos comparar a probabilidade de que isto aconteça com a probabilidade de obter uma seqüência de n “caras” em n lançamentos sucessivos de uma moeda, num jogo de cara ou coroa. Esta probabilidade é

$$(1/2)^n = \exp(-n \ln 2) \quad (12.2.31)$$

ou seja, decresce exponencialmente com n . Pela mesma razão, na (12.2.29), a probabilidade de que uma molécula tenha energia cinética de translação elevada na direção z decresce exponencialmente com o valor dessa energia cinética.

Poderíamos perguntar também como é possível que $\langle v_z^2 \rangle$ (dado pela (12.2.28)) seja independente de z , se as moléculas, à medida que sobem a altitudes z maiores na atmosfera, têm de ir sofrendo uma redução de energia cinética para compensar o ganho de energia potencial. Isto não deveria diminuir a energia cinética média, o que seria incompatível com a hipótese da atmosfera isotérmica ($T = \text{constante}$)?

A resposta é que isto não acontece porque as moléculas mais lentas não atingem altitudes z mais elevadas (12.2.12), o que tende a aumentar a energia cinética média, compensando a diminuição devida ao aumento da energia potencial. A distribuição de Maxwell é preci-

samente aquela para a qual os dois efeitos se compensam, mantendo o equilíbrio térmico à temperatura T , qualquer que seja z . Assim, a fração das moléculas com velocidades dentro de uma dada faixa permanece a mesma, independente da altitude: é o número médio de moléculas por unidade de volume que vai decrescendo exponencialmente com a altitude, segundo a (12.2.11).

(d) A distribuição de Maxwell

A discussão que acaba de ser feita indica que a distribuição de velocidades em equilíbrio térmico à temperatura T , que independe de z , também não é afetada pela presença do campo gravitacional: a (12.2.11) serviu apenas para auxiliar na obtenção de $f_1(w)$, empregando o raciocínio de Boltzmann.

Por conseguinte, como a componente v_z nada tem de especial, a função $f_1(w)$ também deve descrever a distribuição das componentes v_x e v_y da velocidade. É de se esperar então que a fração (12.2.2) das moléculas cujas velocidades estão compreendidas na faixa (12.2.1) seja dada por

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = f_1(v_x) dv_x f_1(v_y) dv_y f_1(v_z) dv_z \quad (12.2.32)$$

No exemplo da distribuição de renda mencionado à pág. 268, a (12.2.32) corresponde ao seguinte raciocínio: se 10% da população do país caem numa certa faixa de renda, e 1/4 da população está concentrado numa dada região do país, a fração da população que satisfaz *simultaneamente* a ambas as condições (cai na faixa de renda em questão e mora na região considerada) seria $1/4 \times 10\% = 2,5\%$. Entretanto, isto pressupõe que as duas condições são *independentes*, ou seja, que o fato de morar em determinada região não altera a distribuição de renda. Para um país, isto tende a não ser verdade: há regiões mais e menos desenvolvidas.

Analogamente, a (12.2.32) pressupõe que o fato de uma molécula ter componente x da velocidade numa certa faixa não afeta a distribuição das outras componentes. Embora plausível, este resultado não é óbvio. Maxwell empregou esta hipótese em sua dedução original, o que constitui um de seus pontos fracos. Entretanto, deduções mais rigorosas levam ao mesmo resultado.

Substituindo a (12.2.29) na (12.2.32), obtemos finalmente a *distribuição de Maxwell*

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right] \quad (12.2.33)$$

A condição de normalização (12.2.3) é automaticamente satisfeita: a integral tripla se reduz a um produto de três integrais, em v_x , v_y e v_z , que são iguais à unidade, pela (12.2.14).

Reciprocamente, se perguntarmos, partindo da (12.2.33), que fração das moléculas têm componente x de velocidade entre v_x e $v_x + dv_x$, a resposta é

$$dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) = f_1(v_x) dv_x \quad (12.2.34)$$

conforme deveria ser.

Se tomarmos um recipiente macroscópico contendo N moléculas de um gás em equilíbrio à temperatura T , podemos representar a velocidade (v_x, v_y, v_z) de cada molécula por um ponto no espaço de velocidades, com essas coordenadas cartesianas em relação a um sistema de eixos (v_x, v_y, v_z) . A fração das moléculas na faixa (12.2. 1) será igual a $dN_{v_x, v_y, v_z}/N$, onde (Fig.

12.5) dN_{v_x, v_y, v_z} é o número de pontos representativos que caem num elemento de volume $dv_x dv_y dv_z$ com centro no ponto (v_x, v_y, v_z) :

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = Nf(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z \quad (12.2.35)$$

O expoente da (12.2.33) é

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT} = \frac{\text{energia cinética}}{kT} \quad (12.2.36)$$

que só depende de v^2 , ou seja, a *distribuição no espaço de velocidades é isotrópica*, conforme seria de se esperar: não há direção privilegiada para as velocidades.

Podemos perguntar qual é a função de distribuição da *magnitude* da velocidade: que fração das moléculas tem $|v|$ entre v e $v + dv$? No espaço das velocidades, são aquelas cujos pontos representativos caem entre as esferas de raios v e $v + dv$ (Fig. 12.6), ou seja,

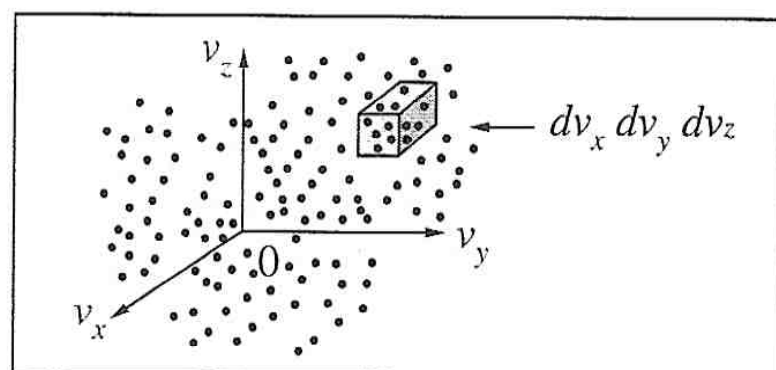


Figura 12.5 — Espaço de velocidades

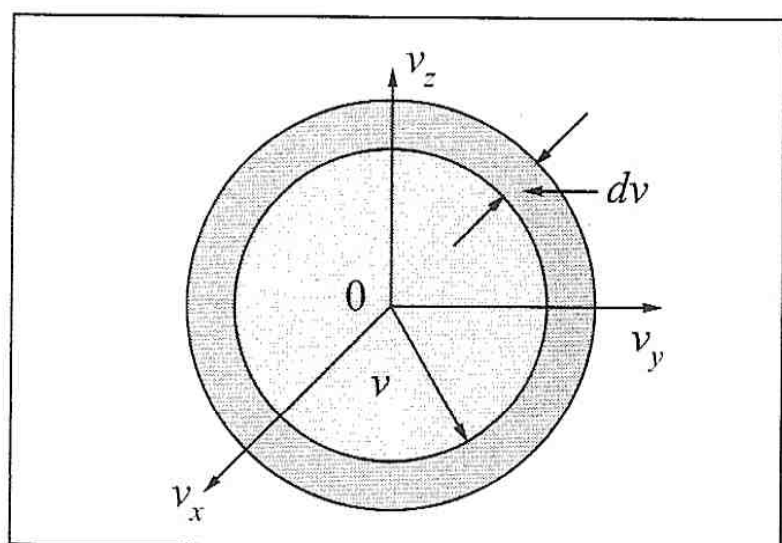


Figura 12.6 — Distribuição em magnitude

$$dN(v) = NF(v)dv = Nf(v_x, v_y, v_z) \cdot \overbrace{4\pi v^2 dv}^{\text{volume entre as duas esferas}} = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv \quad (12.2.37)$$

o que dá a *função de distribuição* $F(v)$:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \quad (12.2.38)$$

Pela (12.2.37), $dN(v)/N = F(v)dv$, é a fração das moléculas que têm $|v|$ entre v e $v + dv$. Por construção,

$$\int_0^\infty F(v)dv = 1 \quad (12.2.39)$$

(e) Velocidades características

A partir da (12.2.38), podemos calcular várias velocidades características das moléculas do gás.

Velocidade quadrática média: É definida por [cf. (12.2.4)]

$$v_{qm}^2 = \langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(v)v^2 dv \quad (12.2.40)$$

Para calcular esta integral, notemos que, com $m/(2kT) = \lambda$, as (12.2.38) e (12.2.39) se escrevem

$$\lambda^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\lambda v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (12.2.41)$$

Derivando ambos os membros em relação ao parâmetro λ , obtemos

$$\frac{3}{2} \lambda^{1/2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\lambda v^2} dv - \lambda^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-\lambda v^2} v^2 dv = 0$$

ou seja,

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\lambda v^2} dv = \int_0^{\infty} F(v) v^2 dv = \frac{3}{2} \lambda^{-1} \underbrace{\int_0^{\infty} F(v) dv}_{=1}$$

o que dá

$$v_{qm}^2 = \frac{3}{2} \lambda^{-1} = \frac{3}{2} \frac{2kT}{m} \left\{ \boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}} \right. \quad (12.2.42)$$

o que equivale à (11.4.21). Analogamente, a equipartição da energia de translação (11.5.9) se obtém imediatamente das (12.2.4) e (12.2.33).

Velocidade média: É definida por

$$\boxed{\langle v \rangle = \int_0^{\infty} F(v) v dv} \quad (12.2.43)$$

Substituindo $F(v)$ pela (12.2.38) e efetuando a mudança de variável

$$x = \frac{mv^2}{2kT}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} x dx}_{= -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1} \\ \therefore \boxed{\langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} \end{aligned} \quad (12.2.44)$$

Velocidade mais provável: É o valor v_p que maximiza $F(v)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}[F(v)] &= 0 \left\{ 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - v^2 \cdot \frac{mv}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0 \right. \\ \therefore \boxed{v_p &= \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \end{aligned} \quad (12.2.45)$$

Como

$$\sqrt{3} = 1,732, \quad \sqrt{8/\pi} = 1,595 \quad \text{e} \quad \sqrt{2} = 1,414$$

as três velocidades características (12.2.42), (12.2.44) e (12.2.45) são muito próximas entre si. A Fig. 12.7 dá a função de distribuição $F(v)$ e indica a localização de v_p (posição do pico), $\langle v \rangle$ e v_{qm} .

A Fig. 12.8 mostra o que acontece com $F(v)$ quando a temperatura T aumenta (os valores numéricos se referem a O_2).

O pico (valor de v_p) se desloca para a direita e se alarga; o valor de $F(v)$ diminui, mantendo a área de baixo da curva sempre = 1.

Note que a fração das moléculas com velocidades mais elevadas aumenta consideravelmente, o que permite compreender o efeito da elevação da temperatura sobre a taxa de reações químicas em fase gasosa.

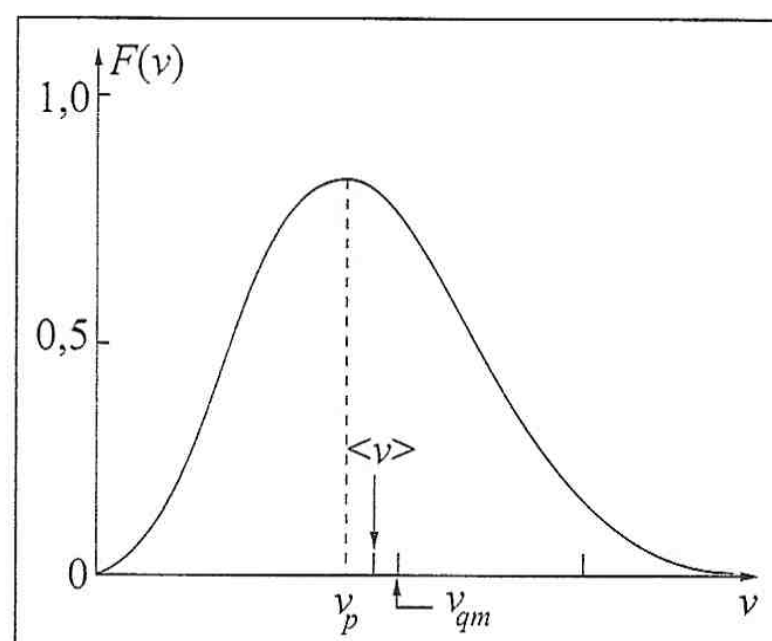


Figura 12.7 — Velocidades características

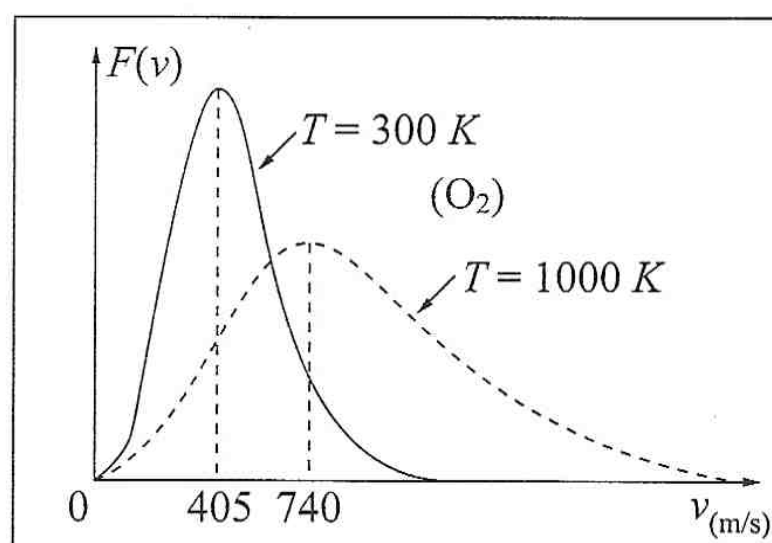


Figura 12.8 — Efeito do aumento da temperatura

(f) Distribuição de Boltzmann

No exemplo da atmosfera isotérmica, conhecemos a distribuição de velocidades das moléculas e também a sua distribuição espacial, que é dada pela lei de Halley (12.2.11): a distribuição é uniforme num plano horizontal (x, y), mas decresce exponencialmente com a altitude z . Combinando as duas distribuições, podemos dizer que a fração das moléculas num elemento de volume $dx dy dz$ com centro em (x, y, z) com velocidade na faixa (12.2.1) é

$$F(\underbrace{x, y, z}_{\mathbf{r}}, \underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\mathbf{v}}) dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (12.2.46)$$

onde, pelas (12.2.11) e (12.2.33),

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= C \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \\ &= C \exp\left[-\frac{1}{kT} \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right)\right] \end{aligned} \quad (12.2.47)$$

onde C é um fator de normalização.

Mas

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad (12.2.48)$$

é a *energia total* de uma molécula de velocidade v situada na altitude z . Logo, a *função de distribuição em posição e velocidade* $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ é dada por

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = C \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (12.2.49)$$

onde E é a energia total da molécula e C o fator de normalização

A (12.2.49) é a generalização, devida a Boltzmann, da lei de distribuição de Maxwell, e tem aplicabilidade muito mais geral do que ao caso da atmosfera isotérmica. A probabilidade de encontrar uma molécula com energia *total* E (cinética + potencial), numa situação de equilíbrio *térmico à temperatura* T , decresce exponencialmente com E . A interpretação física deste resultado é análoga à que vimos em conexão com a (12.2.31). No caso da atmosfera isotérmica, por exemplo, é pouco provável que uma molécula atinja uma altitude elevada (energia potencial elevada), porque é preciso para isso que ela sofra uma sucessão de colisões tendentes a aumentar cada vez mais sua elevação.

1.2.3 — Verificação experimental da distribuição de Maxwell

A distribuição de Maxwell pôde ser comprovada com grande precisão nas últimas décadas, graças à técnica dos *feixes atômicos e moleculares*. Embora se tenham utilizado feixes de partículas carregadas, acelerados e defletidos por campos elétricos e magnéticos, desde o início do século XX, só bem mais recentemente foram desenvolvidos métodos para manipulação de feixes de partículas neutras, formados de átomos ou moléculas.

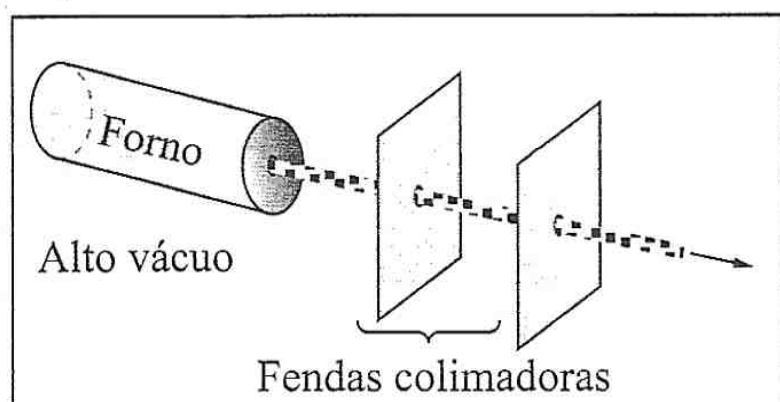


Figura 12.9 — Produção de um feixe

Um dispositivo típico para produção de um feixe está representado na Fig. 12.9. Uma amostra do material cujos átomos ou moléculas formarão o feixe é evaporada no forno, a temperaturas de algumas centenas de graus e pressões da ordem de 10^{-2} a 10^{-3} mm/Hg. O feixe sai do forno por um orifício de diâmetro d da ordem de 0,02 a 0,05 mm, emergindo num espaço onde se fez alto vácuo e sendo colimado ao passar por fendas alinhadas (figura).

As estimativas do livre percurso médio \bar{l} à pág. 259 mostram que, para as pressões acima, tem-se

$$d \ll \bar{l} \quad (12.3.1)$$

Logo, as moléculas passam em média na vizinhança do orifício um tempo $\sim d/\bar{v}$ muito menor do que o intervalo de tempo médio entre duas colisões \bar{l}/\bar{v} (\bar{v} = velocidade média).

Nestas condições, a presença do orifício produz uma perturbação muito pequena na distribuição de velocidade no interior do forno, e o escapamento do feixe através do orifício chama-se de *efusão*. Isto não seria verdade se fosse $d \gg \bar{l}$: o escapamento do gás corresponderia nessas condições a um escoamento de tipo hidrodinâmico, afetando toda a distribuição de velocidades dentro de recipiente.

Seja ΔS a área do orifício. Pela (12.2.17), o número médio de moléculas com velocidades entre v e $v + dv$ que incidem sobre ΔS durante um intervalo de tempo Δt será proporcional a

$$nF(v)dv \cdot \Delta S \cdot v\Delta t \quad (12.3.2)$$

onde $F(v)$ é dado pela (12.2.38) e n é o número de moléculas por unidade de volume dentro do forno.

Logo, a densidade de corrente $j(v)$ no feixe, para moléculas com velocidades entre v e $v + dv$, será dada por

$$j(v) = AnvF(v) \propto nv^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (12.3.3)$$

onde A é uma constante de proporcionalidade.

Note que a densidade de corrente difere da distribuição de Maxwell por conter um fator v adicional.

Para medir $j(v)$, utiliza-se um *seletor de velocidades*. Um dos tipos empregados está esquematizado na Fig. 12.10. Consiste num par de obturadores acoplados ao mesmo eixo, que gira com velocidade angular ω , e espaçados de uma distância l . Cada obturador é um disco com um dente que pode ser atravessado pelo feixe: se o dente não está em frente ao feixe, este é interceptado pelo obturador. Para $\omega = 0$, há uma separação angular $\Delta\theta$ entre os dentes dos dois obturadores. Para que um grupo de moléculas de velocidade v do feixe atravesse os dois obturadores, é preciso que se tenha

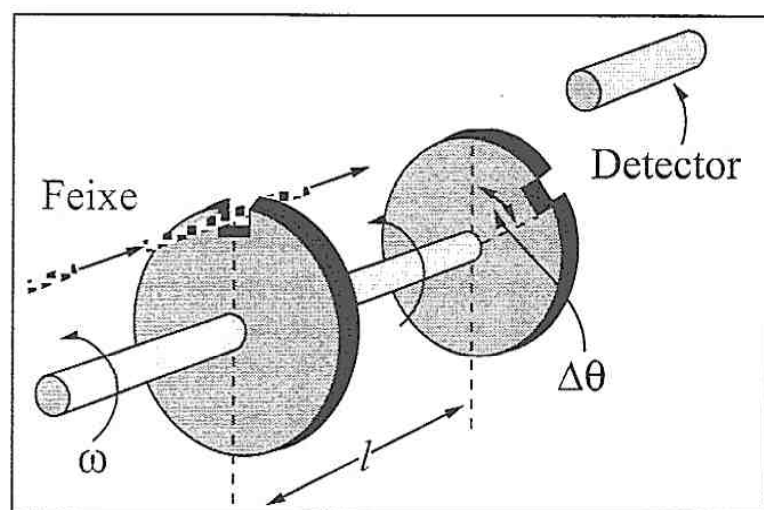


Figura 12.10 — Seletor de velocidades

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \omega l/v \quad (12.3.4)$$

onde $\Delta t = l/v$ é o tempo de voo das moléculas entre os dois obturadores.

Como $\Delta\theta$ e l são fixos na (12.3.4), basta fazer variar ω para medir $j(v)$ em função de v . Os resultados obtidos mostram excelente acordo com a (12.3.3), confirmando a validade da distribuição de Maxwell.

12.4 — Movimento browniano

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown, observando ao microscópio minúsculas partículas de pólen em suspensão na água, notou que elas estavam continuamente em movimento, agitando-se de forma extremamente irregular. A princípio, pensou que se tratasse de seres vivos, mas verificou depois que o mesmo movimento era observado em partículas inorgânicas em suspensão, bastando que seu tamanho fosse suficientemente pequeno: da ordem de $0,1 \mu$ a 1μ , ou seja, 10^{-5} a 10^{-4} cm.

A explicação correta, atribuindo o movimento ao efeito das colisões de moléculas do líquido com as partículas em suspensão, foi primeiro proposta por Delsaux em 1877.

A primeira teoria quantitativa do movimento browniano foi publicada por Einstein em 1905, no mesmo volume de "Annalen der Physik" em que apareceu seu primeiro trabalho sobre relatividade restrita.

Naquela época, a teoria atômica ainda estava em seus primórdios, e era vista com grande ceticismo por físicos e químicos eminentes, como Mach e Ostwald, que argumentavam não haver nenhuma evidência experimental direta da existência de átomos. Einstein descreveu as origens de seu trabalho em sua autobiografia científica:

"Meu objetivo principal era encontrar fatos que garantissem, na medida do possível, a existência de átomos de tamanho bem definido. Tentando fazê-lo, descobri que, segundo a teoria atômica, deveria existir um movimento observável de partículas microscópicas em

suspensão, sem saber que observações do movimento browniano já eram familiares há muito tempo”.

O movimento browniano representa, efetivamente, um exemplo do que Lucrécio, na antiguidade, havia ilustrado através da imagem dos grãos de poeira que dançam ao acaso, suspensos no ar, tornados visíveis por um raio de luz (Seção. 11.1): evidência do movimento de agitação térmica na escala molecular, amplificado até tornar-se visível ao microscópio.

A partícula microscópica em movimento browniano pode ser pensada como uma espécie de “molécula gigante”, submetida a um bombardeio contínuo pelas moléculas do fluido em que está suspensa. A cada instante, a pressão resultante deste bombardeio flutua de forma irregular, levando a partícula a ter o seu próprio movimento de agitação térmica. A velocidade e a amplitude desse movimento são muito menores do que as das moléculas do fluido, devido à massa enormemente maior da partícula suspensa, mas mesmo assim são visíveis.

O teorema de equipartição da energia também se aplica à partícula suspensa: como ela está em equilíbrio térmico com as moléculas do fluido, à temperatura T , sua energia cinética média é dada pela (11.4.21):

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \tag{12.4.1}$$

onde m é a massa da partícula suspensa.

Para uma partícula de $\sim 0,1 \mu$ de raio, m é $\sim 10^8$ vezes a massa de uma molécula típica, de modo que, pela (12.4.1), v_{qm} seria $\sim 10^{-4}$ vezes menor que as velocidades moleculares típicas. Como estas são de centenas de m/s (Seção 11.3), valores típicos de v_{qm} para partículas brownianas seriam da ordem de cm/s. Entretanto, as velocidades observadas ao microscópio para partículas destas dimensões são da ordem de 0,01 a 0,1 mm por minuto, ou seja, são $\sim 10^4$ a 10^5 vezes menores. Como explicar esta discrepância?

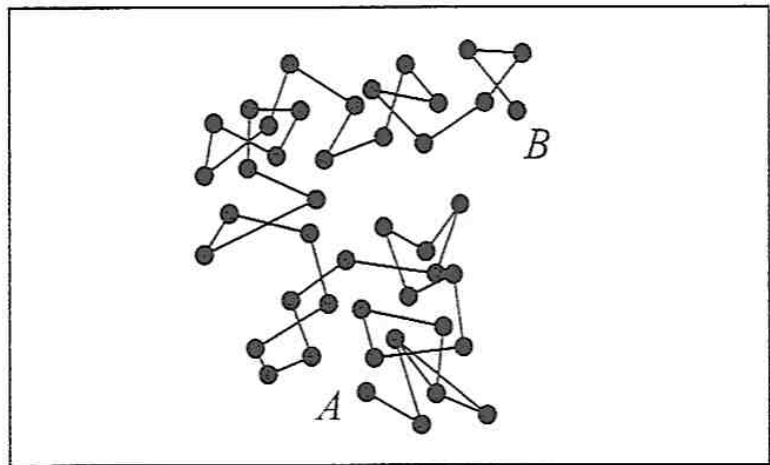


Figura 12.11 — Trajetória browniana

Uma “trajetória browniana” típica observada tem o aspecto ilustrado na Fig. 12.11, onde a partícula foi do ponto A ao ponto B durante o intervalo de observação. Entretanto, se dispuséssemos de um “supermicroscópio” capaz de ampliar fortemente um só “passo” dessa trajetória, veríamos que este “passo” é na realidade um intrincado caminho em ziguezague, tão emaranhado quanto a “trajetória” toda observada, e isto continuaria valendo em ampliações sucessivas, até chegarmos à escala molecular. Logo, a “velocidade” observada é na realidade uma média sobre este complicado processo de difusão, o que leva a um valor inferior a v_{qm} . Para compreender o que acontece, é preciso analisar este processo.

Passeio ao acaso unidimensional

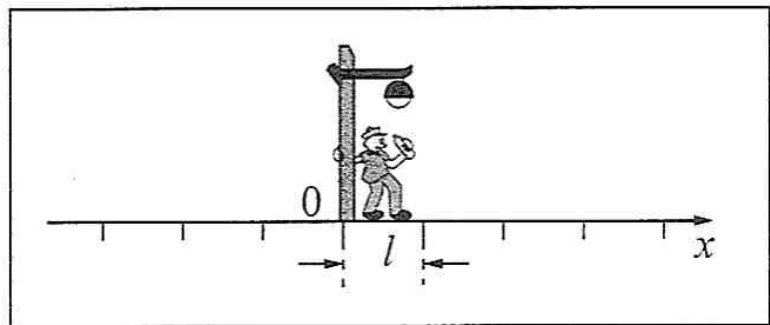


Figura 12.12 — Problema do marinheiro bêbado

O exemplo mais simples de um processo de difusão do tipo do movimento browniano é o passeio ao acaso em uma dimensão, que pode ser ilustrado pelo “problema do marinheiro bêbado”.

Um marinheiro embriagado parte de um poste, deslocando-se ao longo da direção x e dando passos sempre do mesmo comprimento l (Fig. 12.12), mas

com *igual probabilidade* de dar um passo à frente ou um passo atrás. A que *distância média* estará do poste após N passos?

Seja x_n a posição após n passos, com origem no poste. Temos então:

$$\begin{aligned}
 x_1 = \pm l & \begin{cases} \langle x_1 \rangle = 0 \\ x_1^2 = l^2 \{ \langle x_1^2 \rangle = l^2 \} \end{cases} \\
 x_2 = x_1 \pm l & \begin{cases} \langle x_2 \rangle = 0 \\ \langle x_2^2 \rangle = \underbrace{\langle x_1^2 \rangle}_{=l^2} + l^2 \pm 2 \underbrace{\langle x_1 \rangle l}_{=0} = 2l^2 \end{cases} \\
 x_n = x_{n-1} \pm l & \begin{cases} \langle x_n \rangle = 0 \\ \langle x_n^2 \rangle = \underbrace{\langle x_{n-1}^2 \rangle}_{=l^2} + l^2 \pm 2 \underbrace{\langle x_{n-1} \rangle l}_{=0} \end{cases} \\
 \therefore \langle x_n^2 \rangle &= \langle x_{n-1}^2 \rangle + l^2 = \langle x_{n-2}^2 \rangle + 2l^2 = \dots = nl^2
 \end{aligned}$$

o que dá

$$\langle x_N \rangle = 0, \quad \text{mas} \quad \langle x_N^2 \rangle = Nl^2 \quad (12.4.2)$$

ou seja

$$x_{N_{qm}} = \sqrt{\langle x_N^2 \rangle} = \sqrt{N}l \quad (12.4.3)$$

Logo, após 100 passos, o marinheiro estará em *média* a 10 passos de distância do poste, com igual probabilidade de encontrar-se à esquerda ou à direita dele. A posição mais provável seria a origem ($\langle x_N \rangle = 0$), mas a distribuição de probabilidade para x_N seria uma curva com o aspecto da Fig. 12.13, cuja largura $\sqrt{\langle x_N^2 \rangle}$ representa a *flutuação da posição* devida ao movimento ao acaso.

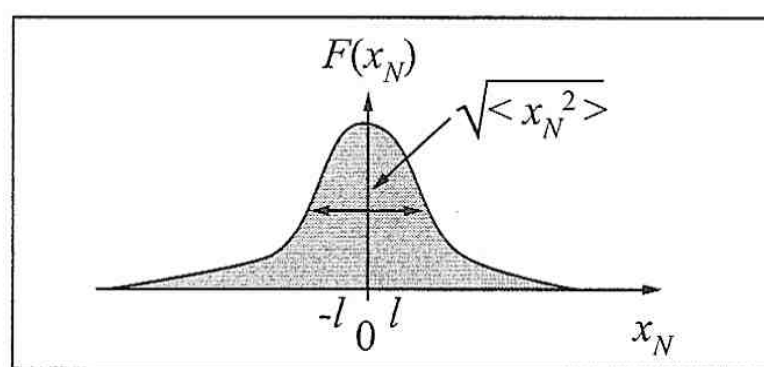


Figura 12.12 — Distribuição de probabilidade

No caso da partícula browniana, podemos interpretar x_n como a projeção na direção x do deslocamento a partir de uma origem dada após n colisões com moléculas do fluido. Se τ é o intervalo de tempo médio entre duas colisões, o tempo total decorrido até x_n é $t = n\tau$, ou seja, n é *proporcional ao tempo de observação* t .

Podemos então reescrever a (12.4.2) como uma relação entre o *deslocamento quadrático médio* na direção x e o tempo de observação t :

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (12.4.4)$$

onde a constante de proporcionalidade D definida desta forma chama-se o *coeficiente de difusão*.

O mesmo raciocínio pode ser empregado para estimar a ordem de grandeza do coeficiente de difusão para difusão de um gás em outro, como no exemplo da difusão de vapor de perfume no ar (pág. 256). Neste caso, em lugar de uma partícula browniana, temos uma molécula (de perfume, por exemplo), e o intervalo de tempo médio entre duas colisões é $\tau = \bar{l}/\bar{v}$ onde \bar{l} é o livre percurso médio. Como $N = t/\tau$, e o passo l na (12.4.2) é $\sim \bar{l}$, vem

$$\langle x^2 \rangle \sim N \bar{l}^2 \sim \frac{t}{\tau} \bar{l}^2 = \bar{l} \bar{v} \tau \quad (12.4.5)$$

ou seja, comparando com a (12.4.4),

$$D \sim \bar{l} \bar{v} \quad (12.4.6)$$

para *difusão de um gás em outro*. Tipicamente, nas condições NTP, $\bar{l} \sim 10^{-5}$ cm e $\bar{v} \sim 5 \times 10^4$ cm/s, de modo que $D \sim 1$ cm²/s, o que explica a lentidão com que o perfume se difunde no ar.

No caso tridimensional, devido à isotropia, podemos escrever

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \quad (12.4.7)$$

de modo que a (12.4.4) leva a

$$\boxed{\langle r^2 \rangle = 6Dt} \quad (12.4.8)$$

A distância quadrática média dos deslocamentos à origem, $r_{qm} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$, cresce com \sqrt{t} em lugar de crescer linearmente com t .

O resultado obtido se generaliza ao cálculo da flutuação associada a um grande número N de eventos ao acaso: essa flutuação é $\sim \sqrt{N}$. Por exemplo, o número de moléculas de gás que colidem com a parede de um recipiente varia a cada instante, dando origem a flutuações de pressão (como no exemplo do jato de areia: (cf. 1, Seção (9.4)). Qual é a ordem de grandeza dessas flutuações?

O número médio de moléculas de um gás que colidem com 1 cm² da parede do recipiente a cada instante é o que está contido dentro de uma distância $\sim \bar{l}$ da parede, ou seja, é $\bar{N} \sim n\bar{l}$, onde n é o número médio de moléculas/cm³. Nas condições NTP, tem-se $n \sim 10^{19}$ /cm³ e $\bar{l} \sim 10^{-5}$ cm, de forma que $\bar{N} \sim 10^{14}$. Logo, a flutuação correspondente é $\sqrt{\bar{N}} \sim 10^7$, mas o que importa é a *flutuação relativa*

$$\boxed{\sqrt{(\Delta N)^2} / \bar{N} \sim \sqrt{\bar{N}} / \bar{N} \sim 1 / \sqrt{\bar{N}}} \quad (12.4.9)$$

que neste caso é $\sim 10^{-7}$, ou seja, é extremamente pequena.

Por outro lado, uma partícula browniana de 0,1 μ de diâmetro tem uma superfície $\sim (10^{-5}$ cm)² $\sim 10^{-10}$ cm², de modo que, neste caso, $\bar{N} \sim 10^4$ moléculas colidem com a partícula a cada instante. A flutuação de pressão correspondente é $1/\sqrt{\bar{N}} \sim 1\%$, o que já é uma flutuação apreciável. São estas flutuações relativas de pressão ao acaso (ora há mais moléculas batendo numa direção, ora em outra) que produzem o movimento browniano.

A relação de Einstein

Para calcular o coeficiente de difusão D no caso do movimento browniano, consideremos a equação de movimento da partícula browniana na direção x .

Quais são as forças que atuam sobre a partícula? Ao deslocar-se dentro do fluido, ela encontra uma resistência de atrito que, para as baixas velocidades do movimento browniano, é proporcional à velocidade. A equação de movimento na direção x é então (m = massa da partícula)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{ext}} \quad (12.4.10)$$

onde μ é o coeficiente de atrito, proporcional à viscosidade do fluido (1, Seção. 5.2) e F_{ext} é a força externa, resultante das colisões entre a partícula browniana e as moléculas do fluido. Esta força varia ao acaso, representando as flutuações de pressão sofridas: é o que se chama uma *força estocástica* ou *força de Langevin*. Em particular, é igualmente provável que seja $F_{\text{ext}} > 0$ ou $F_{\text{ext}} < 0$ a cada instante, de forma que

$$\langle F_{\text{ext}} \rangle = 0 \quad (12.4.11)$$

onde $\langle \rangle$ indica a *média sobre um grande número de observações* de partículas brownianas.

A (12.4.10) permite tirar conclusões sobre tais valores médios. Para calcular D , pela (12.4.4), queremos achar $\langle x^2 \rangle$ em função de t :

Como

$$\frac{d}{dt}(x^2) = 2x \frac{dx}{dt}$$

multiplicando ambos os membros da (12.4.10) por x :

$$\underbrace{mx \frac{d^2 x}{dt^2}}_{\frac{d}{dt}\left(x \frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \underbrace{\mu x \frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2)} = xF_{\text{ext}}$$

ou seja

$$m \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] - m v_x^2 + \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) = xF_{\text{ext}} \quad (12.4.12)$$

onde $v_x = dx/dt$ é a componente x da velocidade da partícula.

Podemos agora tomar a média de ambos os membros da (12.4.12) sobre um grande número de observações. Tendo em vista a (12.4.11), é razoável supor que

$$\langle xF_{\text{ext}} \rangle = 0 \quad (12.4.13)$$

Por outro lado, pela equipartição da energia,

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad (12.4.14)$$

Seja

$$f = \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(x^2) \right\rangle \quad (12.4.15)$$

onde a igualdade decorre de serem independentes as operações de tomar a média e de derivação em relação ao tempo. Com as (12.4.13) a (12.4.15), a média da (12.4.12) fica

$$m \frac{df}{dt} + \mu f = 2kT \quad (12.4.16)$$

Tomando como nova variável

$$g(t) = f(t) - \frac{2kT}{\mu} \quad (12.4.17)$$

que só difere de f por uma constante, a (12.4.16) se escreve

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{g}{\tau}, \quad \tau = \frac{m}{\mu} \quad (12.4.18)$$

cuja solução é

$$g(t) = g(0)e^{-t/\tau} \quad (12.4.19)$$

Como a massa m da partícula browniana é muito pequena, a vida média τ do decaimento exponencial (12.4.19) também é (valores típicos de τ são $\sim 10^{-8}$ s). Logo, para qualquer tempo de observação razoável, podemos tomar

$$g(t) \approx 0 = \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle - \frac{2kT}{\mu} \quad (12.4.20)$$

onde substituímos as (12.4.17) e (12.4.15).

Integrando em relação a t ambos os membros da (12.4.20), e tomando $x(0) = 0$, obtemos finalmente

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\mu} t \quad (12.4.21)$$

Comparando com a (12.4.4), resulta

$$\boxed{D = kT / \mu} \quad (12.4.22)$$

que é a *relação de Einstein* para o coeficiente de difusão no movimento browniano.

A (12.4.22) relaciona D , que governa a flutuação de posição $\langle x^2 \rangle$, com μ , o coeficiente de atrito, que governa a dissipação da velocidade pelo atrito interno no fluido. É um exemplo de uma relação muito geral, a *relação flutuação — dissipação*, entre estes dois tipos de efeitos. É natural que eles estejam relacionados, pois a dissipação é devida ao mesmo mecanismo microscópico (colisões com as moléculas) responsável pelas flutuações.

Para uma partícula esférica de raio a , o coeficiente de atrito μ se relaciona com a viscosidade η do fluido (Seção 2.7) por uma fórmula devida a Stokes:

$$\mu = 6\pi\eta a \quad (12.4.23)$$

Conhecendo a temperatura T na (12.4.22), vemos que medir o coeficiente de difusão D equivale a medir a constante de Boltzmann $k = R / N_0$ (11.4.22). Como a constante universal dos gases R é conhecida, isto dá o *número de Avogadro* N_0 , atingindo assim o objetivo original de Einstein, que era demonstrar a realidade da existência das moléculas.

Uma série de experiências com partículas brownianas de diversos tamanhos em suspensão num fluido foram feitas por Jean Perrin em 1909. Os resultados comprovaram a relação de Einstein (12.4.22), em particular o fato de que D independente da massa da partícula (Perrin chegou a variar a massa na proporção de 1 para 15.000) e permitiram determinar o número de Avogadro.

Para valores típicos de η e $a \sim 10^{-5}$ cm, à temperatura ambiente, a (12.4.22) dá $D \sim 10^{-8}$ cm²/s. Pela (12.4.8), com $t \sim 30$ s (tempo típico de observação), isto leva a $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_{qm} \sim 0,01$ mm, o que concorda com os valores observados.

Com aparelhos suficientemente sensíveis, é possível amplificar o movimento browniano até a escala macroscópica. Isto pode ser feito observando as flutuações na posição angular de um espelho suspenso por uma fibra de torção de quartzo extremamente delgada, com um arranjo tipo galvanômetro (Fig. 12.14). O deslocamento angular ϕ é medido por reflexão (do

espelho para uma escala graduada) de um feixe luminoso.

As flutuações observadas de ϕ devem-se a flutuações da pressão exercida pela atmosfera sobre o espelho, que levam a um torque flutuante. Se K é o módulo de torção do fio, a energia potencial associada a um pequeno deslocamento angular ϕ é (Seção 3.3)

$$U = \frac{1}{2} K \phi^2 \quad (12.4.24)$$

Como esta expressão é quadrática em ϕ , o teorema de equipartição da energia (Seção 11.5) dá, para a flutuação quadrática média $\langle \phi^2 \rangle$ em equilíbrio térmico à temperatura T ,

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} K \langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \left\{ \langle \phi^2 \rangle = \frac{kT}{K} \right. \quad (12.4.25)$$

Medindo $\langle \phi^2 \rangle$ e conhecendo K , determina-se k e, conseqüentemente, N_0 , o que foi feito por Kappler (1931).

12.5 — Interpretação estatística da entropia

(a) Macroestados e microestados

Vimos no Capítulo 10 que a irreversibilidade encontrada nos fenômenos macroscópicos está ligada à 2.^a lei da termodinâmica, expressa em termos do *princípio do aumento da entropia*: $\Delta S \geq 0$, com $\Delta S > 0$ para processos irreversíveis (Seção 10.9). Entretanto, as leis básicas da física (em particular da Mecânica) que regem os processos são reversíveis. Como conciliar estes dois fatos?

Para analisar este problema, vamos considerar um exemplo simples de processo macroscópico irreversível e examinar sua descrição microscópica. O exemplo é o de uma experiência idealizada análoga à expansão livre de um gás. Consideremos um recipiente fechado dividido em duas partes iguais por uma partição (Fig. 12.15). Para $t < 0$, fez-se o vácuo à direita da partição e há um gás em equilíbrio térmico à esquerda. Para $t = 0$, a partição é removida. Num instante posterior (Fig. (c)), o gás terá começado a difundir-se para o recipiente da direita. Finalmente, para tempos maiores, será atingido novo estado de equilíbrio térmico com o gás difundido uniformemente por todo o recipiente (Fig. (d)).

Este processo é irreversível: não esperamos que ocorra espontaneamente na seqüência inversa, da Fig. (d) para a Fig (b). Se assim não fosse, correríamos o risco de morrer sufocados, caso o ar da sala em que nos encontramos se condensasse espontaneamente na outra metade da sala, deixando o vácuo na nossa!

Do ponto de vista microscópico, a difusão do gás

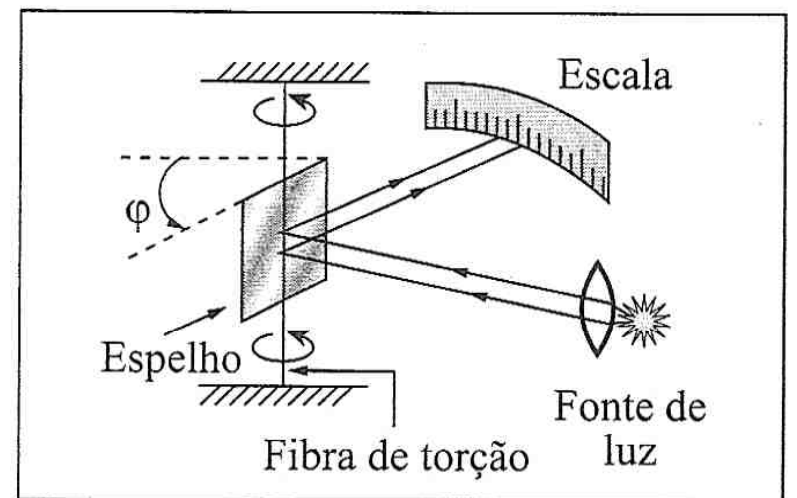


Figura 12.14 — Observação do movimento browniano

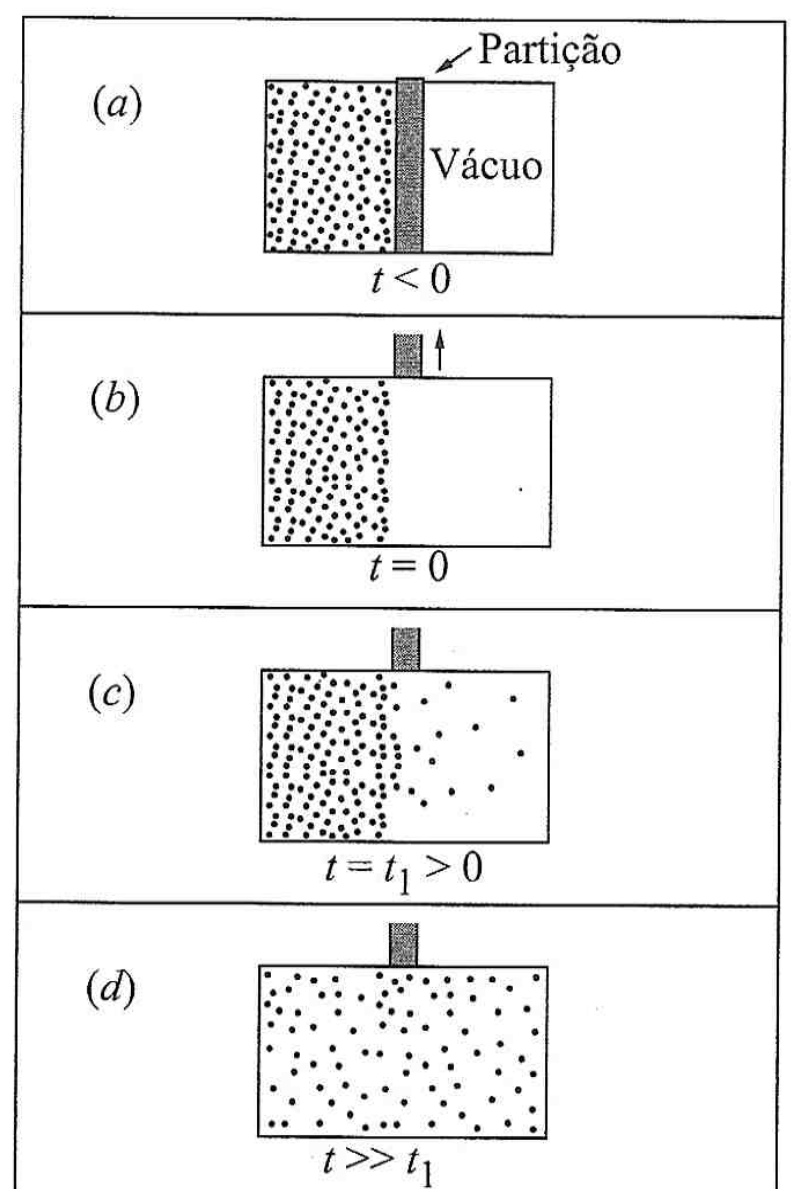


Figura 12.15 — Remoção de partição

da esquerda para a direita ocorre por um processo análogo ao movimento browniano: cada molécula sofre um grande número de colisões com as outras, descrevendo uma “trajetória browniana” em ziguezague extremamente complicada para passar de um lado para outro, o que acaba levando a uma certa distribuição das posições e velocidades das moléculas na situação da Fig. (d).

De acordo com as leis da mecânica, cada uma das colisões entre moléculas é reversível, de modo que o processo inverso (passagem de (d) para (b)) é perfeitamente compatível com essas leis. Corresponde à reversão do movimento (“passar o filme de trás para diante”).

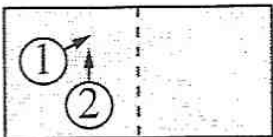
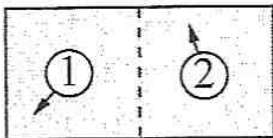
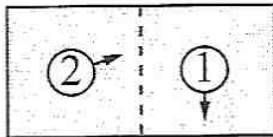
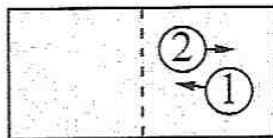
Entretanto, para reconstituir (b) a partir de (d), é preciso *inverter as velocidades de todas das moléculas* em (d), ou seja, partir de uma situação inicial em que as posições e velocidades de um número gigantesco de moléculas ($\sim 10^{27}$, em situações macroscópicas típicas) têm de ser *exatamente* aquelas que produzem o processo inverso.

Embora possível em princípio, esta é uma situação *extremamente improvável*, tão improvável que estamos plenamente justificados quando a consideramos impossível na prática. Não precisamos temer a morte por asfixia súbita devido à condensação espontânea das moléculas de ar!

A idéia de que eventos extremamente improváveis não ocorrem é familiar. Se todos os mutuários de uma companhia de seguros de vida morressem no mesmo dia, ela iria à falência. Entretanto, como dizia Eddington, “a vida humana é proverbialmente incerta, mas poucas coisas são mais certas do que a estabilidade financeira de uma companhia de seguros de vida”. Uma das razões para isso é o grande número de mutuários: pela (12.4.9), a flutuação relativa se torna desprezível num grande número de eventos distribuídos ao acaso. Para o gás, uma distribuição de posições e velocidades iniciais de $\sim 10^{27}$ moléculas que as leva todas a “conspirar” para se concentrarem numa metade do recipiente é tão rara, frente ao número inimaginavelmente maior de outras configurações iniciais que não levam a esse efeito, que sua probabilidade de ocorrência é nula para todos os fins práticos.

Vemos aparecer assim a idéia de que a 2.^a lei da termodinâmica deve ser uma *lei probabilística*, de natureza diferente das leis determinísticas da mecânica clássica, por exemplo.

Voltando ao exemplo do gás, procuremos explicitar de forma mais quantitativa a idéia de que configurações em que as moléculas estão uniformemente distribuídas na metade esquerda e na metade direita do recipiente são mais prováveis do que aquelas em que ele se concentra inteiramente numa das metades. Para isto, vamos examinar configurações possíveis de um “gás teórico” de N moléculas, começando com valores baixos de N e vendo o efeito de aumentar N .

| | | $N = 2$ | | | | | |
|-----|---|-------------------|---------------|---------------|-------|-------|------------------|
| | | Configu- ração | Molécula 1 | Molécula 2 | n_E | n_D | Nº de estados |
| (A) |  | (A) | E | E | 2 | 0 | 1 |
| (B) |  | (B) | E | D | 1 | 1 | 2 |
| (C) |  | (C) | D | E | 1 | 1 | 2 |
| (D) |  | (D) | D | D | 0 | 2 | 1 |
| | | Totais | | | | | 4 |
| | | | | | | | 1 |

As figuras colocadas na tabela mostram as 4 configurações possíveis do “gás de 2 moléculas” no que se refere à ocupação da metade esquerda (E) ou direita (D) do recipiente pelas

moléculas 1 e 2. As colunas “ n_E ” e “ n_D ” da tabela classificam as configurações pelo *número total* de moléculas à esquerda (n_E) e à direita (n_D), não importando *quais* sejam as moléculas de cada lado. A penúltima coluna dá o número de estados com estes valores de (n_E, n_D). O número total $4 = 2^2 = 2^N$ é o mesmo das configurações.

Consideramos cada uma das configurações (A) a (D) como *igualmente provável*: a probabilidade de cada uma é portanto $= 1/4$. Podemos dizer que a probabilidade de que 1 esteja de um determinado lado é $= 1/2$, e o mesmo vale para 2. Como essas probabilidades são *independentes* (a presença de 1 de um lado não afeta a de 2), a probabilidade de que ambos os eventos se realizem, qualquer que seja a configuração, é $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

A última coluna da tabela dá a probabilidade associada à configuração (n_E, n_D). Vemos que é máxima ($= 1/2$) para $n_E = n_D$.

| N = 4 | | | | | | | |
|----------|---|---|---|-------|-------|--------------------|--|
| Molécula | | | | n_E | n_D | Nº de estados | Probabilidade $P(n_E, n_D)$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| E | E | E | E | 4 | 0 | $1 = \binom{4}{0}$ | $1/16 = (1/2)^4$ |
| D | E | E | E | 3 | 1 | $4 = \binom{4}{1}$ | $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| E | D | E | E | | | | |
| E | E | D | E | | | | |
| E | E | E | D | | | | |
| D | D | E | E | 2 | 2 | $6 = \binom{4}{2}$ | $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| D | E | D | E | | | | |
| D | E | E | D | | | | |
| E | D | D | E | | | | |
| E | D | E | D | | | | |
| E | E | D | D | | | | |
| D | D | D | E | 1 | 3 | $4 = \binom{4}{3}$ | $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| D | D | E | D | | | | |
| D | E | D | D | | | | |
| E | D | D | D | | | | |
| D | D | D | D | 0 | 4 | $1 = \binom{4}{4}$ | $1/16 = (1/2)^4$ |
| Totais | | | | | | $16 = 2^4$ | 1 |

A tabela acima mostra os resultados correspondentes para um “gás de 4 moléculas”. É fácil demonstrar (verifique!) que, para N qualquer, os resultados são os seguintes:

Número de configurações das moléculas $= 2^N$; probabilidade de cada configuração $(1/2)^N$. Número de estados com dados $(n_E, n_D) = \binom{N}{n_E} = \binom{N}{n_D}$, onde

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{N-n}$$

(12.5.1)

é o número de combinações de N elementos n a n , ou seja ainda, o coeficiente de $a^{N-n} b^n$ na expansão de $(a + b)^N$ (coeficiente binomial).

A probabilidade $P(n_E, n_D)$ de encontrar n_E moléculas à esquerda e n_D à direita é dada por

$$P(n_E, n_D) = \binom{N}{n_E} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

(12.5.2)

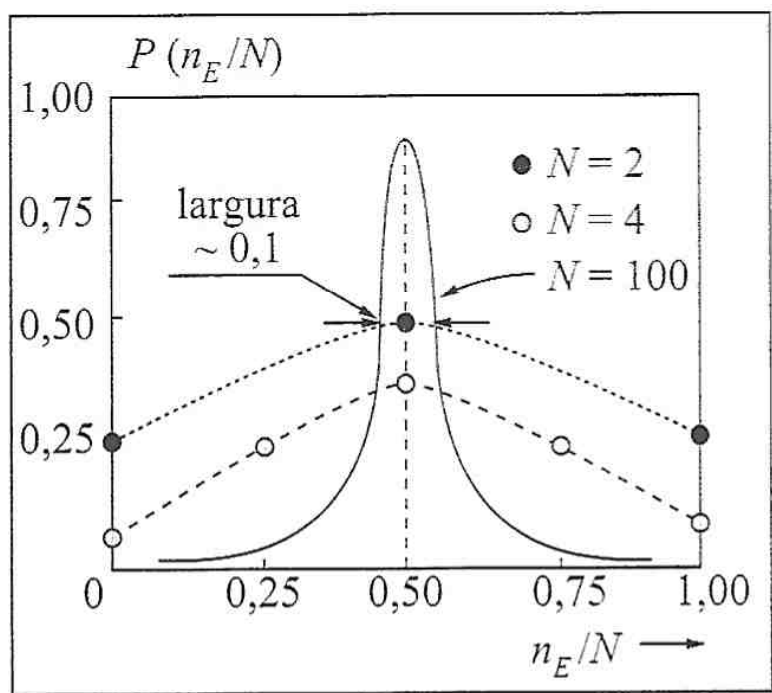


Figura 12.17 — Distribuição de probabilidade

A Fig. 12.17 mostra um gráfico da distribuição de probabilidade (12.5.2) como função de n_E/N , para $N=100$, juntamente com os pontos obtidos acima para $N=2$ e $N=4$. Esta é a chamada *distribuição binomial*, obtida por Jaques Bernoulli. Como mostra a figura, à medida que N aumenta, o pico em torno de $n_E = n_D$ vai-se tornando cada vez mais estreito. Pode-se mostrar que, para N grande, a largura desse pico, que mede a *flutuação relativa* em torno do valor médio, é da ordem de $1/\sqrt{N}$, como na (12.4.9). Logo, para um gás de $N \sim 10^{24}$ partículas, a flutuação esperada de densidade em torno da distribuição uniforme ($n_E = n_D$) é $\sim 10^{-12}$.

Por outro lado, a probabilidade de que as N moléculas se concentrem todas do mesmo lado é

$$P(N,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

(12.5.3)

que é idêntica à probabilidade de obter N caras em N lançamentos sucessivos de uma moeda [cf. (12.2.31)]. Para $N \sim 10^{27}$, esta probabilidade, $(1/2)^{10^{27}} \sim 10^{-3 \times 10^{26}}$, é fantasticamente pequena. Levando em conta o intervalo de tempo médio entre colisões, o tempo que seria preciso esperar para que um tal evento tivesse probabilidade apreciável de ocorrer é enormemente grande, mesmo em confronto com a idade do Universo.

A caracterização de um estado do gás pela sua densidade em diferentes regiões macroscópicas define um *macroestado* do gás. Nas tabelas acima, os macroestados são caracterizados pelos pares (n_E, n_D) .

A cada macroestado, podemos associar diversos *microestados* diferentes: nas tabelas, um microestado é especificado dizendo *quais* das moléculas, de 1 a N , estão em E e quais estão em D . Uma caracterização completa de um microestado, na mecânica clássica, seria obtida dando as posições e velocidades de todas as moléculas

Como vimos pelas tabelas, a cada macroestado corresponde em geral (para N grande) um grande número de microestados diferentes. Como associamos igual probabilidade a cada microestado, segue-se que o *macroestado mais provável de um sistema é aquele que pode ser realizado pelo maior número possível de microestados diferentes*.

Para N muito grande, conforme ilustrado pelo exemplo acima, a distribuição de probabilidade terá um máximo extremamente concentrado em torno do macroestado mais provável, com flutuações extremamente pequenas. A descrição em termos de macroestados corresponde

à descrição termodinâmica macroscópica, em termos de apenas alguns parâmetros, como (P, ρ, T).

(b) Entropia e probabilidade

O exemplo de um processo irreversível correspondente à expansão livre, discutido acima, indica que os processos físicos devem ocorrer no sentido em que a probabilidade associada ao macroestado do sistema *aumenta*, tendendo ao equilíbrio termodinâmico, que deve corresponder ao macroestado de máxima probabilidade.

Podemos ainda dizer, nesse exemplo, que o estado com todas as moléculas na metade esquerda é um estado altamente *ordenado*, que só corresponde a 1 “microestado”, ao passo que o estado com distribuição uniforme das moléculas corresponde ao *máximo de desordem*, no sentido de ter o maior número possível de realizações microscópicas distintas. É a mesma diferença entre as cartas de um baralho bem embaralhado ou ordenado em seqüências do mesmo naipe. O estado de equilíbrio termodinâmico representa a desordem máxima: a distribuição de Maxwell corresponde ao “caos molecular”.

Há um paralelismo completo entre a evolução do macroestado de um sistema no sentido da probabilidade crescente e o princípio de aumento da entropia, o que nos leva a inferir que *a entropia deve ser uma medida da probabilidade termodinâmica*.

Se associarmos um *peso estatístico* W a um macroestado, definido como o *número de microestados* compatíveis com esse macroestado (ou seja, proporcional à sua probabilidade termodinâmica), a entropia S deve ser portanto uma função crescente de W . Que espécie de função?

Uma pista é fornecida pelo fato de que *a entropia é uma grandeza aditiva*, ou seja, se juntarmos dois volumes de gás à mesma temperatura (para que permaneçam em equilíbrio termodinâmico), a entropia do sistema resultante, S , é a soma das entropias dos dois sistemas [cf. (10.7.25)].

Por outro lado, como se trata de dois sistemas independentes, a probabilidade P de um macroestado do sistema resultante é o produto das probabilidades dos macroestados das componentes, ou seja,

$$P = P_1 P_2 \Rightarrow S = S_1 + S_2 \quad (12.5.4)$$

Uma função com a propriedade de levar produtos em somas é o logaritmo. Somos assim levados a inferir o célebre resultado devido a Ludwig Boltzmann (1872)

$$\boxed{S = k \ln W} \quad (12.5.5)$$

onde k é uma constante e W é o peso estatístico do macroestado de entropia S , ou seja, o número total de microestados compatíveis com esse microestado. Na física clássica, W seria definido a menos de um fator constante arbitrário, porque a entropia é definida pela (10.7.4) a menos de uma constante aditiva arbitrária (isto não ocorre na física quântica).

Pela (12.5.5),

$$\boxed{S_f - S_i = k \ln(W_f / W_i)} \quad (12.5.6)$$

ou seja, a variação de entropia entre dois estados depende do *peso estatístico relativo* (ou probabilidade relativa) de um em relação ao outro, dada por W_f/W_i .

No modelo acima de expansão livre, vimos que a probabilidade de que as N moléculas do gás estejam no volume $V/2$ é

$$\left(\frac{V/2}{V}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Da mesma forma, as probabilidades de que o gás esteja ocupando o volume V_i e o volume V_f , respectivamente, seriam

$$P_i = \left(\frac{V_i}{V}\right)^N, \quad P_f = \left(\frac{V_f}{V}\right)^N$$

de modo que a razão dos pesos estatísticos correspondentes seria

$$\frac{W_f}{W_i} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^N \quad (12.5.7)$$

Substituindo este resultado na (12.5.6), vemos que a variação de entropia numa expansão livre do volume V_i ao volume V_f é

$$\Delta S = S_f - S_i = k \ln[(V_f / V_i)^N] = Nk \ln(V_f / V_i)$$

ou seja, para n moles de gás ($N = nN_0$),

$$\Delta S = S_f - S_i = nN_0 k \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (12.5.8)$$

Comparando este resultado com a (10.9.12), concluímos que

$$k = R / N_0 \quad (12.5.9)$$

Logo, pela (11.4.22), a constante k na (12.5.5) é a *constante de Boltzmann*. A (12.5.5) é uma das relações fundamentais da física, estabelecendo a conexão entre termodinâmica e mecânica estatística. A expressão geral (12.2.49) da distribuição de Boltzmann, também conhecida como *distribuição canônica* em energia, está diretamente relacionada com a (12.5.5).

12.6 — A seta do tempo

(a) A seta do tempo termodinâmica

Com base na interpretação estatística da 2.^a lei da termodinâmica, podemos discutir agora o problema da “seta do tempo” colocado na Seção 10.1: qual é a origem física da distinção entre passado e futuro?

Esta distinção aparece para *sistemas macroscópicos que não estejam em equilíbrio termodinâmico* (a situação de equilíbrio é estacionária no tempo, por definição). Numa situação deste tipo, a entropia do sistema *tende* a aumentar. Note que esta é uma afirmação probabilística, ou seja, não podemos afirmar que a entropia *sempre* aumenta a cada instante, porque pode haver flutuações. Entretanto, como vimos, para um sistema macroscópico, flutuações de amplitude apreciável são extremamente raras.

Podemos utilizar este resultado para definir uma “seta do tempo termodinâmica”: o *futuro* é a direção em que a entropia *tende* a aumentar. Assim, por exemplo, nas figuras da pág. 285, o tempo cresce de (b) para (d).

No caso deste exemplo, a situação inicial da Fig. 12.15 (b) ($t = 0$) foi criada artificialmente a partir de (a), removendo uma partição. Suponhamos, porém, que não fosse assim: que o sistema estivesse evoluindo livremente (sem nossa intervenção) também para $t < 0$, e que perguntássemos: qual foi a evolução passada que levou à situação da fig. (b) (todas as moléculas na metade esquerda) para $t = 0$?

Como as leis microscópicas que governam as colisões moleculares são reversíveis, a resposta é que, com grande probabilidade, o estado (b) de baixa entropia para $t = 0$ deve ter resultado de estados de entropia mais alta (como (d)) para $t < 0$.

Este resultado parece invalidar a seta do tempo termodinâmica: a entropia aumenta tanto para $t > 0$ como para $t < 0$, e nada distingue o passado do futuro: o mais provável é que o estado inicial de entropia mais baixa represente um *mínimo* de entropia associado a uma flutuação grande, restabelecendo a simetria temporal na evolução de S , como ilustrado na Fig. 12.18. Este é o “paradoxo da reversibilidade”, formulado por Loschmidt em 1876.

Entretanto, isto pressupõe que o sistema estava evoluindo *espontaneamente*, sem intervenção externa.

Na prática, se encontrássemos um gás na situação da Fig. (12.15(b)), poderíamos concluir praticamente com certeza que ela foi obtida preparando o sistema como indicado na Fig. (a) e removendo a partição para $t = 0$, e não pela evolução espontânea do gás, pois a probabilidade de uma flutuação espontânea tão grande, como vimos à pág. 288, é essencialmente nula.

Para um sistema *preparado* para $t = 0$ fora de equilíbrio termodinâmico, ou seja, abaixo da entropia máxima, o argumento de Loschmidt deixa de valer, pois o sistema considerado não existia antes da preparação. A partir da preparação, a seta do tempo termodinâmica passa a operar: a direção passado \rightarrow futuro é aquela em que S tende a crescer.

Esta seria uma explicação antropomórfica da irreversibilidade do tempo: as experiências que fazemos, preparando um sistema inicial fora de equilíbrio e só a partir daí considerando sua evolução, introduziriam o elemento irreversível, com a tendência da entropia ao crescimento monotônico. Na prática, seria impossível preparar um sistema como o da Fig. 12.15(d) com as velocidades invertidas, fazendo-o evoluir para a situação da Fig. 12.15(b). Do ponto de vista da probabilidade termodinâmica, sistemas ordenados são improváveis e sistemas desordenados (ou seja, com o mesmo macroestado correspondendo a um grande número de microestados possíveis) são mais prováveis, e a evolução tende a ser no sentido ordem \rightarrow desordem.

Um ser vivo é um sistema altamente improvável, e sua existência parece à primeira vista violar o princípio de aumento da entropia. Entretanto, é importante lembrar que este princípio (Seção 10.9) se aplica a um sistema *fechado*, ou seja, termicamente isolado. Não há nada de contraditório em que a entropia de um sistema *aberto*, em interação com o exterior (o resto do universo, na terminologia da Seção 10.9), diminua, às expensas de um aumento maior da entropia do resto do Universo. É o que acontece com um organismo vivo: ele sobrevive, em última análise, graças à produção de moléculas orgânicas com grau de ordem elevado, pelo processo de fotossíntese, que é alimentado pela radiação solar.

A interação com o resto do Universo produz, em geral, perturbações significativas nos microestados de sistemas macroscópicos; nesse sentido, devido à interação gravitacional, nenhum sistema pode ser considerado como completamente isolado.

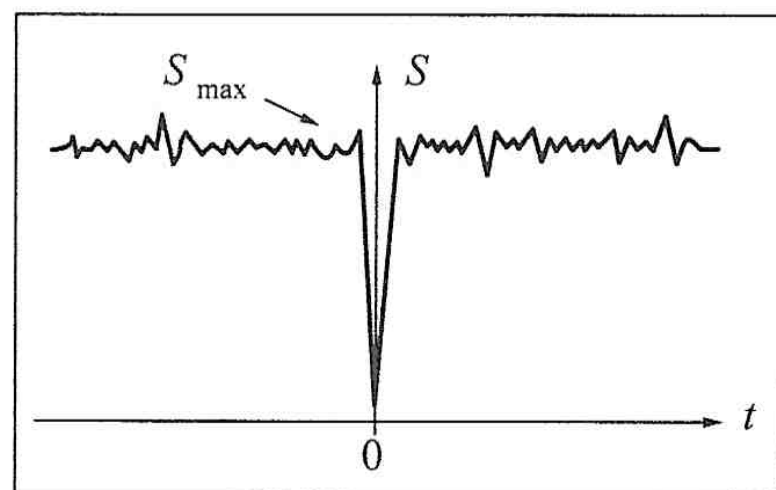


Figura 12.18 — Paradoxo da reversibilidade

(b) A seta do tempo cosmológica

O argumento exposto acima está longe de esgotar o problema da seta do tempo. A irreversibilidade associada com a intervenção de um observador e a preparação de uma experiência é apenas um aspecto muito parcial da irreversibilidade encontrada nos fenômenos naturais. O Universo é um sistema longe do equilíbrio termodinâmico, e a grande maioria dos fenômenos que observamos evolui no sentido da entropia crescente, independentemente de uma “preparação” pelo observador.

Assim, por exemplo, a velocidade de rotação da Terra tende a diminuir em consequência do atrito das marés provocadas pela Lua, efeito dissipativo que corresponde a um aumento de entropia. As estrelas (em particular o Sol) sofrem um processo de evolução termodinâmica de entropia crescente. Todas as observações são consistentes com um crescimento monotônico da entropia desde o passado mais remoto até o presente.

Se considerarmos fenômenos irreversíveis na escala terrestre, inclusive a vida, veremos que estados iniciais de entropia baixa, termodinamicamente improváveis, dependem geralmente, em última análise, da radiação solar (desníveis hidrográficos, gradientes de temperatura e outras situações de desequilíbrio são produzidos por ela). Por sua vez, a radiação solar provém de processos termonucleares no sol. Para explicar sua origem, precisaríamos discutir a evolução do sol a partir de sua formação em nossa galáxia.

Somos assim levados à idéia de uma “seta do tempo cosmológica”, ligada à evolução do Universo como um todo, no sentido ordem \rightarrow desordem, e o problema se transfere ao de explicar a origem de um estado mais ordenado no passado remoto.

Na cosmologia, são estudadas as propriedades e a evolução do Universo, fazendo abstração de “detalhes finos” da distribuição de matéria, ou seja, considerando-a globalmente como uma espécie de “gás de galáxias”. Adota-se o chamado *princípio cosmológico*, que representa uma extensão a todo o Universo do ponto de vista de Copérnico: não há pontos de observação privilegiados; a matéria está distribuída (com abstração de irregularidades locais) de forma *homogênea* e *isotrópica* para um observador em qualquer galáxia típica. As observações atuais são consistentes com este princípio.

Em 1929, o astrônomo americano Edwin P. Hubble descobriu que as galáxias estão todas se afastando da nossa (ou seja, pelo princípio cosmológico, umas das outras): o *Universo está em expansão*. Isto se verifica através do *desvio para o vermelho* da luz recebida dessas galáxias, que é interpretado como resultado do efeito Doppler para a luz (análogo ao que discutimos na acústica). Pela magnitude do desvio é possível medir a velocidade de recessão das galáxias. Hubble mostrou que, para uma galáxia à distância r , essa velocidade é dada por

$$V = Hr \quad (12.6.1)$$

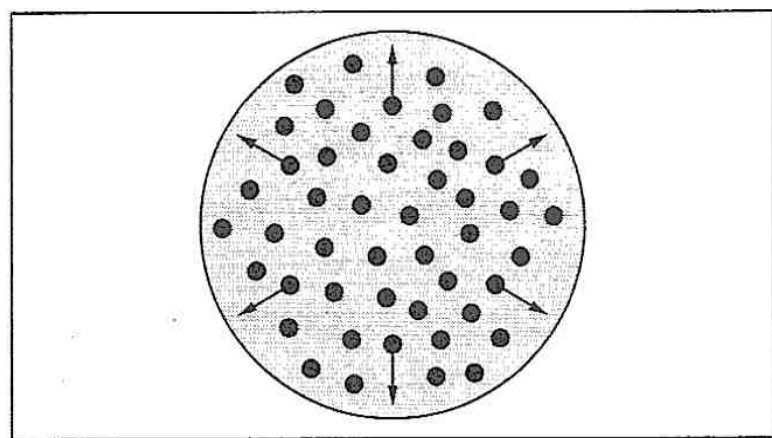


Figura 12.19 — Expansão de um balão

Logo, a expansão observada do Universo é uma *expansão uniforme*, o que é compatível com o princípio cosmológico. Um análogo bidimensional seria a superfície de um balão uniformemente sarapintado que se infla com velocidade de expansão constante: vistas de qualquer uma das pintas, todas as demais se afastam dela isotropicamente, com velocidades de recessão proporcionais à distância (Fig. 12.19).

O parâmetro H na (12.6.1) chama-se *constante de Hubble*. Seu valor observado, que está sujeito a uma incerteza apreciável, como muitos dos parâmetros medidos na escala cosmológica, é atualmente estimado ser $65 \pm 10 \text{ kms}^{-1}/\text{Mpc}$, onde 1 Mpc (megaparsec) $\approx 3,26 \times 10^6$ anos-luz. Logo, a velocidade de recessão para

uma galáxia a 1 Mpc de distância é ~ 65 km/s. Para as galáxias mais distantes observadas, V atinge valores que são frações apreciáveis da velocidade da luz.

Se extrapolamos para o passado, em sentido inverso, a expansão atual, o Universo irá se contraindo, e chegaremos a uma densidade de matéria extremamente elevada (“singularidade”) para tempos da ordem de $1/H \sim 1,5 \times 10^{10}$ anos atrás. As leis físicas atualmente conhecidas, em particular a teoria de Einstein da gravitação (relatividade geral), extrapoladas à escala do Universo, levam a uma singularidade deste tipo, correspondendo a um modelo explosivo da origem do Universo (teoria do “big bang”), que se tornou conhecido como o “modelo padrão”.

Neste modelo, chega-se à conclusão de que, nos estágios iniciais da evolução do Universo, a maior parte da energia estava presente sob a forma de radiação, ou seja a densidade de radiação dominava sobre a densidade de matéria (massa de partículas nucleares). Nesse estágio, haveria uma interação intensa entre a radiação e a matéria e teria sido atingida uma situação de *equilíbrio termodinâmico*.

Com a expansão subsequente do Universo, teria sido atingido um ponto em que a densidade de matéria ultrapassou a de radiação: atualmente, a maior parte da energia visível está presente sob a forma de matéria. A radiação térmica existente na época anterior de equilíbrio termodinâmico iria se “resfriando” com a expansão. Em 1948, Alpher, Gamow e Herrman predisseram que a radiação térmica primordial ainda deveria existir como uma “radiação de fundo” universal, correspondendo a uma temperatura atual de alguns graus K.

Em 1965, Arno A. Penzias e Robert W. Wilson comprovaram a existência dessa radiação térmica de fundo (receberam o prêmio Nobel por essa descoberta), que é um fóssil da radiação primordial de equilíbrio térmico, com a temperatura atual $T \sim 3$ K, e isotrópica, conforme deveria ser. Esta é uma das evidências experimentais mais importantes para o modelo cosmológico padrão.

Qual é a relação entre estes resultados e o problema da seta do tempo cosmológica? Quando o Universo passa da época dominada pela radiação à época dominada pela matéria, ele *deixa de estar em equilíbrio termodinâmico*. A taxa de expansão é mais rápida do que a velocidade dos processos necessários para atingir o equilíbrio.

A partir daí, ocorrem flutuações e desvios locais do equilíbrio, e é possível que isto tenha levado à condensação de galáxias, pelo efeito da atração gravitacional (há modelos explicando como isto poderia ocorrer). Este seria o análogo cosmológico da “preparação” de um estado inicial fora do equilíbrio termodinâmico. A partir deste estado, a seta do tempo termodinâmica passaria a operar no sistema, no mesmo sentido que a cosmológica.

O importante no modelo não é o fato de que o Universo esteja em expansão, mas sim que isso leva à ruptura do equilíbrio termodinâmico. O Universo poderia passar eventualmente a uma época de recontração (o que poderia ocorrer, para um certo domínio de variação dos parâmetros, segundo a teoria da relatividade geral), sem que isso alterasse o sentido da seta do tempo.

As teorias cosmológicas baseiam-se em grandes extrapolações do domínio de validade comprovado das leis físicas conhecidas, e os dados de observação, além de escassos, estão sujeitos a incertezas consideráveis, de modo que é preciso encarar com cautela os argumentos apresentados. Na física quântica, a preparação e observação de um sistema introduzem novos elementos de irreversibilidade. Não podemos abordar aqui este e outros aspectos do problema da seta do tempo, que continua sendo um dos mais profundos e fascinantes da física.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 12

1. Ao nível do mar, a composição volumétrica da atmosfera é: 12% de oxigênio e 78% de nitrogênio (há 1% de outros gases, principalmente argônio). Suponha (embora não seja uma boa aproximação!) que a temperatura do ar não variasse com a altitude, e que seu valor fosse de 10°C . Neste caso, qual seria a composição volumétrica da atmosfera a 10km de altitude? (Tome 1 unidade de massa atômica = $1,66 \times 10^{-27}$ kg).
2. Considere um gás hipotético para o qual a função $F(v)$ de distribuição de velocidades [definida na Seção 12.2(d)] tivesse a forma indicada na Fig. P.1. Calcule em função de v_0 : (a) A constante de normalização A (fig.). (b) Os valores de $\langle v \rangle$, v_p e v_{qm} para esta distribuição.

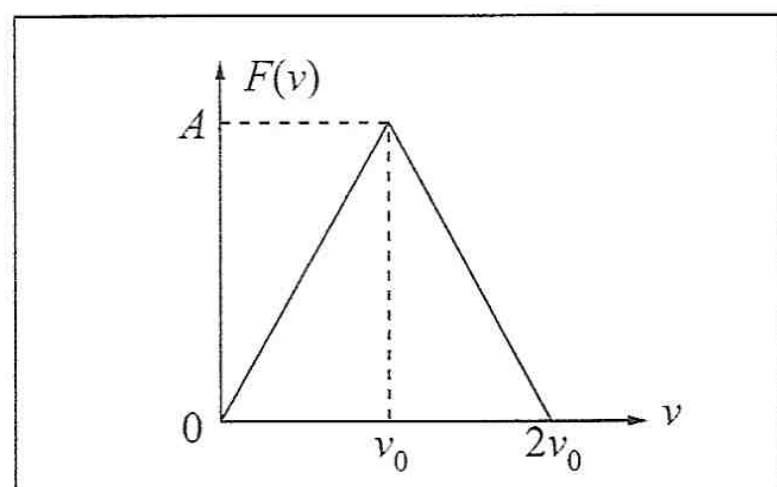


Figura P.1

3. Para um gás ideal em equilíbrio térmico, qual é a fração das moléculas cujas velocidades diferem em menos de 1% da velocidade mais provável v_p ? Note que (Fig. 12.7) podemos tomar $\Delta v \approx dv$ neste caso.
4. Para um gás ideal em equilíbrio térmico, calcule o valor médio da magnitude de um componente da velocidade de uma molécula (numa direção qualquer). Compare-o com $\langle v \rangle$.
5. Calcule a razão R entre $\langle \frac{1}{v} \rangle$ e $\frac{1}{\langle v \rangle}$ para um gás ideal em equilíbrio térmico.
6. Ache: (a) a função de distribuição em energia $F(E)$, tal que $F(E) dE$ é a fração das moléculas com energia entre E e $E + dE$, para um gás ideal em equilíbrio térmico à temperatura T . A partir dela, calcule: (b) A energia média $\langle E \rangle$, comparando o resultado com $\frac{1}{2} m v_{qm}^2$; (c) a energia mais provável E_p , comparando o resultado com $\frac{1}{2} m v_p^2$.
7. Num feixe molecular, a densidade de corrente (número médio de moléculas por unidade de área e tempo), para moléculas com velocidades entre v e $v + dv$, é dada pela (12.3.3). Calcule v_p e E_p para as moléculas do feixe, comparando os resultados com os valores correspondentes v'_p e E'_p dentro do forno do qual o feixe é extraído.
8. Um gás ideal, cujas moléculas têm massa m , está em equilíbrio térmico à temperatura T dentro de uma ultracentrífuga de raio R que gira com velocidade angular ω . (a) Ache a razão $\rho(R)/\rho(0)$ da densidade do gás junto às paredes à densidade no eixo da ultracentrífuga (Sugestão: use o conceito de "potencial centrífugo" discutido na Seção 1.4). (b) Calcule o valor numérico dessa razão se o gás é oxigênio, $T = 300$ K, $R = 10$ cm e a frequência de rotação é 10^3 rps.
9. Considere um gás ideal de N moléculas, em equilíbrio num recipiente de volume V . Calcule: (a) a probabilidade p_1 de encontrar todas as moléculas concentradas num volume $V/3$ (macroestado 1); (b) a probabilidade p_2 de encontrá-las todas num volume $2V/3$ (macroestado 2); (c) A probabilidade p de encontrar $N/3$ moléculas em $V/3$ e as demais no volume restante; (d) a diferença de entropia $\Delta S = S_2 - S_1$ entre os estados 1 e 2; (e) os valores numéricos de p_1 , p_2 e p para $N = 9$.

Respostas dos Problemas Propostos

CAPÍTULO 1

1. $p_A = 0,75 \text{ atm}$
2. $p_1 - p_2 = \rho gh[1 + (d/D)^2]$
3. $\theta = 14,4^\circ$
5. (a) $F = \frac{1}{2} \rho g l h^2$; C_0 está sobre a vertical mediana da comporta, a $1/3$ da altura a partir da base. (b) 3,1 m.
6. (a) F vertical, para baixo; $|F| = \rho g h a b$. (b) R vertical, para baixo; $|R| = \rho g h a b (a - l \cos \theta) =$ peso total do líquido.
7.
$$H = \frac{4}{\pi \rho D^2} \left(m - \frac{M d^2}{D^2 - d^2} \right)$$
8. (a) $F = \frac{\pi d^2}{4} \Delta p$; (b) $F \approx 1.000 \text{ kgf}$; 13 cavalos.
9. 90%
10. (a) Não se altera; (b) Desce
11. $\rho_{\text{rel}} = V_0 / (V_0 - A h)$
12. A coroa é de prata.
13. (a) 0,85 kgf; (b) 1,1 kg
14. $h = 0,46 \text{ m}$
15. $a_{\text{máx}} = 1,96 \text{ m/s}^2$
16. (a) $\rho = 0,2 \text{ g/cm}^3$; (b) 10,7 N
17. 40%
18. 628 kgf
19. $p = p_0 = \rho_0 g h + \frac{1}{2} c g h^2$, onde p_0 é a pressão atmosférica na superfície.
20. O de alumínio; 3,65 g.

CAPÍTULO 2

1. 0,24 l/s.
2. (a) $d = h$; (b) $h/2$.
3. 3,96 m/s.
4. 177 m/s
6. $a_0 = -2\rho ghA/(M_0 + m_0)$ (ρ = densidade da água).
7. (a) 0,14 mm/s; (b) 0,39 mm/s; (c) $z = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{\rho}{r} \right)^4$, onde z é a altura a partir do centro, v a velocidade de descida do nível e ρ a distância do eixo.
8. $\frac{\rho^2}{a^2} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gz}}$, onde $Q = \pi a^2 v$.
9. 0,99 m/s.
10. $v = \sqrt{2 \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1 \right) gh}$
11. $Q = \pi R^2 \left\{ \frac{2gh(\rho_f - \rho)}{\rho[(R/r)^4 - 1]} \right\}^{1/2}$
12. (a) $v = \sqrt{2gh_1}$; (b) $p_A = p_0 - \rho gh_1$; $p_B = p_0 - \rho g(h_0 + h_1)$; (c) $h_{0,\text{máx}} = \frac{p_0}{\rho g} - h_1$.
13. (a) $2,75 \times 10^5$ l/dia; (b) 0,203 m/s
14. 190 km/h.
15. $p(r) = p_\infty - \frac{\rho C_r^2}{8\pi^2 r^2} = p_\infty - \frac{1}{2} \rho v^2$, onde p_∞ é a pressão p a grande distância ($r \rightarrow \infty$).

CAPÍTULO 3

1. $X = A \sin(\omega t)$; $\omega = \sqrt{k/(m+M)}$; $A = \frac{mv}{\omega(m+M)}$.
2. $z = l_0 + \frac{mg}{k} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$
3. $x_2 = 0,02 \cos \left(100t - \frac{\pi}{3} \right) = -x_1$ (em m); (b) Sim. Para $t = \frac{\pi}{120}$ s; (c) 0,04 J.
4. $\tau = 2\pi \sqrt{r/g}$

$$5. \quad (a) \ A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + 2 \frac{kh}{mg}}; \quad (b) \ E = mgh + \frac{(mg)^2}{2k}.$$

$$6. \quad \tau_a = \pi R \sqrt{2M/K}; \quad \tau_b = \pi R \sqrt{M/K}$$

$$7. \quad \theta = 0,096 \sin(3,13 t)$$

$$8. \quad A = \mu_e g (m + \dot{M})/k.$$

$$9. \quad \omega = \sqrt{gA/V_o}$$

$$10. \quad \omega = 14 \text{ s}^{-1}.$$

$$11. \quad (a) \ 2,45 \text{ cm}; \quad (b) \ 2,04 \text{ cm}.$$

$$13. \quad \omega = \sqrt{\frac{5}{7} \frac{g}{R}}$$

$$14. \quad \tau_a = \tau; \quad \tau_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau$$

$$15. \quad s = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \text{raio de giração}; \quad \tau_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{3}g}}.$$

$$16. \quad \tau = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\sqrt{3}l/g}$$

$$17. \quad \pm \frac{\pi}{6} \pm \pi$$

$$18. \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}; \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} \text{ [cf. 1, Capítulo 5, Problema 8]}$$

$$19. \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}$$

$$20. \quad \omega = \sqrt{\rho A g (1 + \cos \varphi) / M}$$

$$21. \quad (a) \ k = 989 \text{ N/m}; \quad (b) \ v = 1,24 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$22. \quad (b) \ \cos(3a) = \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a; \quad \sin(3a) = 3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a.$$

$$23. \quad x_1 + x_2 = \sqrt{3} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

CAPÍTULO 4

$$2. \quad x \approx 0,25 e^{-t} \sin(20t).$$

$$3. \quad (a) \ \delta = \frac{1}{2} \gamma \tau; \quad (b) \ \delta = (\ln 2)/n \approx 0,69/n.$$

4. (a) $v_0 = 10 \text{ m/s}$; (b) $x = e^{-t} (2 + 12t)$ (em m).

5. $z = z_0 + (v_0/\gamma) (1 - e^{-\gamma t})$, onde $\gamma = \rho/m$.

6. $z = z_0 + \left(\frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{g}{\gamma} t$; velocidade terminal $V = g/\gamma$ ($\rho V = mg$), onde $\gamma = \rho/m$.

7. $x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]$

8. $x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + \beta^2)} \left[e^{-\beta t} - \cos(\omega_0 t) + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]$

9. $z = 2,15 + 0,01 \exp(-0,125 t) [\cos(2,23 t) + 0,056 \sin(2,23 t)]$ (em m).

10. (a) $\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$; $A_{\text{máx}} = \frac{F_0}{m\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$; (b) $\omega_{\text{máx}} = \omega_0$; $(\omega A)_{\text{máx}} = F_0/(m\gamma)$.

11. (a) $z = a[\sin(\omega t) - (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)]$, (b) $F = mg + k[z - A\sin(\omega t)]$, onde $\omega = 2\pi/\tau$ ($\tau = 1 \text{ s}$), $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $A = 0,05 \text{ m}$, $a = \omega_0^2 A/(\omega_0^2 - \omega^2) = 0,066 \text{ m}$.

12. O bloco oscila com período $\tau = \frac{\pi}{5} \text{ s} \approx 0,63 \text{ s}$. A amplitude de oscilação decresce de 4,9 cm por semiperíodo. O bloco pára na origem após 5 semiperíodos $\approx 1,57 \text{ s}$ (tomando a origem na posição de equilíbrio).

13. $\bar{P} = \frac{1}{2} \omega F_0 |b|$

14. $x_1 = 1,13 \sin(4,43 t) - 0,34 \sin(14,8 t)$; $x_2 = 1,13 \sin(4,43 t) + 0,34 \sin(14,8 t)$ (em cm).

15. $x_1 = \frac{v}{2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right]$; $x_2 = \frac{v}{2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} + \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right]$; , onde $\omega_1^2 = k/m$; $\omega_2^2 = (k + 2K)/m$.

16. (a) $x_1 = \frac{F_0}{m} \frac{k}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$
 $x_2 = \frac{F_0}{2m} \frac{(\omega_0^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$; onde $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}$

17. (a) $M \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$; $m \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_3) - k(x_1 - x_2)$; $M \ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$.

(b) $\ddot{\xi} + (K + K') \xi = K' \eta$; $\ddot{\eta} + (K + K') \eta = K' \xi$, onde $K = k/M$; $K' = k/m$.

(c) $\omega_1^2 = K$; $\omega_2^2 = K + 2K'$. No modo 1, as massas M oscilam em relação a m com amplitudes opostas; no modo 2, m oscila em relação ao CM das outras duas. (d) $\omega_2 / \omega_1 = \sqrt{11/3}$.

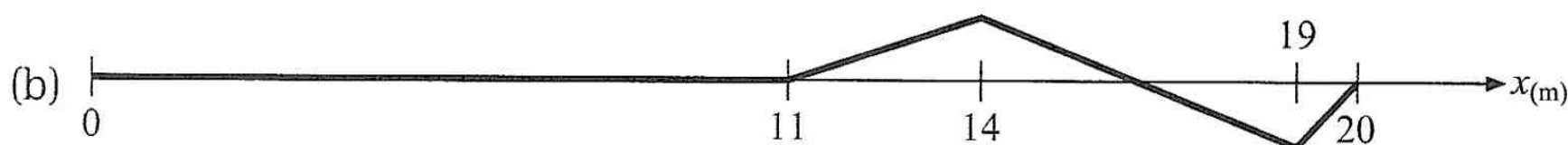
18. (a) $\ddot{z}_1 + Kz_1 = Kz_2$; $\ddot{z}_2 + 2Kz_2 = Kz_1$ $\left(K = \frac{k}{m} \right)$.

$$(b) \ q_1 = z_1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)z_2; \quad q_2 = z_1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)z_2.$$

$$(c) \ \omega_1^2 = \frac{K}{2}(3 - \sqrt{5}); \quad \omega_2^2 = \frac{K}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

CAPÍTULO 5

1. (a) $v = 10 \text{ m/s}$; $\lambda = 2 \text{ m}$; (b) $y = 0,03 \cos\left(\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; (c) $I = 0,44 \text{ W}$



3. 7,6.

4. 0,91%

6. (a) $y = 5,29 \times 10^{-3} \cos(2,23x - 628t + 1,24)$; (b) 9,8 W; (c) $I_{\text{máx}}/I_{\text{min}} = 9$.

7. (a) 0,3 m; (b) 3/4.

8. (a) $v_n = (2n + 1) v / (4l)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

9. $4l/v$

10. $E_n = \pi^2 \mu l v_n^2 b_n^2$.

11. (a) $v_i = \sqrt{T/\mu_i}$, $k_i = \omega/v_i$ ($i = 1, 2$).

(d) $\tau = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$; $\rho = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$ (< 0 para $v_1 > v_2$).

12. (a) $r = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$; $t = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}$; (b) O fluxo de energia incidente é igual ao fluxo de energia refletido mais o fluxo de energia transmitido.

CAPÍTULO 6

1. (a) 1.005 m/s; (b) $v_{\text{He}}/v_{\text{ar}} \approx 2,93$, o que transforma uma voz de baixo em voz de soprano.

2. (a) 103 db; (b) 4,2 N/m²; (c) 0,015 mm; (d) 6,3 m.

3. $l = 32,5 \text{ cm}$; (b) $\Delta v = 4,5 \text{ Hz}$.

4. (a) 76 cm; (b) 1,5 cm; (c) 5 cm; (d) 334 m/s.

5. (a) aos nodos da onda estacionária de deslocamento; (b) $v = 2v\Delta l$; (c) 267,5 m/s.

7. (b) $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$; (c) $p = 2 \mathcal{P} \cos(k_x x) \cos(k_y y - \omega t)$, onda estacionária na direção x e caminhante na direção y .
9. Mínimos: 34 cm, 59 cm; máximos: 48 cm, 68 cm, além do máximo na origem, $I_{\text{máx}} = 9 I_{\text{mín}}$.
10. Mínimos de intensidade nula nas direções θ_n dadas por:
$$d \sin \theta_n = n\lambda / 3 \left(n = 1, 2, 4, 5, \dots; \frac{n}{3} \neq \text{inteiro} \right).$$
11. 35,3 km/h.
12. (a) 90 km/h; (b) 300 Hz.
13. 15 km/h.
14. $|u| = \frac{v\Delta v}{2v_0 + \Delta v}.$
15. $v = \left(\frac{v - V + v_2}{v - V - v_1} \right) v_0; \quad v' = v_0.$
16. $v = v_0 \left(1 + \frac{u}{v} \cos \theta \right).$
18. (a) 30°; (b) 981 m.

CAPÍTULO 7

1. Aumenta de 7,23 cm³.
2. $1,63 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$.
3. $R = 10 \text{ m}$; $y = 1,125 \text{ mm}$.
4. (a) $1,9 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$; (b) 19,6 °C.
5. $l_1 = 47,9 \text{ cm}$; $l_2 = 45,8 \text{ cm}$.
6. (a) $\rho/\rho_0 \approx 1 - \beta (T - T_0)$; (b) $\beta = \frac{h - h_0}{h_0(T - T_0)}$; (c) $\beta = 1,5 \times 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$.
7. (a) $\Delta h = h_0 (\beta - 2\alpha)$; (b) $\Delta h = 0,016 \text{ mm}$.
8. (a) $h \approx \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{d_0^2} (\beta - 3\alpha)(T - T_0)$; $d_0 \approx 0,062 \text{ mm}$.
9. (a) $H_0 = 60,96 \text{ cm}$; (b) $\delta H = 3,5 \text{ mm}$.

CAPÍTULO 8

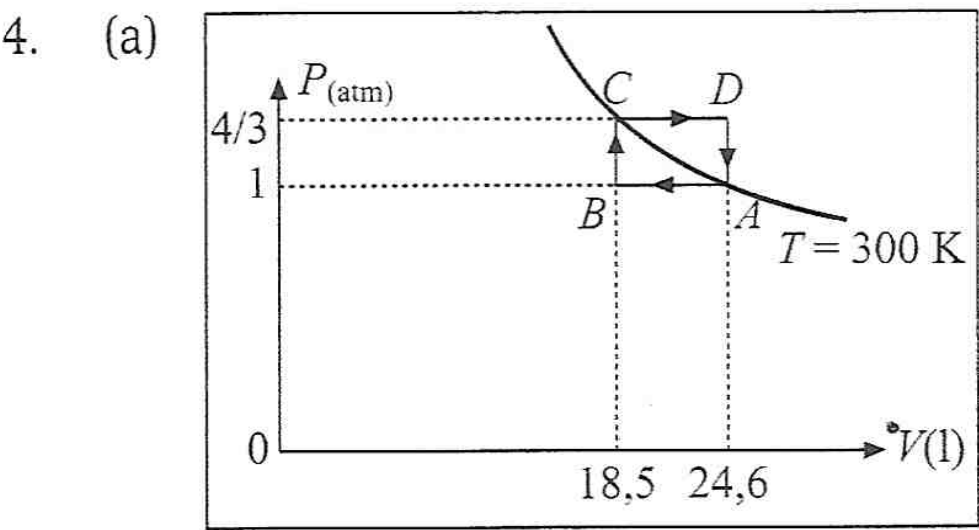
1. 0,12°C
2. (a) $\bar{C}_V = 7,84 \times 10^{-2} \text{ cal/mol K}$; (b) 13,4 cal.
3. 30,5 g.

4. (a) $1,5 \times 10^{22}$ J/dia; (b) 0,28 cm.
5. $13,1^{\circ}\text{C}$.
6. $0,59 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$
7. 250 W.
8. $0,41 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$
9. $4,17 \text{ J/cal}$.
10. Sim. 1,6 g.
11. (a) 51°C ; (b) 211,5 g.
12. $k = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}}$.
13. $\frac{dQ}{dt} = 4\pi k \frac{r_2 r_1}{(r_2 - r_1)} (T_2 - T_1)$.
14. (a) $\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi k l}{\ln(\rho_2 / \rho_1)} (T_2 - T_1)$; (b) 5 h 48 min.
15. $104,2^{\circ}\text{C}$.
16. (a) $l = \sqrt{\frac{2k(\Delta T)t}{\rho L}}$; (b) 1,98 cm.
17. (a) $1,69 \times 10^5 \text{ J}$; (b) $2,09 \times 10^6 \text{ J}$.
18. (a) 150 J; (b) 300 J; (c) 350 J; (d) $W_{(fci)} = -200 \text{ J}$; $Q_{(fci)} = -250 \text{ J}$.
- 19.

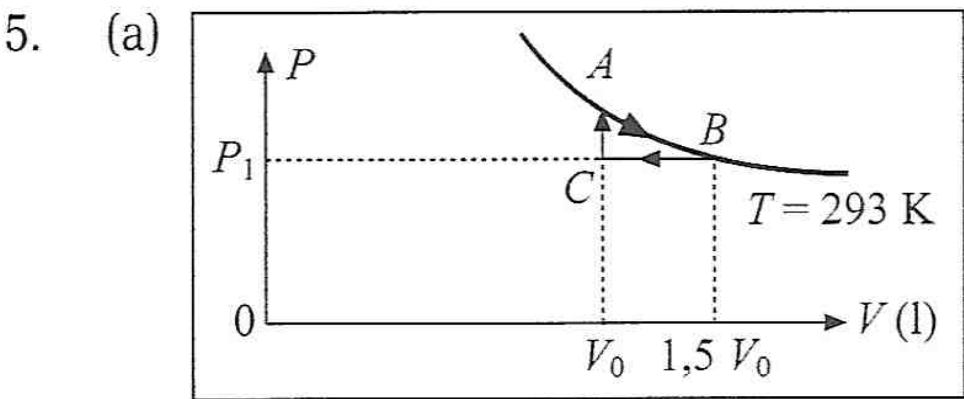
| Etapa | W(J) | Q(J) | U(J) |
|--------------|------|------|------|
| ab | 500 | 800 | 300 |
| bc | -750 | -950 | -200 |
| ca | 0 | -100 | -100 |
| Ciclo (abca) | -250 | -250 | 0 |

CAPÍTULO 9

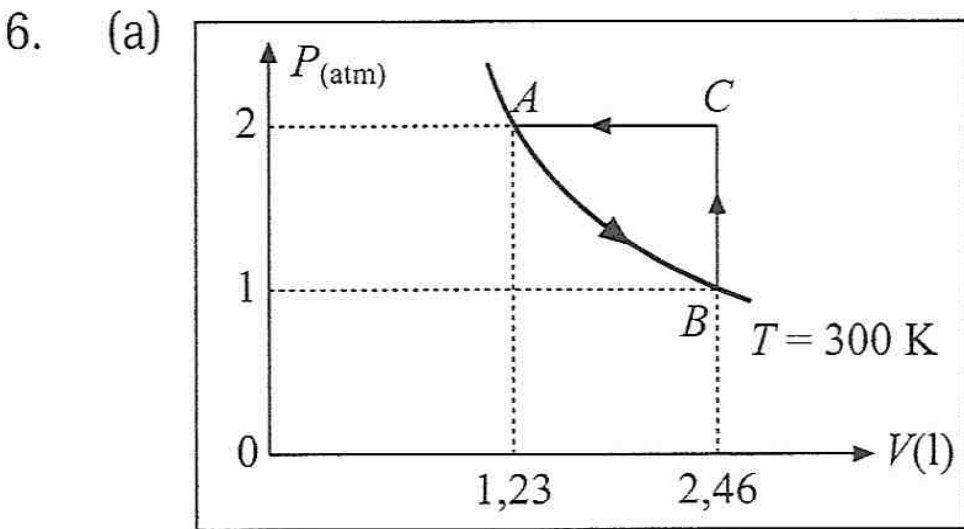
1. $1,35 \times 10^{-5} \text{ mol}$.
2. (a) 2,62 g; (b) 1,11 atm; (c) 0,15 g.
3. (a) $0,174 \text{ kg/m}^3$; (b) 3,51 l; (c) 54,4 J, (d) 81,6 J; (e) 136 J.



- (b) 208 J
(c) 624 J
(d) $T_{\text{máx}} = 400\text{ K}$
 $T_{\text{mín}} = 225\text{ K}$
(e) $\Delta U = 0$

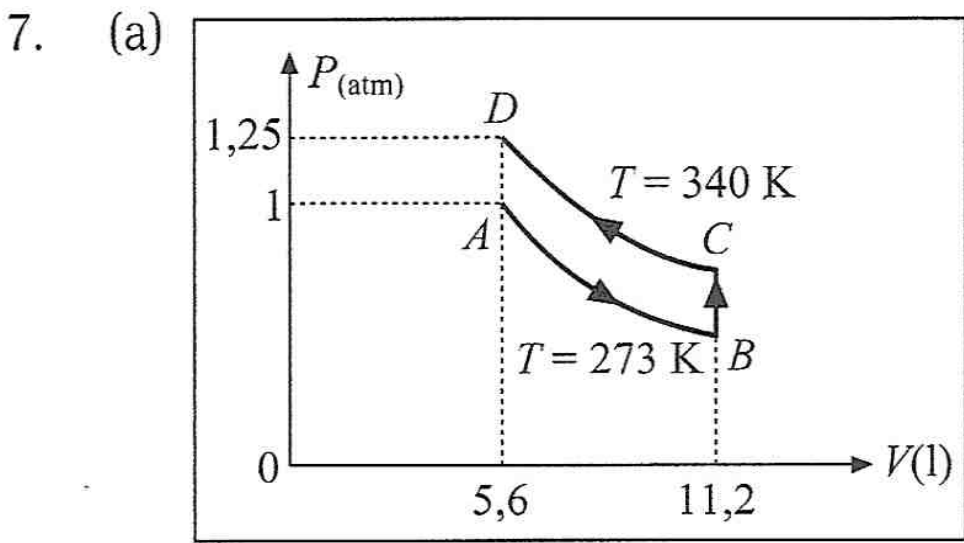


- (b) 176 J



(b)

| Processo | ΔW (J) | ΔQ (J) | ΔU (J) |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| AB | 173 | 173 | 0 |
| BC | 0 | 374 | 374 |
| CA | -249 | -623 | -374 |
| Ciclo | -76 | -76 | 0 |

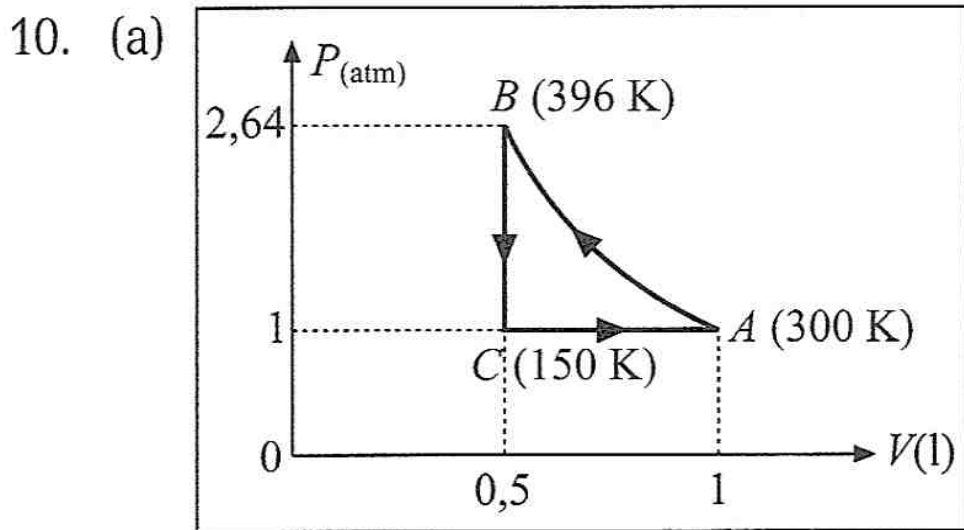


(b)

| Processo | ΔU (J) | ΔW (J) |
|----------|----------------|----------------|
| (i) AB | 0 | 393 |
| (ii) BC | 209 | 0 |
| (iii) CD | 0 | -490 |

8.
$$W = R(T_2 - T_1) + RT_2 \ln\left(\frac{P_0 V_0}{RT_2}\right) - RT_1 \ln\left(\frac{RT_1}{P_0 V_0}\right).$$

9. (a) -164°C ; (b) 2045 J.



- (b) - 30,2 J

(c)

| Processo | ΔU (J) | ΔQ (J) |
|----------|----------------|----------------|
| AB | + 80,9 | 0 |
| BC | -207,5 | -207,5 |
| CA | +126,6 | 177,3 |

1.

| Processo | Volume final | $T_{\text{final}}(\text{K})$ | ΔW | ΔU |
|----------|--------------|------------------------------|------------|------------|
| (i) | V_i | 145 | 0 | -3.014 |
| (ii) | $2 V_i$ | 290 | 1671 | 0 |
| (iii) | $1,64 V_i$ | 238 | 1083 | -1083 |
| (iv) | $2 V_i$ | 290 | 0 | 0 |

12. (a) $\tau = \frac{2}{a^2} \sqrt{\frac{mV}{\gamma P}}$, onde $P = p_0 + \frac{mg}{\pi a^2}$; (b) $\gamma = 1,4$.
13. (a) 4,48 atm; 150 K; (b) $\gamma = 7/5$, $C_V = \frac{5}{2} R$, $C_P = \frac{7}{2} R$; (c) - 2.557 J; (d) - 847 J.

CAPÍTULO 10

2. 64,4%
3. (a) $K = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$; (b) $K = \frac{1 - \eta}{\eta}$; (c) $4,7 \times 10^5 \text{ J}$; 1,4 kg.
4. (a) $T_A = 240,6 \text{ K}$; $T_B = 481 \text{ K}$; $T_C = 722 \text{ K}$; $T_D = 361 \text{ K}$. (b) $\eta = 1/12 \approx 8,3\%$; (c) $\eta_C = 2/3 \approx 66,7\%$.
5. (a) 8%; (b) $1/3 \approx 33,3\%$
6. (a) $\eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\gamma}$; (b) $\eta_C = \frac{3}{4}$.
7. (a) $\eta = 1 - \frac{(\gamma - 1) \ln r}{(r^{\gamma - 1} - 1)}$; (b) $\eta = 1 - \frac{\ln \rho}{\rho - 1}$; (c) $\eta = 13,2\%$; (d) $\eta/\eta_C = 54,5\%$.
8. (b) 60%
9. (b) $\eta = 56\%$; (c) $\eta_C = 89\%$.
10. (b) 48%.
11. $\eta = 1 - \frac{T_2}{\frac{1}{2}(T_1 + T_3)} < \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$
12. $s = 6,97 \times 10^{-6} T^3 \text{ cal/mol K}$.
14. $\Delta S = 2.079 \text{ cal/K} = 8.702 \text{ J/K}$.
15. $\Delta S = 0,52 \text{ J/K}$.
16. (a) 8°C; (b) 10,2 cal/K.
17. (a) 0; (b) 306 cal/K (irreversível)
18. $\Delta S = 1,04 \times 10^4 \text{ J/K}$; $\Delta W = 3,02 \times 10^6 \text{ J}$.
19. (a) - 241 cal/K; (b) 31,6 cal/K.

CAPÍTULO 11

1. $2 \times 10^{-4} \text{ N/m}^2$.
2. $3,22 \times 10^4 \text{ moléculas/cm}^3$.
4. (a) $3,35 \times 10^{22} \text{ moléculas/cm}^3$; $3,1 \times 10^{-8} \text{ cm}$; (b) $1,97 \times 10^{19} \text{ moléculas/cm}^3$; $3,7 \times 10^{-7} \text{ cm}$; (c) 719 m/s .
5. $0,21 \text{ atm (O}_2\text{) e } 0,78 \text{ atm (N}_2\text{)}$.
6. $x = 30\%$.
7. $v_{\text{qm}} = 2,2 \text{ km/s}$; $v_{\text{escape}} = 2,4 \text{ km/s}$.
8. 2.
9. $1,4 \text{ cm/s}$.
10. (a) $\gamma = \frac{7+3x}{5+x}$; $\gamma = \frac{7}{5} (x=0)$; $\gamma = \frac{5}{3} (x=1)$; (b) $x = 1/3 = 33\%$.
11. (a) $1,85 \text{ atm}$; (b) $C_V = 2,17 R$; $C_P = 3,17 R$; $\gamma = 1,46$.
12. $\omega_{\text{qm}} = 2,5 \times 10^{12} \text{ rad/s}$.
13. (a) $2,18 \times 10^{-8} \text{ cm}$; (b) $7,18 \times 10^9 \text{ colisões/s}$.
14. $1,59 \times 10^{-6} \text{ cm}$.
15. $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$.
16. $W = a\left(\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_f}\right) + RT \ln\left(\frac{v_f - b}{v_i - b}\right) \text{ (1 mol)}$.
17. $2,56 \times 10^{-8} \text{ cm}$ (a partir de ρ_C).
18. (a) $a = 3,6 \text{ atm} \cdot \text{l}^2/(\text{mol})^2$; $b = 0,043 \text{ l/mol}$; (b) $\rho_C = 0,34 \text{ g/cm}^3$; (c) $44,8 \text{ atm}$; (d) $34,6 \text{ atm}$; (e) 42% .

CAPÍTULO 12

1. $18,4\% \text{ de O}_2 \text{ e } 80,6\% \text{ de N}_2$.
2. (a) $A = \frac{1}{v_0}$; (b) $\langle v \rangle = v_p = v_0$; $v_{\text{qm}} = \sqrt{\frac{7}{6}} v_0$
3. $1,66\%$
4. $\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \frac{1}{2} \langle v \rangle = 2 \langle w^+ \rangle \text{ [cf. (12.2.28)]}$.
5. $R = 4/\pi \approx 1,27$.
6. (a) $F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{E}}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}}$; (b) $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m v_{\text{qm}}^2$; (c) $E_p = \frac{1}{2} kT \neq \frac{1}{2} m v_p^2 = kT$.
7. $v_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ (feixe)} > v'_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ (forno)}$

$$E_p = kT \text{ (feixe)} > E'_p = \frac{1}{2} kT \text{ (forno)}$$

8. (a) $\frac{\rho(R)}{\rho(0)} = \exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right)$; (b) $\frac{\rho(R)}{\rho(0)} \approx 12,6$.

9. (a) $p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^N$; (b) $p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^N$; (c) $p = \binom{N}{N/3} \left(\frac{1}{3}\right)^{N/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2N/3}$ onde $\binom{N}{n}$ é definido pela (12.5.1) (supondo $N/3$ inteiro); (d) $\Delta S = Nk \ln 2$; (e) $p_1 = 5,1 \times 10^{-5}$; $p_2 = 2,6 \times 10^{-2}$; $p = 0,273$.

Bibliografia

A relação de obras abaixo representa bibliografia adicional para o presente volume, devendo ser acrescida dos livros já relacionados no volume 1.

Livros-texto gerais

Bergman, L. e Schaefer, Cl., *Lehrbuch der Experimentalphysik*, W. de Gruyter & Co., Berlim (1958).

Frish, S. e Timoreva, A., *Curso de Física General*, Editorial Mir, Moscou (1967).

Kronig, R. (ed.), *Textbook of Physics*, Pergamon Press, Londres (1954).

Mecânica dos fluidos

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1957).

Prandtl, L., *Essentials of Fluid Dynamics*, Blackie & Son, Londres (1952).

Prandtl, L. e Tietjens, O. G., *Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics* Dover, Nova York (1957).

Oscilações e ondas; acústica

Coulson, C. A., *Waves* (Berkeley Physics Course, vol. 3), McGraw-Hill, Nova York (1968).

Fleury, P. e Mathieu, J. P., *Vibrations Mécaniques, Acoustique*, Eyrolles, Paris (1955).

Fouillé, A., *Physique des Vibrations*, Dunod, Paris (1960).

French, A. P., *Vibrations and Waves*, W. W. Norton, Nova York (1971).

Poynting, J. H. e Thomson, J. J., *Sound*, Charles Griffin & Co., Londres (1927).

Wood, A., *Acoustics*, Blackie & Son, Londres (1940).

Termodinâmica e mecânica estatística

Bloch, E., *Théorie Cinétique des Gaz*, Librairie Armand Colin, Paris (1946).

Callen, H. B., *Thermodynamics*, J. Wiley, Nova York (1960).

Fabry, Ch., *Éléments de Thermodynamique*, Librairie Armand Colin, Paris (1950).

Fermi, E., *Thermodynamics*, Dover, Nova York (1956).

Jeans, J., *Kinetic Theory of Gases*, Cambridge Univ. Press (1967).

- Kennard, E. H., *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, Nova York (1938).
- Landau, L. D. e Lifshitz, E. M., *Statistical Physics*, Pergamon Press, Londres (1958).
- Lopes, J. L., *Introdução à Teoria Atômica da Matéria*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro (1959).
- Planck, M., *Treatise on Thermodynamics*, Dover, Nova York (1943).
- Pippard, A. B., *Classical Thermodynamics*, Cambridge Univ. Press (1966).
- Reif, F., *Statistical Physics*, (Berkeley Physics Course, vol. 5), McGraw-Hill, Nova York (1965).
- Roberts, J. K., *Heat and Thermodynamics*, Blackie & Son, Londres (1951).
- Sears, F. W., *Thermodynamics*, Addison Wesley, Reading (1953).
- Sommerfeld A., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press, Nova York (1956).
- Zemansky, M. W., *Heat and Thermodynamics*, 3rd ed., McGraw-Hill, Nova York (1951).

Clássicos, história e divulgação

- Benade, A. H., *Horns, Strings and Harmony*, Doubleday & Co., Nova York (1960).
- Huygens, C. e Fresnel, A., *La Teoría Ondulatoria de la Luz*, Ed. Losada, B. Aires (1945).
- Magie, W. F., *A Source Book in Physics*, McGraw-Hill, Nova York (1935).
- Pascal, B., *Oeuvres Complètes*, Hachette, Paris (1873).
- Rayleigh, Lord (J. W. Strutt), *The Theory of Sound*, Dover, Nova York (1945).
- Weinberg, S., *The First Three Minutes*, Basic Books, Nova York (1977).

Índice Alfabético

A

Acaso, passeio ao, 280
 Acorde musical, 133
 Adiabática, 199
 compressão, 175
 parede, 157, 175
 Aerofólio, 30
 Agente, 209
 Altura
 cinética, 23
 de um som, 132
 geométrica, 23
 piezométrica, 23
 Amortecimento, 71
 crítico, 76
 subcrítico, 72, 73
 supercrítico, 75
 Amplitude
 de deslocamento, 130
 de oscilação, 44
 de pressão, 130
 modulação, 64
 Arquimedes, princípio de, 10
 Atmosfera isotérmica, 12
 Atrito, 205, 211, 232
 Avogadro,
 lei de, 190, 240
 e teoria cinética, 248
 número de 240, 251, 284

B

Barômetro, 9
 Batimentos, 64, 91, 111, 133
 Bernoulli, equação de, 23
 generalização, 196
 Big Bang, teoria do, 293

Boltzmann,
 constante de, 250, 290
 distribuição de, 278
 relação de, 289
 Bomba aspirante, 26
 Boyle, lei de, 189
 e teoria cinética, 247
 Browniano, movimento, 279
 observações, 284

C

Caldeira, 208, 217
 Calor, 169, 177, 181
 condução de, 171, 228
 específico, 169, 251
 a pressão constante, 169, 196
 a volume constante, 169, 196
 latente, 223
 de condensação, 209
 de vaporização, 183
 natureza do, 167
 num processo reversível, 181
 quantidade de, 169
 Caloria, 169
 equivalente mecânico, 168, 173
 Calórico, 167, 181
 Calorímetro, 170, 192
 Camada limite, 35
 Câmara
 de bolhas, 264
 de Wilson, 264
 Caminho, diferença de, 146
 Capacidades térmicas, 170, 181
 molares, 170
 de um gás ideal, 196, 197, 251, 254
 dos sólidos, 171, 254

Carnot,
 ciclo de, 211, 218
 teorema de, 213
 Charles, lei de, 189
 Choque, onda de, 151
 Ciclo, 180, 182, 207
 de Carnot, 211, 218
 irreversível, 220
 reversível, 218, 220
 Circulação, 26, 28, 29, 36
 conservação da, 31
 Clausius,
 desigualdade de, 220, 229
 teorema de, 218, 220
 Colunas de ar vibrantes, 135
 Combinações volumétricas, lei das, 239
 Composto, 238
 Compressibilidade, módulo de, 123, 263
 Condensador, 208, 210, 217
 Condução de calor, 171, 228
 Condutividade térmica, 172
 Conservação
 da circulação, 31
 da energia, 23, 169
 da massa, 18
 Constante universal dos gases, 190, 250
 Continuidade, equação de, 20
 Convecção, 171
 Coordenadas normais, 90
 Copressão, 261, 265
 Cordas vibrantes
 equação das, 103, 105
 leis das, 116
 tensão de, 103
 Corrente,
 filetes de, 22
 linhas de, 17
 tubos de, 18
 Cosmológico, princípio, 292
 Covolume, 260



D'Alembert, paradoxo de, 32
 Dalton, lei de, 244
 Debye, temperatura de, 171
 Decaimento, tempo de, 75
 Decibel, 131
 Defasagem, 56, 66, 87, 109
 na reflexão, 113, 114
 Degradação da energia, 231

Densidade, 2, 123
 Deslocamento quadrático médio, 281
 Diagrama indicador, 180
 Diatérmica, parede, 157
 Diferencial inexata, 181, 223
 Difração, 142, 143
 Difusão, 248, 256, 281, 282
 coeficiente de, 281, 283
 Dilatação térmica, 163
 coeficiente de, linear, 163
 superficial, 163
 volumétrica, 164, 189
 Dispersão, 85, 112
 Distribuição
 binomial, 288
 de Boltzmann, 278
 de velocidades, 269, 275
 de Maxwell, 269, 274
 verificação, 278
 Doppler, efeito, 147
 ótico, 292
 Dulong e Petit, lei de, 171, 254



Efusão, 278
 Einstein, relação de, 284
 Elasticidade, módulo de, 123, 125
 Elemento, 238
 Empuxo, 10
 centro de, 10
 dinâmico, 30
 Energia
 balanço de, 85
 cinética média, 244, 247
 e temperatura, 250
 degradação da, 231
 de uma onda, 107, 130
 densidade de, 108
 de um modo, 118
 de um oscilador, 45, 73
 equipartição da, 246, 251
 interna, 176, 182
 de um gás ideal, 192, 195, 198, 249
 Entalpia, 195
 Entropia, 221
 de um gás ideal, 224
 e degradação de energia, 231
 e desordem, 289
 e seta do tempo, 290
 e probabilidade, 289

e segunda lei, 231
 na condução do calor, 228
 na difusão, 227
 na expansão livre, 227
 no equilíbrio, 230
 princípio de aumento da, 230, 285
 Equação de estado, 124, 159, 191
 de Van der Waals, 261
 dos gases ideais, 129, 191
 e teoria cinética, 250
 Equilíbrio
 de um corpo flutuante, 11
 de um fluido, 2, 5
 térmico, 158, 230
 Equipartição da energia, 246
 teorema de, 251, 252, 280
 Escala de temperatura
 Celsius, 160
 de gás ideal, 162
 e absoluta, 216
 Kelvin, 161
 prática, 162
 termodinâmica, 216
 Escala musical, 134
 Escoamento, 17
 estacionário, 18, 19
 irrotacional, 29, 31, 35
 laminar, 32
 potencial, 29
 rotacional, 29, 31, 35
 turbulento, 18, 35
 Espectro acústico, 135
 Estacionária, solução, 78, 82
 Estado, função de, 175, 222
 Estagnação, ponto de, 25
 Esteira, 35, 151
 Euler, fórmula de, 59
 Exclusão, esfera de, 256, 260
 Expansão livre, 178, 184, 192, 206, 227, 285
 Extensiva, grandeza, 225

F

Fase de oscilação, 44
 de uma onda, 101
 Fases, coexistência de, 264
 transição de, 217, 223, 264
 Fator integrante, 223
 Fator Q, 75, 82, 87
 Feixes atômicos, 278
 Fluidos, 1, 2
 dinâmica dos, 17

em equilíbrio, 2, 3
 num campo, 5
 em rotação, 7
 equação de movimento, 21
 estática dos, 1, 6
 incompressíveis, 6, 19
 perfeitos, 21, 31
 superfície livre, 7, 8
 Flutuação - dissipação, relação, 284
 Flutuações, 2, 158
 de posição, 281
 de pressão, 282
 relativas, 282, 288
 Fluxo, 20
 Fonte quente ou fria, 208
 Forças
 de Langevin, 283
 superficiais, 3
 volumétricas, 3
 Fourier,
 coeficiente de, 118
 série de, 118, 134
 Frequência, 44, 101
 angular, 44, 100
 média de colisão, 257
 própria, 77
 unidades, 44
 Fundamental, modo, 116, 119
 tom, 136

G

Gases, constante universal dos, 190, 250
 ideais, 188
 expansão isotérmica, 191
 energia interna, 192, 193, 197
 capacidades térmicas molares, 196, 197
 processo adiabático, 198
 perfeitos, lei dos, 124, 191, 246
 reais, 259
 isotermas de, 264
 teoria cinética dos, 241
 Gaussiana, função, 273
 Gay-Lussac, lei de, 239
 Gelo, ponto de, 160
 Giração, raio de, 51
 Graham, lei de, 248
 Grau, 160, 162
 Graus de liberdade, 39, 94
 congelamento dos, 255

H

Hagen-Poiseuille, lei de, 34
 Halley, lei de, 12, 269, 277
 Harmônicos 116
 tons, 133, 134, 136
 Hertz, 44
 Hooke, lei de, 40
 Hubble, constante de, 292
 Huygens, princípio de, 140
 e lei da reflexão, 144
 e lei da refração, 144

I

Infinitésimo físico, 2
 Intensidade, 107
 unidades, 130
 Intensiva, grandeza, 225
 Interferência, 107, 146
 de ondas, 109, 146
 franjas de, 147
 Intervalo musical, 133, 134
 Isóbara, 180
 Isócora, 180
 Isolante térmico, 172
 isoterma, 159, 180, 199
 crítica, 263
 de Van der Waals, 262
 Isótopos, 240
 separação de, 248

J

Joule, efeito, 173
 experiência de, 174, 184, 192
 Joule-Thomson, efeito, 194

L

Langevin, força de, 283
 Lei zero da termodinâmica, 158
 Limiar de audibilidade, 132
 de sensação dolorosa, 132
 Lissajous, curvas de, 66
 Livre percurso médio, 256
 valores numéricos, 258

M

Mach,
 ângulo de, 150
 cone de, 150
 número de, 150
 Macroestado, 285

Magnus, efeito, 30
 Manômetro, 9
 Máquina térmica, 208
 de Carnot, 212, 217
 reversível, 212
 Massa atômica, 240
 unidade de, 55, 241
 Maxwell, construção de, 264
 distribuição de, 269, 274
 Mayer, fórmula de, 197
 Média temporal, 46, 74, 86
 Membranas vibrantes, 137
 Metacentro, 11
 Microestado, 288
 Mistura, 238
 Modos
 antissimétricos, 90, 93
 frequências dos, 116
 de uma coluna de ar, 136
 normais, 90, 94, 115
 simétricos, 90, 93
 de uma corda, 116
 Mol, 170, 191
 Moto perpétuo, 207
 Motor térmico, 208
 Movimento
 browniano, 279
 harmônico simples, 40
 e circular uniforme, 56

N

Newton, lei de, 33
 Nodos, 110, 136
 Normalização, condição de, 269
 Nota musical, 132
 Número atômico, 238
 Números complexos, 57
 argumento, 59
 módulo, 58
 produto, 58, 60
 quociente, 58, 60
 soma, 57

O

Onda, 98
 amplitude de, 101, 130
 comprimento de, 101, 116, 129
 de choque, 151
 de deslocamento, 129
 fase de, 101, 138

- frentes de, 138
 - intensidade de, 107, 130, 140
 - monocromática, 102
 - número de, 101
 - plana, 138
 - refletida, 100, 113
 - transmitida, 114
 - velocidade de, 99
 - vetor de, 138
 - Ondas, 98
 - bidimensionais, 140
 - cilíndricas, 140
 - de compressão, 98, 123, 130
 - esféricas, 139, 140
 - estacionárias, 110, 115, 136
 - grupo de, 111
 - harmônicas, 100
 - interferência de, 109
 - longitudinais, 99, 122
 - progressivas, 99, 106
 - reflexão e refração, 144
 - sonoras, 123
 - harmônicas, 129
 - transversais, 99
 - tridimensionais, 138
 - equação de, 139
 - unidimensionais, 99
 - equação de, 103, 104, 127
 - Oscilações, 39
 - acopladas, 88, 92
 - amortecidas, 71, 73, 81
 - centro de, 51, 52
 - de duas partículas, 53
 - forçadas, 39, 77
 - equação de movimento, 77, 81
 - livres, 39, 44
 - amortecidas, 71
 - equação de movimento, 40, 71
 - freqüência natural, 77
 - longitudinais, 92
 - num tubo em U, 52
 - transversais, 92
 - Oscilador harmônico, 40
 - bidimensional, 64
- P**
- Paradoxo de d'Alembert, 32
 - hidrodinâmico, 26
 - hidrostático, 11
 - Pascal, princípio de, 8
 - Pêndulo de torção, 47
 - físico, 51
 - reversível, 52
 - simples, 47
 - período, 48, 50
 - Período temporal, 44, 101
 - Peso específico, 6
 - estatístico, 289
 - Pitot, tubo de, 24
 - Polarização, 66
 - Ponto crítico, 263, 265
 - fixo, 162
 - triplo, 162
 - Potência, 86
 - de uma onda, 130
 - fator de, 87
 - Prensa hidráulica, 8
 - Pressão, 3, 21, 161
 - absoluta, 10
 - atmosférica, 9
 - dinâmica, 25
 - manométrica, 10
 - parcial, 244
 - teoria cinética da, 242
 - unidades, 5
 - variação com a altitude, 6, 7, 12
 - Primeira lei da termodinâmica, 174, 175
 - Probabilidade termodinâmica, 289
 - Processo
 - adiabático, 124, 178, 183, 198, 212
 - irreversível, 204, 207, 226, 228
 - isentrópico, 223, 226
 - isobárico, 182, 195
 - isocórico, 196
 - isotérmico, 124, 211
 - quase-estático, 179
 - reversível, 178, 179, 206, 211, 221
 - Propagação retilínea, 142
 - Proporções
 - definidas, lei das, 238
 - múltiplas, lei das, 239
 - Proust, lei de, 238
- Q**
- "Q", 75, 82, 87
 - Quadratura, 45, 91
- R**
- Radiação, 171
 - térmica de fundo, 293
 - Reflexão, 112
 - e refração de ondas, 144

leis da, 143
 num extremo fixo, 113
 num extremo livre, 113
 Refração de ondas, 143
 índice de, 144
 lei da, 143
 Refrigerador, 209, 210
 Rendimento, 209, 213
 de uma máquina de Carnot, 213, 216
 de uma máquina irreversível, 221
 Reservatório térmico, 171, 208
 Ressonância, 80, 81, 82, 87
 de uma cavidade, 136
 pico de, 83, 87
 Reversibilidade, paradoxo, 291

§

Secção eficaz, 257
 Segunda lei da termodinâmica, 205
 e entropia, 231
 e seta do tempo, 290
 e probabilidades, 286
 enunciado de Clausius, 207, 231
 enunciado de Kelvin, 207, 220, 231
 equivalência dos enunciados, 210
 Semilargura, 83
 Sistema isolado, 157
 termodinâmico, 157
 Snell, lei de, 143
 Som, 122
 fontes de, 135
 interferência, 147
 musical, 133
 altura, 132
 timbre, 134
 natureza do, 122
 reflexão e refração, 144, 145
 velocidade do, 127, 201
 num gás, 128
 na água, 129
 Stevin, lei de, 7
 princípio de, 11
 Substância pura, 238
 Superfícies isobáricas, 6, 7
 Superposição
 de modos, 94
 de movimentos harmônicos simples, 62
 princípio de, 43, 78, 106, 117

⌋

Temperatura, 159

absoluta, 162, 215
 Celsius, 160
 empírica, 160
 gradiente de, 172
 interpretação cinética, 250
 zero absoluto, 218
 Tempo, seta do, 206, 290
 cosmológica, 292
 termodinâmica, 290
 Tensão, 1, 3, 93, 103
 de compressão, 1, 3
 de tração, 1, 3
 normal, 1
 tangencial, 1, 21
 Terceira lei da termodinâmica, 218
 Termodinâmico, sistema, 157
 Termômetro, 159
 de álcool, 160
 de gás, 160
 de mercúrio, 160
 de platina, 163
 Thomson, teorema de, 31, 36
 Timbre, 134
 Torção, módulo de, 47
 Torricelli, experiência, 9
 fórmula de, 24
 Trabalho, 176
 adiabático, 175, 200
 reversível, 179, 182
 Transiente, 78, 84

∇

Valores médios, 156, 244, 283
 Van der Waals,
 constantes de, 262, 263
 equação de, 262
 forças de, 259
 isotermas de, 262
 Vapor, 264
 ponto de, 163
 pressão de, 264
 supersaturado, 264
 Vasos comunicantes, 9
 Vazão, 19, 34
 Veia contraída, 24
 Velocidade
 de fase, 102, 104, 112
 de grupo, 112
 mais provável, 276
 média, 276

quadrática média, 245, 275

Velocidades,

 espaço de, 275

 potencial de, 29, 138

 seletor de, 279

Ventres, 110

Venturi, fenômeno de, 25

 medidor de, 26

Vetor girante, 56

Viscosidade, 2, 21, 32

 coeficiente de, 33

Vórtice, 31, 35

anel de, 31

fileira de, 35

filete de, 31

W

Wiedemann e Franz, lei, 172

Wilson, câmara de, 264

Y

Young, experiência de, 145

Z

Zero absoluto, 218

Este curso universitário de Física Básica destina-se aos estudantes de engenharia, física, matemática, química e áreas correlatas. O objetivo é dar uma discussão detalhada e cuidadosa dos conceitos e princípios básicos da física, com ênfase na compreensão das idéias fundamentais. Procura-se desenvolver a intuição e a capacidade de raciocínio físico, bem como motivar e interessar os estudantes.

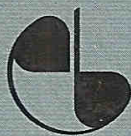
O volume 2, "Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor", corresponde ao 2.º semestre do curso. Os tópicos discutidos compreendem estática e dinâmica dos fluidos, oscilações livres e forçadas de sistemas mecânicos, fenômenos ondulatórios, acústica, calor, princípios da termodinâmica e teoria cinética dos gases.

Nesta 4.ª edição, foram incorporados 197 problemas propostos, todos com respostas. Os problemas foram elaborados com vistas a ilustrar os principais conceitos e resultados, contribuindo para sua melhor compreensão, indicar aplicações a uma variedade de situações concretas, aprofundar e generalizar resultados e familiarizar os estudantes com ordens de grandeza, seguindo a mesma orientação geral do texto.

O Autor

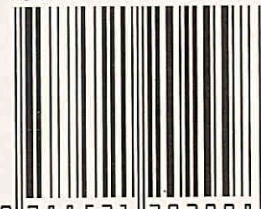
Moysés Nussenzveig, professor emérito da Universidade Federal do Rio de Janeiro, foi também professor titular das Universidades de Rochester e São Paulo, da PUC-Rio e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, professor ou pesquisador visitante do Institute for Advanced Study de Princeton, da Universidade de Paris, do Goddard Space Flight Center da NASA, do Collège de France e da École Normale Supérieure.

É prêmio Max Born e "Fellow" da Optical Society of America, "Fellow" da American Physical Society, homenageado na Universidade de Tel Aviv com a Cátedra Moysés Nussenzveig de Mecânica Estatística, Prêmio Nacional de Ciência e Tecnologia e detentor da Grã-Cruz da Ordem Nacional do Mérito Científico.



EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

ISBN 978-85-212-0299-8



9 788521 202998